Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

CLASSIFICATION INTEGRALE DES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES ENTRE DEUX PLANS

LANDO DEGOLI

By means of the introduction of the auxiliary correspondence, the elements for complete classification of point transformations between two planes are given. Geometrical characterisation and construction is given for some of the types of transformations considered.

1. Le problème de classifier les transformations ponctuelles parmi les plans jusqu'à l'entour du troisième ordre a été affronté par divers auteurs: Villa, Speranza, Muracchini, qui ont acquis des résultats partiels. Dans cet article l'ancien problème est résolu complètement au moyen des correspondances auxiliaries et en introduisant le concept de droite primaire.

Comme il est connu, deux transformations ponctuelles entre deux plans, qui s'approchent jusqu'à l'entour d'ordre $h(h>0)$ d'une couple régulière de points correspondants $(A, \bar{A})$, subordonnent parmi les faisceaux de droites, qui sortent de $(A, \bar{A})$ la même projectivité pas dégénérée.

Si r' est la droite correspondante dans cette projectivité à la droite $\bar{r}$, on peut considérer la correspondance qui associe la droite $\bar{r}$ à la droite $\bar{r}'$.

Celle-ci sera nommée: correspondance auxiliaire.

Avant tout on peut diviser les transformations ponctuelles en trois grandes catégories selon le comportement des trois directions caractéristiques.

Nous aurons ainsi des transformations avec:

1) trois directions caractéristiques distinctes,
2) deux directions caractéristiques distinctes,
3) trois directions caractéristiques coïncidentes.

2. Si la transformation ponctuelle Γ entre deux plans α et $\bar{\alpha}$ a trois directions caractéristiques distinctes, qui sortent par la couple $(A, \bar{A})$, on peut la représenter (voir: [1]) avec les équations:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - xy + m_{30}x^3 + 3m_{21}x^2y + 3m_{12}xy^2 + m_{03}y^3 + \dots, \\ \bar{y} &= y - xy + n_{30}x^3 + 3n_{21}x^2y + 3n_{12}xy^2 + n_{03}y^3 + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Elle admet (voir: [1]) ∞^2 les transformations quadratiques osculatrices:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\psi x^2 + (\eta+1)xy - x}{(\psi+1)(\eta+1)xy - (\psi x - 1)(\eta y - 1)}, \\ \bar{y} &= \frac{(\psi+1)xy + \eta y^2 - y}{(\psi+1)(\eta+1)xy - (\psi x - 1)(\eta y - 1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

En introduisant les coordonnées homogènes de droite (λ, μ) et $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ des faisceaux qui sortent par $(A, \bar{A})$, on obtient les correspondances auxiliaires relatives aux transformations précédentes:

$$\bar{\lambda}=m_{30}\lambda^3+(3m_{21}-1)\lambda^2\mu+3m_{12}\lambda\mu^2+m_{03}\mu^3-\eta\lambda\mu(\lambda-\mu),$$
(3)
$$\bar{\mu}=n_{30}\lambda^3+3n_{21}\lambda^2\mu+(3n_{12}-1)\lambda\mu^2+n_{03}\mu^3+\psi\lambda\mu(\lambda-\mu).$$

Si une courbe ρ de α est transformée par (1) et par (2) respectivement dans les courbes ρ' et ρ'', ces dernières courbes ont en général un contact de second ordre, qui devient de troisième ordre seulement si ρ est tangente à une droite hyperosculatrice de la transformation (2).

S'il arrive que deux courbes de $\bar{\alpha}$ qui correspondent à une courbe da α à cause de (1) et de (2) ont un contact de troisième ordre, la relative droite d'hyperosculation sera nommée: d r o i t e p r i m a i r e.

Si la correspondance auxiliaire (3) a les marques (1, 2) plutôt que (1, 3), les deux seconds membres des équations (3) ont évidemment un facteur linéaire en commun, qui répresente une droite primaire.

Vice versa, si une transformation quadratique osculatrice possède une droite primaire par A, la relative transformation auxiliaire a les marques (1, 2).

