Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПОЧТИ ПАРАКОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА

АНГЕЛЕ ЛЯОНОВНА БАШКЕНЕ

Рассматривается почти контактная метрическая структура (φ, ξ, η, g) гиперболического типа II рода (почти параконтактная метрическая структура), возникающая на гиперповерхностях $\mathcal{M}_{2n-1}$ касательного расслоения $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)$ n-мерного риманова пространства $\mathcal{V}_n$ при нормальном оснащении. Геометрический смысл гиперповерхности $\mathcal{M}_{2n-1}\subset\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)$ — поле $(n-1)$-мерных индикатрис в $\mathcal{V}_n$. Для изучения зависимости между свойствами (φ, ξ, η, g)-структуры на $\mathcal{M}_{2n-1}$, строением соответствующего гиперповерхности поля индикатрис и свойствами базисного пространства $\mathcal{V}_n$ используются три поля неголономных реперов в $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)$ и в $\mathcal{M}_{2n-1}$. Более детально рассмотрены случаи, когда $n=2$, $\mathcal{V}_n$ является локально евклидовым пространством.

1. На нечетномерном многообразии $\mathcal{M}_{2n-1}$ почти контактная структура (φ, ξ, η) определяется аффинором φ_p^r, вектором ξ^r и ковектором η_p, удовлетворяющими условиям ([6], $\omega=-1$),

$$\varphi_p^r\varphi_r^s=\omega\delta_p^s+\xi^s\eta_p, \quad \xi^r\eta_r=-\omega, \tag{1}$$

$$\varphi_p^r\eta_r=\varphi_s^r\xi^s=0, \text{ ранг } (\varphi)=2n-1, \ p, q, r, s, t=1,\dots, 2n-1,$$

из которых независимы лишь первые две аксиомы.

В [4] были введены гиперболические (φ, ξ, η)-структуры, определяемые условиями (1) при $\omega=1$. (φ, ξ, η)-структуры гиперболического типа возникают на гиперповерхностях почти двойных многообразий при почти контактном оснащении так же естественно, как классические (φ, ξ, η)-структуры (эллиптического типа) возникают на гиперповерхностях почти комплексных многообразий. Когда в почти двойном или почти комплексном многообразии задана A-метрика или B-метрика, на гиперповерхности возникает почти контактная метрическая структура (φ, ξ, η, g) гиперболического или эллиптического типа I или II рода, соответственно. Невырожденная, но не обязательно положительно определенная метрика g_{rt} удовлетворяет условиям

$$\varphi_p^r g_{rt}=\rho\varphi_t^r g_{rp}, \quad g_{pr}\xi^r=-\varepsilon\rho\eta_p, \tag{2}$$

где $\rho=-1$ для (φ, ξ, η, g)-структуры I рода, $\rho=1$ для структуры II рода, $\varepsilon=\operatorname{sgn} \mathbf{C}^2$, $\mathbf{C}$ — оснащающий вектор. (φ, ξ, η, g)-структуры (1), (2) изучались с различных точек зрения многими авторами ([3, 7, 8]).

На касательное расслоение $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)$ n-мерного риманова пространства $\mathcal{V}_n$ можно смотреть как на почти двойное многообразие с B-метрикой. Действительно, введем в $\mathcal{V}_n(x^i)$, $i, j, k, \dots =1,\dots, n$, первое поле неголономного адаптированного корепера $\{\overset{\circ}{\omega}{}^i\}$, взаимного ортореперу $\{\mathbf{e}_i\}$. Далее в $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)(x^i, x^{n+i})$ введем второе поле неголономного адаптированного корепера $\{\omega^\alpha\}$, $\alpha, \beta, \dots =1,\dots, 2n$,

$$\{\omega^i=\overset{\circ}{\omega}{}^i\circ\pi_*, \quad \omega^{n+i}=\delta x^{n+i}\}, \tag{3}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 155—163.

где π — естественная проекция $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)\to\mathcal{V}_n$, x^{n+i} — координаты вектора по отношению к ортореперу $\{\mathbf{e}_i\}$. Для простоты записи будем отождествлять ω^i с $\overset{\circ}{\omega}{}^i$. Если вектор $\mathbf{u}$, касательный к $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)$, имеет координаты (u^i, u^{n+i}) по отношению к (3), то его вертикальный компонент имеет координаты $(0, u^{n+i})$, горизонтальный — $(u^i, 0)$. Построив векторы $(u^{n+i}, 0)$ и $(0, u^i)$, после их сложения получим вектор $\mathcal{F}(\mathbf{u})(u^{n+i}, u^i)$. Аффинор $\mathcal{F}$ с матрицей

$$(\mathcal{F}^{\beta}_{\alpha})=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где I_n — единичный n-мерный блок, имеет инвариантный смысл и определяет в $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)$ почти двойную структуру. Метрика Сасаки

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta} \tag{5}$$

является В-метрикой по отношению к почти двойной структуре (4).

