Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ТЕОРИЯ РЕКУРСИИ В B-КОМБИНАТОРНЫХ АЛГЕБРАХ

Й. А. ЗАШЕВ

В работе доказываются основные результаты теории рекурсии в B-комбинаторных алгебрах: первая теорема о рекурсии, теорема о нормальной форме рекурсивных операторов, теорема о параметризации и теорема о представлении частично рекурсивных функций.

Понятие B-комбинаторной алгебры, являющееся обобщением понятия операторного пространства Л. Иванова [1, 2, 3], введено в [4]. В настоящей работе будут изложены следствия из основного результата [4], о которых шла речь в конце [4]. Обозначения и термины из [4] будут использоваться далее без специальных ссылок.

1. Пусть $\mathscr{F}$ — множество, в котором дана (вообще говоря, неассоциативная) операция умножения, и $\mathscr{C}$ — совокупность операций в $\mathscr{F}$ различного числа аргументов (в $\mathscr{C}$ могут входить и элементы $\mathscr{F}$, рассматриваемые здесь и далее как нульместные операции). Тогда операцию $\Gamma:\mathscr{F}^n\to\mathscr{F}$ будем называть $\mathscr{C}$-*выразимой*, если существует терм t, составленный из переменных $x_0,\ldots,x_{n-1}$ для элементов $\mathscr{F}$ и символов для операций из $\mathscr{C}$ и умножения так, чтобы для любых $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ из $\mathscr{F}$ $\Gamma(\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1})$ — значение терма t, соответствующее значениям $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ переменных $x_0,\ldots,x_{n-1}$, соответственно.

Далее в этом параграфе $\mathscr{F}$ будет обозначать предассоциативную комбинаторную алгебру, в которой дано представление $n\to\bar{n}\in\mathscr{F}$ натуральных чисел n, такое. что $\overline{n+1}=S\bar{n}$ для любого n, где $S\in\mathscr{F}$. Это представление, как и елемент S, далее будут фиксированы.

Будем говорить, что операция $\mathsf{R}_0:\mathscr{F}^2\to\mathscr{F}$ — примитивно-рекурсивное разветвление, если для любых $\varphi,\psi\in\mathscr{F}$ и любого n имеют место

$$\mathsf{R}_0(\varphi,\ \psi)\bar{0}=\varphi \ \text{ и } \ \mathsf{R}_0(\varphi,\ \psi)\overline{n+1}=\psi\bar{n}.$$

Операция $\mathsf{R}_1:\mathscr{F}^2\to\mathscr{F}$ будет называться примитивно-рекурсивной итерацией, если для любых $\varphi,\psi\in\mathscr{F}$ и любого n имеют место

(1) $$\mathsf{R}_1(\varphi,\ \psi)\bar{0}=\varphi \ \text{ и } \ \mathsf{R}_1(\varphi,\ \psi)\overline{n+1}=\psi(\mathsf{R}_1(\varphi,\ \psi)\bar{n}).$$

До конца параграфа будем предполагать, что R_0 и R_1 — примитивно рекурсивное разветвление и итерация в $\mathscr{F}$, соответственно. Тогда введем в $\mathscr{F}$ одноместную операцию C, полагая $\mathsf{C}(\varphi)=\mathsf{R}_1(\bar{D}0\varphi,\ C(ADS))$. Для любых $\varphi\in\mathscr{F}$ и натурального числа n имеет место

(2) $$\mathsf{C}(\varphi)\bar{n}=D\bar{n}\varphi.$$

Это видно из индукции по n так: для $n=0$ (2) вытекает из (1), а из (1) и индукционного предположения — $\mathsf{C}(\varphi)\overline{n+1}=C(ADS)(\mathsf{C}(\varphi)\bar{n})=C(ADS)(D\bar{n}\varphi)=ADS\bar{n}\varphi=D(S\bar{n})\varphi=D\overline{n+1}\varphi$.

Отметим, что C аналогично операции трансляции Л. Иванова [1], а R_0 и R_1 — аналогичны, соответственно, операциям Π и примитивной рекурсии из [2]. Построим еще элемент $\partial \in \mathcal{F}$ со свойством для любого n

$$(3) \qquad \partial \bar{n} = D\bar{n}\,\bar{n}.$$

Для этого заметим, что $D(S\bar{n})(S\bar{n}) = ADS\bar{n}(S\bar{n}) = A(ADS\bar{n})S\bar{n} = C(AA(ADS))(D\bar{n}S)\bar{n} = C(AA(ADS))(\mathsf{C}(S)\bar{n})\bar{n} = C(A(C(AA(ADS)))\mathsf{C}(S))(D\bar{n}\bar{n}) = d(D\bar{n}\bar{n})$, где $d \gtrless C(A(C(AA(ADS)))\mathsf{C}(S))$, и положим $\partial \gtrless \mathsf{R}_\Delta(D\bar{0}\bar{0}, d)$. Тогда (3) видно индукцией по n: для $n=0$ (3) вытекает из (1), а, согласно (1), и индукционному предположению,

$$\partial\overline{n+1} = d(\partial\bar{n}) = d(D\bar{n}\,\bar{n}) = D(S\bar{n})(S\bar{n}) = D\overline{n+1}\,\overline{n+1}.$$