En outre, si une droite d'hyperosculation résulte aussi une droite caractéristique pour une transformation quadratique osculatrice (2), elle est aussi telle pour toutes les autres et la courbe caractéristique de la transformation tangente à telle droite a dans le point de tangence un point d'inflexion.

Si toutes les transformations quadratiques osculatrices possèdent une droite primaire, celle-ci devra résulter une droite fixe coïncidente avec une des droites caractéristiques; parce que dans (3) il existe un facteur linéaire commun pour toutes les valeurs de ψ et de η, c'est-à-dire un facteur de $\lambda\mu(\lambda-\mu)$.

Lorsqu'il s'agit d'un tel résultat, la cerrespondance auxiliaire (3) est de marques (1, 2).

En imposant à une droite donnée r d'être primaire, bien qu'elle ne soit pas une droite caractéristique, alors la transformation quadratique osculatrice (2) résulte unique. En outre, les transformations quadratiques osculatrices qui individualisent deux droites primaires sont en nombre fini. Au contraire, il n'existe pas une seule transformation auxiliaire qui possède trois droites primaires.

Pour qu'une correspondance auxiliaire résulte dégénérée, il faut qu'il soit:

$$m_{30}(3n_{21}+3n_{12}+1)-3n_{30}(3m_{21}+3m_{12}-1)=0, \quad m_{30}n_{03}-m_{03}n_{30}=0.$$

Ce fait montre qu'il existe seulement ∞^1 des correspondances auxiliaires dégénérées, pourvu que m_{ij}, n_{ij} $(i+j=0, 1, 2)$ ne soient pas tous nuls, autrement dit, toutes les correspondances auxiliaires sont dégénérées.

Maintenant, nous pouvons distinguer les cas suivants, où la correspondance auxiliaire est: a) dégénérée, b) projective, c) de marques (1, 2), d) de marques (1, 3).

Puisque le premier cas résulte un cas particulier du second, nous examinons avant tout ce dernier.

Démontrons que:

Si la correspondance auxiliaire est projective, on peut obtenir la transformation ponctuelle Γ en projetant par deux points correspondants P et $\bar{P}$ les points d'une quadrique de S_3, sur deux plans biais α et $\bar{\alpha}$ de S_5, en considérant correspondants dans Γ deux points déterminés par le même point de la quadrique.

En effet, soient deux plans biais α et $\bar{\alpha}$ de S_3 et les points du premier soient transformés dans ceux de l'autre par une transformation ponctuelle Γ, dont la correspondance auxiliaire est projective.

Les droites qui joignent deux points correspondants sont ∞^2 et constituent une variété réglée à trois dimensions de S_5, que nous noterons: V_3.

Choisissons une surface V_2, qui résulte directrice pour le système d'∞^2 droites, qui constituent V_3 (voir: [6]). Il s'ensuit qu'on obtient les points correspondants de Γ en projetant V_2 des α sur $\bar{\alpha}$ et vice versa.

En joignant les points de α et $\bar{\alpha}$, qui appartiennent à deux droites correspondantes par rapport à Γ, on obtient deux systèmes ∞^1 de quadriques de S_3, tous contenus dans V_3.

Par chaque droite de V_3, joignante des points de α et $\bar{\alpha}$ passent deux quadriques de ces systèmes. Il s'ensuit que V_3 contient trois systèmes ∞^2 de droites K_1, K_2, K_3.

Par chaque point de V_3 sortent donc trois droites de la même variété, qui toutefois ne peut pas être lieu de plans, autrement dit, si chaque plan était directeur pour le système K_1, nous pourrions obtenir la transformation Γ, en projetant les points d'un plan et pour cela Γ serait une banale homographie.

Donc V_3 est certainement algébrique parce qu'elle contient deux systèmes ∞^1 de quadriques obtenus au moyen des droites des systèmes K_1, K_2 et K_1, K_3, dans lesquels les quadriques, par exemple du premier système, sont directrices pour K_3 et vice versa (voir: [4]).

Mais si on obtient Γ en projetant une quadrique de S_3 par deux plans biais de S_5, il est évident qu'on obtient Γ en projetant aussi la quadrique par deux points d'untersection de α et de $\bar{\alpha}$ avec l'S_3, qui contient la quadrique.