В общем случае $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)$ не является В-пространством гиперболического типа. Легко доказать, что $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)$ является таким пространством тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}_n$ локально евклидово пространство. Действительно, ненулевые компоненты объекта неголономности корепера (3) в силу структурных уравнений пространства $\mathcal{V}_n$ равны [2]

$$B^i_{jk}=b^i_{jk},\quad B^{n+i}_{kl}=\overset{\circ}{R}{}^i_{klj}\chi^{n+j},\quad B^{n+i}_{n+j,\,k}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk},\quad B^{\alpha}_{\beta\gamma}=-B^{\alpha}_{\gamma\beta},$$

где b^i_{jk} — компоненты объекта неголономности корепера $\{\overset{\circ}{\omega}{}^i\}$, $\overset{\circ}{R}{}^i_{klj}$ — тензор кривизны, $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk}$ — коэффициенты римановой связности на $\mathcal{V}_n$. Отсюда находим ненулевые коэффициенты $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=(B^{\alpha}_{\beta\gamma}+B^{\beta}_{\gamma\alpha}+B^{\gamma}_{\beta\alpha})/2$ связности, определяемой метрикой (5)

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^{n+i}_{n+j,\,k}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk},\quad \Gamma^i_{j,\,n+k}=\Gamma^i_{n+k,\,j}=\Gamma^{n+k}_{ji}=(\overset{\circ}{R}{}^k_{jil}x^{n+l})/2.$$

Легко найти ненулевые координаты тензора $\nabla_\alpha F^{\gamma}_{\beta}=\partial^{\omega}_{\alpha}F^{\gamma}_{\beta}+\Gamma^{\gamma}_{\delta\alpha}F^{\delta}_{\beta}-\Gamma^{\delta}_{\beta\alpha}F^{\gamma}_{\delta}$: $\nabla_i F^k_j=-\nabla_i F^{n+k}_{n+j}=x^{n+l}(\overset{\circ}{R}{}^j_{ikl}+\overset{\circ}{R}{}^k_{ijl})/2$, $\nabla_{n+i}F^k_{n+j}=-\nabla_{n+i}F^{n+k}_j=(\overset{\circ}{R}{}^i_{jkl}x^{n+l})/2$. Здесь ∂^{ω} — символ пфаффовой производной по отношению к кореперу (3). Отсюда очевидно, что $\nabla_\alpha F^{\gamma}_{\beta}=0$ тогда и только тогда, когда $\overset{\circ}{R}{}^i_{jkl}=0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим в $\mathcal{T}(\mathcal{V}_n)$ гиперповерхность $\mathcal{M}_{2n-1}(x^j, x^{n+a})$, заданную вложением i:

$$x^{2n}=f(x^p),$$

где $j, k, \ldots=1, \ldots, n$, $a, b, \ldots=1, \ldots, n-1$, $p, \ldots=1, \ldots, 2n-1$, x^j — локальные координаты точки $\mathcal{M}\in\mathcal{V}_n$, не фигурирующие явно. Формы $i^*\omega^{\alpha}$, которые для краткости будем обозначать ω^{α}, на гиперповерхности линейно зависимы. Пусть $\omega^{2n}=A_p\omega^p$. На $\mathcal{M}_{2n-1}$ получаем третье поле неголономного корепера $\{\omega^p\}$. Из строения корепера (3) следуют формулы [2]:

$$A_i=\partial^0_i f+x^{n+j}(\overset{\circ}{\Gamma}{}^n_{ji}-\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ji}\partial_{n+c}f),\quad A_{n+c}=\partial_{n+c}f, \tag{6}$$

где ∂^0_i — символ пфаффовой производной по отношению к кореперу $\{\overset{\circ}{\omega}{}^i\}$.

Гиперповерхность $\mathcal{M}_{2n-1}$ позволяет в каждой точке $\mathcal{M}_0(x^i_0)\in\mathcal{V}_n$ определить $(n-1)$-параметрическое семейство $x^{2n}=f(x^i_0, x^{n+c})$ векторов $\mathbf{v}(x^{n+i})\{\mathbf{e}_i\}$. Если отложить векторы $\mathbf{v}$ из точки $\mathcal{M}_0$, то их концы определят в касательном пространстве этой точки $(n-1)$-мерную поверхность — индикатрису. Отсюда следует, что геометрический смысл гиперповерхности $\mathscr{M}_{2n-1}\subset\mathscr{T}(\mathscr{V}_n)$ — поле $(n-1)$-мерных индикатрис в $\mathscr{V}_n$.