Пусть $f(x_0, \ldots, x_{n-1})$ — всюду определенная числовая функция n-аргументов. Будем говорить, что элемент $\varphi \in \mathcal{F}$ представляет f в $\mathcal{F}$, если для любых натуральных чисел $m_0, \ldots, m_{n-1}$ имеет место равенство

$$\varphi\bar{m}_0 \ldots \bar{m}_{n-1} = \overline{f(m_0, \ldots, m_{n-1})}.$$

Пусть ради краткости $R_0 \gtrless \{A, C, D, \bar{0}, S, \mathsf{R}_0, \mathsf{R}_1\}$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Для любой примитивно рекурсивной функции $f(x_0, \ldots, x_{n-1})$ существует R_0-выразимый элемент, представляющий f в $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Индукцией по n легко видно, что $I_0\bar{n} = \bar{n}$, где $I_0 \gtrless R_1(\bar{0}, S)$ Тогда для элемента $S' \gtrless \mathsf{R}_0(\bar{0}, I_0)$ справедливо $S'\bar{n} = \overline{n \dot{-} 1}$. С его помощью построим R_0-выразимый $\sigma \in \mathcal{F}$ так, чтобы для любых n и m имело место

$$(4) \qquad \sigma\bar{n}\,\bar{m} = \overline{m \dot{-} n}.$$

Для этого заметим, что (4) вытекает из равенств $\sigma\bar{0}\,\bar{m} = \bar{m}$ и $\sigma(S\bar{n})\bar{m} = S'(\sigma\bar{n}\,\bar{m})$ индукцией по n, поскольку $\overline{m \dot{-} (n+1)} = \overline{(m \dot{-} n) \dot{-} 1} = S'\overline{m \dot{-} n}$, а эти равенства выполнены для $\sigma \gtrless \mathsf{R}_1(I_0, AS')$. Пусть φ и ψ — R_0-выразимые элементы $\mathcal{F}$, представляющие в $\mathcal{F}$ одноместные числовые функции $f(x)$ и $g(x)$, соответсвенно. Элемент σ позволяет показать тогда, что существует такой же элемент $\chi \in \mathcal{F}$, представляющий функцию $h(x) \lesseqgtr g(x) \dot{-} f(x)$. Действительно, для любого n $\overline{h(n)} = \sigma\overline{f(n)}\,\overline{g(n)} = \sigma(\varphi\,\bar{n})(\psi\bar{n}) = A\sigma\varphi\bar{n}(\psi\bar{n}) = A(A\sigma\varphi\bar{n})\psi\bar{n} = AA(A\sigma\varphi)\bar{n}\psi\bar{n} = C(AA(A\sigma\varphi))(D\,\bar{n}\psi)\bar{n} = C(AA(A\sigma\varphi))(\mathsf{C}(\psi)\bar{n})\bar{n} = A(C(AA(A\sigma\varphi)))\mathsf{C}(\psi)\bar{n}\,\bar{n} = C(A(C(AA(A\sigma\varphi)))\mathsf{C}(\psi))(\partial\bar{n})$ и в качестве χ можно взять $A(C(A(C(AA(A\sigma\varphi)))\mathsf{C}(\psi)))\partial$. С другой стороны, если $h(x) = f(g(x))$ — композиция функций f и g, то она будет представляться элементом $A\varphi\psi$, так как $A\varphi\psi\bar{n} = \varphi(\psi\bar{n}) = \varphi\overline{g(n)} = \overline{f(g(n))}$. Если h — итерация f, т. е. $h(n+1) = f(h(n))$ для каждого n, то h будет представляться элементом $\chi \lesseqgtr \mathsf{R}_1(\overline{h(0)}, \varphi)$, так как $\chi\bar{0} = \overline{h(0)}$ и если $\chi\bar{n} = \overline{h(n)}$, то $\chi\overline{n+1} = \varphi(\chi\bar{n}) = \varphi\overline{h(n)} = \overline{f(h(n))} = \overline{h(n+1)}$. Поскольку одноместные примитивно рекурсивные функции можно породить из функции $x \to x+1$ при помощи операций композиция, итерация и разность (Н. Георгиева [5]), а функция $x \to x+1$ представляется в $\mathcal{F}$ элементом S, то утверждение теоремы доказано для одноместных функций. Кроме того, элемент $\alpha \lesseqgtr \mathsf{R}_1(I_0, AS)$ представляет сумму $\alpha\bar{n}\,\bar{m} = \overline{n+m}$. Действительно, из определения α следует, что $\alpha\bar{0}\,\bar{m} = \bar{m}$ и $\alpha\overline{n+1}\,\bar{m} = S(\alpha\bar{n}\,\bar{m})$ для любых n, m, а из этого неравенство $\alpha\bar{n}\,\bar{m} = \overline{n+m}$ легко следует индукцией по n. Двухместная числовая функция $\langle n, m\rangle = (n+m^2)+m$ кодирует пары, т. е. существуют примитивно рекурсивные функции p_0 и p_1, такие, что $p_i(\langle n_0, n_1\rangle) = n_i$ для обоих $i<2$. (Мы сохраним эти обозначения для кодирующих пар функций до конца работы). Представим функцию $\langle n, m\rangle$ R_0-выразимым элементом так: выберем R_0-выразимый $\varkappa$ так, чтобы он представлял одноместную функцию $x \to x^2$ и положим $\alpha' \lesseqgtr AC(A(A(A\alpha\varkappa))\alpha))$. Несложные выкладки показывают, что $\overline{\langle n, m\rangle} = \overline{(n+m)^2+m} = \alpha'\,\bar{n}(D\bar{m}\,\bar{m}$, откуда $\overline{\langle n, m\rangle} = \alpha'\bar{n}(\partial\bar{m}) = A(\alpha'\bar{n})\partial\bar{m} = C(AA\alpha')(D\bar{n}\partial)\bar{m} = C(AA\alpha')(\mathsf{C}(\partial)\bar{n})\bar{m}$ и, значит, элемент $\pi \lesseqgtr A(C(AA\alpha')$