Donc l'énoncé est démontré.

Pour cela la transformation Γ dans le cas b) est du type obtenu avec la précédente construction. Le cas a), étant un cas particulier du précédent, est aisément interprétable.

Ici les transformations, qu'on obtient en projetant une quadrique par deux plans biais, possèdent trois systèmes ∞^1 de couples de droites projectives seulement si les centres de projection se trouvent sur la quadrique.

Il s'ensuit que la transformation Γ ne peut résulter qu'une transformation birationnelle quadrique.

En passant au cas c) nous pourrons démontrer que:

Les transformations ponctuelles Γ, *qui admettent une correspondance auxiliaire de marques* (1, 2) *dépendent d'un système de* ∞^1 *droites de* α *e d'un analogue système de* $\bar{\alpha}$.

En effet, pour obtenir Γ il faut éliminer le paramètre t entre les équations suivantes:

$$
\begin{aligned}
&a(t)x\bar{y}+b(t)x+c(t)\bar{x}+d(t)=0,\\
&y=\Omega_1(t)\bar{x}+\Omega_2(t),\quad \bar{y}=tx+\Omega_3(t).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

C'est-à-dire Γ dépend de 6 fonctions arbitraires d'une variable t.

Les équations (4) sont obtenues en choisissant arbitrairement un système ∞^1 droites sur α et un analogue système sur $\bar{\alpha}$ et en établissant une correspondance générique entre les deux systèmes de droites et une correspondance projective quelconque sur chaque couple de droites correspondantes.

Le cas d) est le plus générique et on peut le subdiviser en quatre types divers, en considérant la particulière transformation quadratique osculatrice, dans laquelle deux de ses quatre droites d'hyperosculation constituent la couple Hessienne parmi les trois droites caractéristiques (voir: [2]).

On obtient cette transformation quadratique pour:

$$
\psi=n_{03}-n_{30}+3n_{12}-3m_{12}-3m_{21},\quad \eta=m_{30}-m_{03}+3m_{21}-3n_{12}-3n_{21}.
\tag{5}
$$

Notons φ sa relative correspondance auxiliaire.

On obtient ainsi les quatre cas suivants:

1) φ est dégénérée. Dans tel cas on obtient trois relations pour Γ.

2) φ est projective. Il en résulte deux relations pour Γ.

3) φ est de marques (1, 2). Il s'ensuit que la transformation Γ dépend d'une fonction arbitraire à deux variables.

4) φ est de marques (1, 3). Alors la générique transformation quadratique osculatrice a les mêmes marques et cela prouve que nous sommes en présense d'un cas plus général.

3. Considérons maintenant la transformation ponctuelle Γ dans laquelle deux des trois directions caractéristiques coïncident. Avec un opportun répère (voir: [1]) elle résulte:

$$\bar{x}=x-xy-\frac{1}{6}[m_{30}x^3+3m_{31}x^2y+3(m_{12}-1)xy^2+m_{03}y^3]+\ldots,$$

$$\bar{y}=y-\frac{1}{6}[3n_{12}xy^2+n_{03}y^3]+\ldots$$

La direction caractéristique double a l'équation: $y=0$.

Si A, B, C sont les sommets du triangle fondamental dans le plan α, au varier de la droite BC; le coefficient n_{02} est constant, tandis que les autres changent dans la suivante manière:

$$\Delta m_{30}=2m_{30}(e_{11}-e_{00}),\quad \Delta m_{21}=m_{01}(e_{11}-e_{00}),\quad \Delta m_{12}=-2e_{20},$$

$$\Delta m_{03}=m_{03}(e_{00}-e_{11}),\quad \Delta n_{12}=n_{12}(e_{11}-e_{00})+2e_{10}$$

où Δ est le symbole de différenciation par rapport aux paramètres secondaires.

Il s'ensuit que les trois invariants de l'entour du second ordre sont: m_{30}/m_{21}^2 $m_{21}m_{03}$, n_{03}. Pour que les courbes caractéristiques doubles soient droites, il faut et il suffit qu'il soit: $m_{30}=0$ $(m_{03}=0)$.