Найдем $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$-структуру на $\mathscr{M}_{2n-1}\subset\mathscr{T}(\mathscr{V}_n)$. Касательные векторы $\mathbf{B}_p$ гиперповерхности в корепере (3) имеют координаты $B_p^\alpha=\delta_p^\alpha+\delta_{2n}^\alpha A_p$, орт нормали $\mathbf{n}=(A_p,\ -1)/K$, где

$$K=(1+\sum_{p=1}^{2n-1}(A_p)^2)^{1/2}.$$

Вектор $\mathbf{C}$ называется почти контактным вектором, если $\mathscr{F}(\mathbf{C})$ является касательным к $\mathscr{M}_{2n-1}$:

$$F_\alpha^\gamma C^\alpha=\lambda^r B_r^\gamma.$$

Нормальное оснащение $\mathbf{n}$ в общем случае не является почти контактным оснащением; n^α удовлетворяют этому условию тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta=2(\Sigma_{c=1}^{n-1}A_cA_{n+c}-A_n)=0$,
где $\mathscr{F}_{\alpha\beta}=\mathscr{F}_\alpha^\gamma\mathscr{G}_{\gamma\beta}=\mathscr{F}_{\beta\alpha}$. В дальнейшем будем рассматривать лишь такие гиперповерхности $\mathscr{M}_{2n-1}\subset\mathscr{T}(\mathscr{V}_n)$, для которых

$$A_n=\sum_{c=1}^{n-1}A_cA_{n+c} \tag{7}$$

(для которых нормальное оснащение является почти контактным). Из уравнений

$$g_{rs}=\mathscr{G}_{\alpha\beta}B_r^\alpha B_s^\beta,\quad \mathscr{F}(\mathbf{B}_p)=\varphi_p^r\,\mathbf{B}_r-\eta_p\,\mathbf{n},\quad \mathscr{F}(\mathbf{n})=\xi^r\,\mathbf{B}_r$$

легко найти аффинор φ_p^r, вектор ξ^r, ковектор η_p, метрику g_{sr}, удовлетворяющие (1) (2) при $\omega=\rho=\varepsilon=1$, т. е. определяющие $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$-структуру гиперболического типа II рода (почти параконтактную метрическую структуру И. Сато [7]):

$$\varphi_p^r=\eta_pA_r/K+A_p\delta_n^r+\delta_p^{n+r}+\delta_{n+p}^r,\quad \eta_p=-A_pA_n/K-\xi^p, \tag{8}$$

$$\xi^r=(\delta_c^rA_{n+c}-\delta_n^r+\delta_{n+c}^rA_c)/K,\quad g_{rs}=\delta_{rs}+A_rA_s.$$

Отметим некоторые известные свойства $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$-структуры ([4, 5, 7]). Интегрируемость структуры определяется уравнением

$$N_{pq}^r=\varphi_p^s\tilde\partial_s\varphi_q^r-\varphi_q^s\tilde\partial_s\varphi_p^r-\varphi_s^r(\tilde\partial_p\varphi_q^s-\tilde\partial_q\varphi_p^s)-\varphi_p^t\varphi_q^s\tilde b_{ts}^r-\varphi_s^r\varphi_t^s\tilde b_{pq}^t+\varphi_s^r(\varphi_p^t\tilde b_{tq}^s-\varphi_q^t\tilde b_{tp}^s)=0, \tag{9}$$

где $\tilde\partial$ — символ пфаффовой производной по отношению к кореперу $\{\omega^p\}$, $\tilde b_{pq}^r$ — компоненты объекта неголономности этого корепера. Нормальность $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$-структуры характеризуется равенством

$$S_{pq}^r=N_{pq}^r+\xi^r(\tilde\nabla_p\eta_q-\tilde\nabla_q\eta_p)=0, \tag{10}$$

где $\tilde\nabla$ — символ ковариантной производной по отношению к римановой связности, определяемой метрикой g_{pr} (8). $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$-структура гиперболического типа II рода называется параконтактной метрической, если

$$\tilde\nabla_p\eta_q+\tilde\nabla_q\eta_p=2\alpha\varphi_{pq}, \tag{11}$$

где $\alpha=\mathrm{const}\neq0$, $\varphi_{pq}=\varphi_p^rg_{rq}=\varphi_{qp}$. Если вдобавок 1-форма η является замкнутой, то получим специальную параконтактную метрическую структуру, определяемую условием

(12)
$$\tilde{\nabla}_p \eta_q = \alpha \varphi_{pq}.$$

2. Рассмотрим случай, когда $n=2$. Пусть $d\overset{\circ}{\omega}{}^1 = a\overset{\circ}{\omega}{}^1 \wedge \overset{\circ}{\omega}{}^2$, $d\overset{\circ}{\omega}{}^2 = b\overset{\circ}{\omega}{}^1 \wedge \overset{\circ}{\omega}{}^2$, где a и b означают геодезические кривизны линий, касающихся полей $\{\mathbf{e}_1\}$ и $\{\mathbf{e}_2\}$, соотв.

На гиперповерхности $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{T}(\mathcal{V}_2)$, заданной уравнением

(13)
$$x^4 = f(x^1,\ x^2,\ x^3), \text{ или } \omega^4 = A_1\omega^1 + A_2\omega^2 + A_3\omega^3,$$

где в силу (6)

(14)
$$A_1 = \partial_1^0 f + a(x^3 + f\partial_3 f), \quad A_2 = \partial_2^0 f + b(x^3 + f\partial_3 f), \quad A_3 = \partial_3 f,$$

ненулевые компоненты объекта неголономности корепера $\{\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3\}$ равны [1]:

(15)
$$\tilde{b}^1_{12} = a, \quad \tilde{b}^2_{12} = b, \quad \tilde{b}^3_{13} = a\partial_3 f, \quad \tilde{b}^3_{23} = b\partial_3 f,$$
$$\tilde{b}^3_{12} = L = \varkappa f + a\partial_2^0 f - b\partial_1^0 f = \varkappa f + aA_2 - bA_1.$$

Здесь $\varkappa = \partial_2^0 a - \partial_1^0 b - a^2 - b^2$ — гауссова кривизна $\mathcal{V}_2$. Известно [1], что для функции $z(x^1,\ x^2,\ x^3)$

(16)
$$\tilde{\partial}_1 z = \partial_1^0 z + af\partial_3 z, \quad \tilde{\partial}_2 z = \partial_2^0 z + bf\partial_3 z, \quad \tilde{\partial}_3 z = \partial_3 z.$$

Отсюда, из (14) и тождества $\tilde{\partial}_{pq} z - \tilde{\partial}_{qp} z + \tilde{b}^r_{pq}\tilde{\partial}_r z = 0$ следуют полезные для вычислений формулы

(17)
$$\tilde{\partial}_1 A_3 - \tilde{\partial}_3 A_1 + a(1 + A_3^2) = \tilde{\partial}_2 A_3 - \tilde{\partial}_3 A_2 + b(1 + A_3^2) = \tilde{\partial}_1 A_2 - \tilde{\partial}_2 A_1 + aA_1$$
$$+ bA_2 + LA_3 + x^3\varkappa = o.$$

Условие (7) почти контактности нормального оснащения при $n=2$ имеет вид

(18)
$$A_2 = A_1 A_3.$$

Учитывая его, из (17) получим выражения

(19)
$$\begin{aligned}
&\tilde{\partial}_1 A_2 = A_3\tilde{\partial}_1 A_1 + A_1\tilde{\partial}_1 A_3,\\
&\tilde{\partial}_2 A_1 = A_3\tilde{\partial}_1 A_1 + A_1\tilde{\partial}_1 A_3 + aA_1(1 + A_3^2) + \varkappa(x^3 + fA_3),\\
&\tilde{\partial}_3 A_2 = A_3\tilde{\partial}_1 A_3 + A_1\tilde{\partial}_3 A_3 + aA_3(1 + A_3^2),\\
&\tilde{\partial}_2 A_3 = A_3\tilde{\partial}_1 A_3 + A_1\tilde{\partial}_3 A_3 + aA_3(1 + A_3^2) - b(1 + A_3^2).
\end{aligned}$$

Дальнейшая наша цель — определить критерии нормальности, интегрируемости, параконтактности и т. д. $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$-структуры (8), которая при $n=2$ имеет вид

(20)
$$(\varphi_p^r) = \begin{pmatrix} -A_2/(1 + A_3^2) & A_1/(1 + A_3^2) & 1/(1 + A_3^2) \\ A_1(1 - A_2^2)/K^2 & A_2(2 + A_1^2 + A_3^2)/K^2 & A_3(1 - A_2^2)/K^2 \\ 1/(1 + A_1^2) & A_3/(1 + A_1^2) & -A_2/(1 + A_1^2) \end{pmatrix},$$
$$\xi^r = (A_3,\ -1,\ A_1)/K, \quad \eta_p = [A_3(1 + A_1^2),\ \ A_2^2 - 1,\ A_1(1 + A_3^2)]/(-K),$$
$$g_{pr} = \delta_{pr} + A_p A_r, \quad p,\ q,\ \ldots = 1,\ 2,\ 3, \quad K = ((1 + A_1^2)\ (1 + A_3^2))^{1/2}.$$

Подставляя (15) и (20) в равенство $\tilde{\nabla}_p\eta_q-\tilde{\nabla}_q\eta_p=\tilde{\partial}_p\eta_q-\tilde{\partial}_q\eta_p+\tilde{b}^r_{pq}\eta_r$, учитывая (17) – (19), получим

$$\tilde{\nabla}_1\eta_3-\tilde{\nabla}_3\eta_1=M/K^3, \tag{21}$$

$$\tilde{\nabla}_1\eta_2-\tilde{\nabla}_2\eta_1=A_1M/K^3+A_1\varkappa(x^3A_3-f)/K,$$

$$\tilde{\nabla}_2\eta_3-\tilde{\nabla}_3\eta_2=A_3M/K^3-\varkappa(1+A_3^2)^2(x^3+fA_3)/K^3,$$

где $M=(1+A_1^2)^2\tilde{\partial}_3A_3-(1+A_3^2)^2\tilde{\partial}_1A_1$.
Условия $x^3A_3-f=0$, $x^3+fA_3=0$ не совместимы, как и условия $M=0, A_1=0, x^3+fA_3=0$. Отсюда следует критерий замкнутости 1-формы η (20):

$$\mathscr{M}=\varkappa=0. \tag{22}$$

1-форма называется контактной, если она имеет максимальный ранг. Ранг 1-формы не зависит от ненулевого множителя. Условие контактности 1-формы η имеет вид $\theta\wedge d\theta\neq 0$, где $\theta=-K\eta$. Отсюда и из (17)—(20) следует необходимое и достаточное условие контактности 1-формы η (20):

$$\mathscr{M}\neq\varkappa(1+A_3^2)\,[x^3A_3(1-A_1^2)+f(A_1^2+A_3^2)]. \tag{23}$$