Pour cela les ∞^2 transformations quadratiques osculatrices de Γ sont données par

$$\bar{x}=\frac{\psi x^2+(\eta-1)xy+x}{\psi xy+\psi x-\eta y+1},\quad \bar{y}=\frac{\psi xy+\eta y^2+y}{\psi xy+\psi x+\eta y+1},\quad (\psi,\ \eta\mp\infty). \tag{6}$$

Les relatives correspondances auxiliaires résultent:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}&=m_{30}\lambda^3+3m_{21}\lambda^2\mu=3(m_{12}-1+2\eta)\lambda\mu^2+m_{03}\mu^3,\\ \bar{\mu}&=3(n_{12}-2\psi)\lambda\mu^2+n_{02}\mu^3,\end{aligned} \tag{7}$$

où λ, μ sont les coordonnées de droite du faisceau A.

On peut simplifier ces équations en écrivant: $\bar{\psi}=n_{12}-2\psi$, $\bar{\eta}=m_{12}-1+2\eta$ et on obtient:

$$\bar{\lambda}=m_{30}\lambda^3+3m_{21}\lambda^2\mu+3\bar{\eta}\lambda\mu^2+m_{03}\mu^3,\quad \mu=3\bar{\psi}\lambda\mu^2+n_{03}\mu^3, \tag{8}$$

formules qui donnent toutes les correspondances auxiliaires.

Maintenant, il est facile de classifier les transformations ponctuelles Γ selon que la relative correspondance auxiliaire résulte: a$_1$) dégénérée, b$_1$) projective, c$_1$) de marques (1, 2), d$_1$) de marques (1, 3).

Dans le premier cas il en résulte tout de suite que Γ est une transformation quadratique de 2^e espèce.

Le second cas donne lieu à trois sous-types suivant la position des droites singulières.

Le troisième cas présente diverses alternatives, qu'on peut distinguer en considérant une particulière transformation quadratique osculatrice.

Si l'on observe qu'une direction d'hyperosculation de Γ et d'une quelconque transformation quadratique osculatrice tombe toujours sur la direction caractéristique double, les trois droites restantes satisfont à l'équation:

$$m_{30}\lambda^3+3(m_{21}-\overline{\psi})\lambda^2\mu+(3\overline{\eta}-n_{03})\lambda\mu^2+\mu^3=0.$$

Il existe donc une seule transformation quadratique osculatrice pour laquelle la couple des directions caractéristiques distinctes est la couple Hessienne.

On obtient cette transformation en écrivant: $\overline{\psi}=m_{21}$, $\overline{\eta}=\frac{1}{3}n_{03}$. Dans ce cas la correspondance auxiliaire résulte:

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned}\overline{\lambda}&=m_{30}\lambda^3+3m_{21}\lambda^2\mu+n_{03}\lambda\mu^2+n_{02}\mu^3,\\ \overline{\mu}&=3m_{21}\lambda\mu^2+n_{03}\mu^3.\end{aligned}$$

On peut déterminer trois cas:

1°) A une droite $(\overline{\lambda},\overline{\mu})$ il correspond un terne de droites, parmi lesquelles il doit toujours exister la droite caractéristique double $\lambda=0$.

La correspondance auxiliaire (9) résulte de marques (1, 2) et on obtient tout cela par $m_{30}=0$.

2°) La droite primaire est $\lambda=0$ et les équations (9) donnent une projectivité identique. On obtient tout cela par: $m_{30}=n_{03}=0$.

3°) La droite primaire est diverse par rapport à la droite caractéristique double et on obtient ce cas par: $m_{30}=n_{03}=0$. La correspondance auxiliaire (9) résulte de marques (1, 2).

Le quatrième cas donne lieu à deux sous-types selon que la correspondance auxiliaire est de marques (1, 2) ou bien de marques (1, 3).