Подставляя (15) и (20) в (9), учитывая (17)—(19), после некоторого счета получим

$$N^r_{pq}=\lambda^r_{pq}M+\mu^r_{pq}\varkappa, \tag{24}$$

где λ^r_{pq}, μ^r_{pq} выражаются через A_1, A_2, A_3, x^3, f. Например, $\lambda^1_{13}=A_3(A_1^2-2)/K^4$, $\lambda^3_{13}=-A_1\lambda^2_{12}=A_1^2(A_3^2-2)/K^4$, $\mu^1_{13}=(1+A_3^2)\,[x^3(A_2^2+A_3^2-2A_1^2)+fA_3(1-2A_1^2+A_2^2-2A_3^2)/K^4$, $\mu^3_{13}=-A_1\mu^2_{12}=A_1(1+A_3^2)\,[x^3A_3(A_1^2-1)+f(1+2A_2^2-A_3^2-A_3^4+A_1^2)]/K^4$. Очевидно, что (22) условия являются достаточными для интегрируемости (φ, ξ, η, g)-структуры (20). Они являются также и необходимыми. Допуская противное, из равенства нулю всех определителей, составленных из λ^r_{pq} и μ^r_{pq}, получаем противоречие.

Из (10), (20), (21) и (24) находим $S^r_{pq}=\alpha^r_{pq}M+\beta^r_{pq}\varkappa$, где $\beta^r_{13}=\mu^r_{13}$, $\alpha^2_{13}=-(A_1^2+A_3^2)/K^4$, $\alpha^1_{12}=-2A_2/K^4$, $\alpha^1_{13}=A_3(A_1^2-1)/K^4$, $\alpha^3_{13}=A_1(A_3^2-1)/K^4$, $\beta^1_{12}=A_1(1+A_3^2)\,[2x^3(1+A_2^2+A_3^2)+fA_3(3+3A_3^2+2A_2^2)]/K^4$ и т. д.

Аналогично можно доказать, что (22) являются необходимыми и достаточными условиями для нормальности (φ, ξ, η, g)-структуры (20). Отсюда следует предложение, показывающее связь между различными свойствами (φ, ξ, η, g)-структуры, зависимость этих свойств от характера базисного многообразия и от строения гиперповерхности.

Предложение 1. На гиперповерхности $\mathscr{M}_3\subset\mathscr{T}(\mathscr{V}_2)$ (13), для которой нормальное оснащение является почти контактным (18), (φ, ξ, η, g)-структура гиперболического типа II рода (20) удовлетворяет одному из эквивалентных условий:

1) структура является интегрируемой;
2) нормальной;
3) 1-форма η является замкнутой

тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}_2$ является локально евклидовым многообразием и величины A_1, A_3, определяющие гиперповерхность, удовлетворяют дифференциальному уравнению в пфаффовых производных

$$\tilde{\partial}_1A_1/(1+A_1^2)^2=\tilde{\partial}_3A_3/(1+A_3^2)^2. \tag{25}$$

Рассмотрим параконтактные метрические структуры (20), (11). В силу (20)

$$(26)\qquad (\varphi_{pq})=\begin{pmatrix} 0 & A_1 & 1\\ A_1 & 2A_2 & A_3\\ 1 & A_3 & 0\end{pmatrix},$$

где $\varphi_{pq}=\varphi^r_p g_{rq}$. Найдем коэффициенты римановой связности, определяемой метрикой g_{sr} (20), по формуле

$$\widetilde{\Gamma}^r_{pq}=g^{rs}(\widetilde{\partial}_p g_{sq}+\widetilde{\partial}_q g_{sp}-\widetilde{\partial}_s g_{pq})/2+(\widetilde{b}^r_{pq}+g_{ps}g^{rt}\widetilde{b}^s_{qt}+g_{qs}g^{rt}\widetilde{b}^s_{pt})/2.$$

Например, $\widetilde{\Gamma}^s_{33}=A_3\widetilde{\partial}_3 A_3/K^2$, $\widetilde{\Gamma}^1_{11}=(A^3_1 A_3\varkappa+A_1\widetilde{\partial}_1 A_1)/K^2$, $\widetilde{\Gamma}^2_{11}=a+[-A_1x^3\varkappa(1+A^2_1+A^2_3)+A_2\widetilde{\partial}_1 A_1]/K^2$, $\widetilde{\Gamma}^3_{11}=(A^2_2 x^3\varkappa+A_3\widetilde{\partial}_1 A_1)/K^2$, отсюда $\widetilde{\nabla}_3\eta_3=-\widetilde{\partial}_3 A_1(1+A^2_3)/K^3$, $\widetilde{\nabla}_1\eta_1=[A_1\varkappa x^3K^2-(1+A^2_1)^2\widetilde{\partial}_3 A_1]/K^3$, если учесть (17)—(19).