4. Considérons maintenant le cas où trois droites caractéristiques sont coïncidentes. Les développements locaux, jusqu'aux termes de troisième degré, de la transformation Γ résultent:

$$\text{(10)}\qquad \begin{aligned}\overline{x}&=x-\frac{1}{6}(m_{30}x^3+3m_{21}x^2y)+\ \dots,\\ \overline{y}&=y-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}(n_{30}x^3+3n_{21}x^2y+6n_{12}xy^2)+\ \dots\end{aligned}$$

Les transformations quadratiques osculatrices sont représentées par les équations:

$$\text{(11)}\qquad \overline{x}=x-\frac{\psi}{2}x^2,\quad \overline{y}=y-\frac{1}{2}x^2+\frac{\eta}{4}x^3.$$

La correspondance auxiliaire relative aux deux transformations résulte:

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned}\overline{\lambda}&=(m_{30}-3\psi)\lambda^3+3m_{21}\lambda^2\mu,\\ \overline{\mu}&=\left(n_{30}-\frac{3}{2}\eta\right)\lambda^3+3n_{21}\lambda^2\mu+6m_{21}\lambda\mu^2.\end{aligned}$$

Dans ce cas la correspondance auxiliaire est au maximum de marque (1, 2), parce qu'une des trois droites correspondantes à une droite $(\overline{\lambda},\overline{\mu})$ résulte toujours la droite caractéristique $\lambda=0$.

On peut distinguer seulement trois cas. La correspondance auxiliaire peut résulter: a_2) dégénérée, b_2) projective, c_2) de marques (1, 2).

Dans le premier cas tous les coefficients m_{03}, m_{21}, n_{30}, n_{21}, n_{12} et les suivants résultent tous nuls et la transformation Γ se réduit à: $\bar{x}=x$, $\bar{y}=y-\frac{1}{2}x^2$, c'est-à-dire à une transformation quadratique de 3ᵉ espèce.

Dans le second cas on a: $m_{21}=0$ avec $n_{21}\neq 0$.

Puisque à m_{30} n_{30}, on peut assigner des valeurs arbitraires, nous pouvons écrire: $n_{21}=-3$, $m_{30}=3$, $n_{30}=0$. Pour cela la transformation Γ devient:

$$\bar{x}=x-\frac{3}{2}x^3+\ldots,\quad \bar{y}=y-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x^2y+\ldots$$

Dans le troisième cas, pour que la correspondance auxiliaire soit exactement de marques (1, 2) il devra être divers de zéro le résultant des deux polynômes:

$$(m_{30}-3\psi)\lambda^2+3m_{21}\lambda\mu,\quad (n_{30}+\frac{3}{2}\eta)\lambda^2+3n_{21}\lambda\mu+6m_{21}\mu^2,$$

c'est-à-dire:

$$6m_{21}(6m_{21}m_{30}^2-36m_{21}m_{30}\psi+54m_{21}m_{30}\psi^2+9m_{21}^2n_{30}+\frac{27}{2}m_{21}^2\eta-9m_{21}n_{21}m_{30}+27m_{21}n_{21}\psi)\neq 0.$$

Il s'ensuit que: *la condition nécessaire et suffisante pour que Γ soit du troisième type est qu'il soit;* $m_{21}\neq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Villa. Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi *Rend. Accad. Italia* (7) 8, 1942, 718-724-(7) 4, 1-7, 1943°.
2. M. Villa. Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari — Trasformazioni cremoniane osculatrici. *Rend. Accad. Naz. Lincei* (8) **4**, 1948, 295-303.
3. L. Degoli. Sulle transformazioni puntuali fra due spazi ordinari. *Bollett. Unione Matem. Italiana*, II, 1947.
4. M. Baldassarri. Le varietà pluririgate a tre dimensioni. *Rend. Sem. Matem. Univ. Padova*, **19**, 1950, 172-200.
5. M. Villa. Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali. *Compos. Math.*, **12**, 1954, 137.
6. G. Vaona. Varietà caratteristiche di una trasformazione e varietà quasi asintotiche. *Bollett. Unione Matem. Italiana* (3) **10**, 1956, 32-42.

Via Berengario n° 82/C
41012 CARPI (Modena)
Italy

Received 7. 4. 1986