Так как $\varphi_{11}=\varphi_{33}=0$, то условие (11) необходимо влечет $\widetilde{\partial}_3 A_1=0$, $A_1\varkappa=0$.

Учитывая это условие и (17)—(19), легко найти остальные $\widetilde{\Gamma}^r_{pq}$ и $\widetilde{\nabla}_p\eta_q$. Подставляя их и (26) в (11), получим необходимые и достаточные условия параконтактности метрической структуры (20) на гиперповерхности $\mathcal{M}_3\subset\mathcal{T}(\mathcal{V}_2)$, определенной (13), (18):

$$(27)\qquad \widetilde{\partial}_3 A_1=0,\quad A_1\varkappa=0,\quad \varkappa(x^3+fA_3)=0,$$

$$(1+A^2_1)^2\widetilde{\partial}_3 A_3+(1+A^2_3)^2\widetilde{\partial}_1 A_1=\varkappa(1+A^2_3)\,(A_3x^3-f)-2\alpha K^3,\ \alpha=\mathrm{const}\neq 0.$$

Среди них отыщем нормальные параконтактные метрические структуры (своеобразный аналог сасакиевой структуры). В силу первого предложения это будут специальные параконтактные структуры (12). (22) и (27) условия эквивалентны системе

$$(28)\qquad \varkappa=0,\ \ \widetilde{\partial}_3 A_1=0,\ \ \widetilde{\partial}_1 A_1/(1+A^2_1)^2=\widetilde{\partial}_3 A_3/(1+A^2_3)^2=-\alpha/K,\ \alpha=\mathrm{const}\neq 0,$$

которая является необходимым и достаточным условием нормальности и параконтактности метрической структуры (20) на гиперповерхности (13), (18).

Из (27) при $\alpha=0$ следуют необходимые и достаточные условия, чтобы ξ был вектором Киллинга в метрике g (20)

$$(29)\qquad A_1\varkappa=0,\quad \widetilde{\partial}_3 A_1=0,\quad \varkappa(x^3+f\partial_3 f)=0,$$

$$\widetilde{\partial}_3 A_3(1+A^2_1)^2+\widetilde{\partial}_1 A_1(1+A^2_3)^2=\varkappa(1+A^2_3)\,(A_3x^3-f).$$

Аналогично из (28) следуют необходимые и достаточные условия равенства $\widetilde{\nabla}_p\eta_q=0$

$$(30)\qquad \varkappa=\widetilde{\partial}_3 A_1=\widetilde{\partial}_1 A_1=\widetilde{\partial}_3 A_3=0.$$

Геометрический смысл гиперповерхности (13) — поле кривых (индикатрис) в $\mathcal{V}_2$. Уравнение индикатрисы J_0 в точке $\mathcal{M}_0(x^1_0, x^2_0)$ по отношению к ортореперу $(\mathcal{M}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ имеет вид $x^4=f(x^1_0, x^2_0, x^3)$, где x^3, x^4 — координаты произвольной точки индикатрисы. Свойства соответствующего гиперповерхности поля индикатрис во многом зависят от свойств рассматриваемого поля ортореперов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Рассмотрим поле „одинаковых" индикатрис, соответствующее гиперповерхности $x^4=f(x^3)$. Для такой гиперповерхности $\mathcal{M}_3\subset\mathcal{T}(\mathcal{V}_2)$ $\partial^0_1 f=0$, $A_1=a\,(x^3+fA_3)$, $A_2=b(x^3+fA_3)$, $A_3=df/dx^3=f'$, поэтому условие (18) почти контактности нормального оснащения равносильно уравнению $(x^3+ff')\,(b-af')=0$.

Предложение 2. На гиперповерхности, определяемой полем „одинаковых" индикартис, нормальное оснащение является почти контактным тогда и только тогда, когда либо $\mathscr{V}_2$ является евклидовой плоскостью с декартовой системой координат ($a=b=0$), либо индикатрисы — окружности постоянного радиуса ($x^3+ff'=0$), либо индикатрисы — прямые ($f''=0,\ f=cx^3+d,\ b=ac,\ c,\ d$ — постоянные).

Рассмотрим третий случай, т. е. пусть $f=cx^3+d$, $c, d=\mathrm{const}$, $b=ac$, $a^2+b^2\neq 0$. Для такой гиперповерхности $A_1=a(x^3+cf)$, $A_2=b(x^3+cf)$, $A_3=c$, $\tilde{\partial}_1A_1=(1+c^2)(x^3\partial_1^0 a+a^2f)+cd\partial_1^0 a$. Подставляя эти выражения в (22), имеем $\partial_1^0 a+a^2c=0$, $\varkappa=0$, $d=0$. Эти условия являются и достаточными для выполнения (22).

Предложение 3. Пусть $\mathscr{M}_3\subset\mathscr{T}(\mathscr{V}_2)$ определяется полем „одинаковых" прямолинейных индикатрис ($x^4=cx^3+d$, $c, d=\mathrm{const}$) по отношению к полю $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, для которого $b=ac$, $a^2+b^2\neq 0$. На $\mathscr{M}_3$ (φ, ξ, η, g) — структура (20) является нормальной (следовательно, интегрируемой) тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}_2$ является локально евклидовым многообразием ($\varkappa=0$), геодезическая кривизна a линий, касающихся $\{\mathbf{e}_1\}$, удовлетворяет уравнению в пфаффовых производных $\partial_1^0 a+a^2c=0$, а гиперповерхности соответствующие индикатрисы в каждой точке, определяются однопараметрическим семейством векторов, колинеарных $\mathbf{e}_1+c\,\mathbf{e}^2$ ($x^4=cx^3$).

В качестве примера возьмем евклидову плоскость с полярной системой координат x^1, x^2, где x^1 — полярный угол, x^2 — полярный радиус. Тогда $b=x=\partial_1^0 a=0$, $a=-1/x^2$, и поле (M_0, J_0) прямолинейных индикатрис, касающихся окружностей $x^2=x_0^2$ в точке $M_0(x_0^1, x_0^2)$, определяет гиперповерхность $x^4=0$ с нормальной (следовательно, интегрируемой) (φ, ξ, η, g) структурой (20).

Пусть известны свойства базисного многообразия $\mathscr{V}_2$. Будем искать зависимость между свойствами (φ, ξ, η, g)-структуры на $\mathscr{M}_3\subset\mathscr{T}(\mathscr{V}_2)$ и свойствами соответствующего гиперповерхности $\mathscr{M}_3$ поля индикатрис в $\mathscr{V}_2$. Так как многие критерии интересных свойств (φ, ξ, η, g)-структуры (20) влекут условие $\varkappa=0$, рассмотрим случай, когда $\mathscr{V}_2$ является евклидовой плоскостью $\mathscr{E}_2$ с декартовой системой координат $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. В этом случае $a=b=\varkappa=0$, $\tilde{\partial}_p z(x^q)=\partial_p z$, $A_p=\partial f/\partial x^p=f_p$, $\tilde{\partial}_p A_q=\partial^2 f/\partial x^p\partial x^q=f_{pq}$, $\mathscr{T}(\mathscr{E}_2)$ является 4-мерным евклидовым пространством с декартовыми координатами x^1, x^2, x^3, x^4. Из (23) и (25) следует

Предложение 4. (φ, ξ, η, g)-структура (20) на гиперповерхности (13), (18) касательного расслоения $\mathscr{T}(\mathscr{E}_2)$ евклидовой плоскости $\mathscr{E}_2$ обладает одним из эквивалентных условий: 1) структура нормальная; 2) интегрируемая; 3) неконтактная, 4) 1-форма η является замкнутой тогда и только тогда, когда функция $f(x^1, x^2, x^3)$ (13) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f_{11}/(1+f_1^2)^2=f_{33}/(1+f_3^2)^2 \quad (f_2=f_1f_3).$$

Среди гиперповерхностей, определенных полем прямолинейных индикатрис ($f_{33}=0$), этим условиям удовлетворяют изотропные гиперплоскости $x^4=kx^3+klx^2+lx^1+m$, $k, l, m=\mathrm{const}$, и произвольный изотропный конус $(x^1-a)(x^3-c)+(x^2-b)(x^4-d)=0$, $a, b, c, d=\mathrm{const}$, по отношению к метрике $\mathscr{F}_{\alpha\beta}=\mathscr{F}_\alpha^\gamma\mathscr{G}_{\gamma\beta}$.

Из (27) следуют необходимые и достаточные условия параконтактности метрической структуры (20) на гиперповерхности $\mathscr{M}_3\subset\mathscr{T}(\varepsilon_2)$

$$f_{11}(1+f_3^2)^2+f_{33}(1+f_1^2)^2=-2\alpha K^3,$$

$$f_{13}=0,\quad \alpha=\mathrm{const}\neq 0,\quad K=\sqrt{(1+f_3^2)(1+f_1^2)}.$$

Например, параконтактной метрической структурой обладают гиперповерхности $x^4=cx^1+d+\sqrt{(1+c^2)/4\alpha^2-(x^3+cx^2+e)^2}$ и $x^4=cx^3+d+\sqrt{(1+c^2)/4\alpha^2-(x^1+cx^2+e)^2}$, c, d, $e=\mathrm{const}$.

Геометрический смысл в $\mathscr{E}_2$ первой гиперповерхности — поле $(\mathscr{M}, J)$ круговых индикатрис постоянного радиуса $R=\sqrt{1+c^2}/2\alpha$ с центрами $C(-cx^2-e, cx^1+d)(\mathscr{M}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$; вторая гиперповерхность определяется полем параллельных прямолинейных индикатрис.

Пусть $\varkappa\neq 0$, тогда из (27) следует, что $A_1=0$, $x^3+f\partial_3 f=0$, т. е. $x^4=\sqrt{R^2-(x^3)^2}$, $R=\mathrm{const}\neq 0$. Подставляя эти выражения в $(27)_4$, находим $\alpha=(1-\varkappa R^2)/2R$.

Предложение 5. На гиперповерхности (13), (18) касательного расслоения риманова не локально евклидова многообразия $\mathscr{V}_2(\varphi, \xi, \eta, g)$-структура (20) является параконтактной метрической тогда и только тогда, когда гиперповерхность определяется полем $(\mathscr{M}, J)$ круговых индикатрис постоянного радиуса R с центрами в точках $\mathscr{M}$, и гауссова кривизна многообразия $\mathscr{V}_2$ $\varkappa=\mathrm{const}\neq 1/R^2$, причем $\alpha=(1-\varkappa R^2)/2R$.

Аналогично из (29) следует

Предложение 6. На гиперповерхности (13), (18) касательного расслоения не локально евклидова риманова многообразия $\mathscr{V}_2$ вектор ξ (20) является вектором Киллинга тогда и только тогда, когда гиперповерхность определяется полем $(\mathscr{M}, J)$ круговых индикатрис постоянного радиуса R с центрами в точках $\mathscr{M}$, и гауссова кривизна $\varkappa=1/R^2=\mathrm{const}>0$.

Наконец, рассмотрим гиперповерхность $\mathscr{M}_3\subset\mathscr{T}(\mathscr{V}_2)$, определенную полем прямолинейных индикатрис. Присоединим к полю индикатрис поле ортореперов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, направив орт $\mathbf{e}_2$ перпендикулярно к индикатрисе. Не нарушая общности, можем считать, что рассматриваемая гиперповерхность задается уравнением

$$x^4=D(x^1, x^2). \tag{31}$$

Используя формулы (14), (16), имеем

$$A_1=ax^3+\partial_1^0 D,\ A_2=bx^3+\partial_2^0 D,\ A_3=\widetilde{\partial}_3 A_3=0,\ \widetilde{\partial}_1 A_1=x^3\partial_1^0 a+a^2 D+\partial_{11}^0 D. \tag{32}$$

Условие (18) почти контактности нормального оснащения гиперповерхности (31 имеет вид

$$b=0,\ \partial_2^0 D=0. \tag{33}$$

Подставляя (32) в (29), учитывая (33), получаем систему

$$a=b=\varkappa=\partial_2 D=\partial_{11} D=0.$$

Эту же систему получим из (30), (32) и (33). Отсюда следует

Предложение 7. Для гиперповерхности $\mathscr{M}_3\subset\mathscr{F}(\mathscr{V}_2)$ (31), (33) (φ, ξ, η, g)-структура (20) удовлетворяет одному из эквивалентных свойств: 1) ξ является вектором Киллинга; 2) η-ковариантно постоянен тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}_2$ является евклидовой плоскостью, а $\mathscr{M}_3$ является гиперплоскостью в $\mathscr{T}(\mathscr{E}_2)$.

Можно рассмотреть гиперповерхности $\mathscr{M}_3\subset\mathscr{T}(\mathscr{V}_2)$, определяемые полем круговых индикатрис произвольного радиуса R, выяснить зависимость свойств (φ, ξ, η, g)-структуры на такой гиперповерхности от R и от свойств $\mathscr{V}_2$.

Все вышепредставленные рассуждения можно провести и для (φ, ξ, η, g)-структур эллиптического типа II рода, определяемых аксиомами (1), (2) при $\omega=-1$, $\rho=1$. Эти структуры возникают на гиперповерхностях касательного расслоения $\mathscr{T}(\mathscr{V}_n)$, снабженного почти комплексной структурой Домбровского и метрикой нулевой сигнатуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Башкене. Вопросы теории гиперповерхностей касательного расслоения риманова многообразия. *Лит. мам. сб.*, **22**, 1982, № **1**, 25—39.
2. А. Л. Башкене. Почти контактные структуры на гиперповерхностях касательного расслоения риманова многообразия. *Лит. мат. сб.*, **24**, 1984, № 2, 30—48.
3. В. Ф. Кириченко. О геометрии приближенно сасакиевых многообразий. *Доклады АН СССР*, **269**, 1983, 24—29.
4. А. Л. Крищюнайте. Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства. Уч. зап. Казанского у-та, **128**, 1968, № 3, 55—75.
5. А. П. Широков. Структуры на дифференцируемых многообразиях. — В: Алгебра. Топология. Геометрия. М., 1969, 127—189.
6. S. Sasaki. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I. *Tohoku Math. J.*, **16**, 1964, 270—284.
7. I. Sato. On a structure similar to the almost contact structure. *Tensor*, **30**. 1976, 219—224.
8. B. Sinha, R. Sharma. Hypersurfaces in an almost paracontact manifolds. *Indian J. Pure and Appl. Math.*, **9**, 1978, 1083—1010.

Шяуляйский государственный педагогический институт им. К. Прейкшаса

Шяуляй, Литовская ССР, 235419
Витауто 84

Поступила 7. 4 1986