$\times$ C(∂) представляет $\langle n, m\rangle$: $\pi\overline{n}\,\overline{m} = \overline{<\langle n, m\rangle>}$. Тогда доказательство теоремы легко оканчивается индукцией по числу k аргументов функции f. Действительно, допустим, что k-местные функции представимы требуемым образом ($k \geqq 1$) и пусть f — $k+1$-местная примитивно рекурсивная функция. Тогда функция $f'(x, x_2, \ldots, x_k) \leftrightharpoons f(p_0(x), p_1(x), x_2, \ldots, x_k)$ представляется некоторым R_0-выразимым элементом $\varphi' \in \mathscr{F}$ и тогда для любых $n_0, \ldots, n_k$ имеет место $\varphi'\overline{\langle n_0, n_1\rangle}\,\overline{n}_2 \ldots \overline{n}_k = \overline{f(n_0, \ldots, n_k)}$. Но $\varphi'\,\overline{\langle n_0, n_1\rangle}\,\overline{n}_2 \ldots \overline{n}_k = \varphi'\,(\pi\overline{n}_0\,\overline{n}_1)\,\overline{n}_2 \ldots \overline{n}_k = A(A\varphi')\pi\,\overline{n}_0 \ldots \overline{n}_k$ и, значит, элемент $\varphi \leftrightharpoons A(A\varphi')\pi$ представляет функцию f.

До конца параграфа термами будем называть выражения, порожденные по правилам: символы для констант $c_0, c_1, \ldots, c_l$ — термы и если t и s — термы, то (ts) — терм. Значение $\widetilde{t}$ терма t определяется очевидным образом: $\widetilde{c}_i \leftrightharpoons \gamma_i$, где $\gamma_i \in \mathscr{F}$ — фиксированные константы ($i \leq l$), причем $\gamma_l = A$ и $\widetilde{ts} \leftrightharpoons \widetilde{t}\,\widetilde{s}$. Как обычно, группировку скобок будем подразумевать влево: $t_0 t_1 t_2 \ldots t_n \leftrightharpoons (\ldots((t_0 t_1) t_2) \ldots t_n)$. $t \cong s$ будет обозначать $\widetilde{t} = \widetilde{s}$. Допустим еще, что определена номерация термов, например, как в гл. X из [7]. Номер терма t будем обозначать через $\ulcorner t \urcorner$ и ради краткости будем писать $|t|$ вместо $\overline{\ulcorner t \urcorner}$. Отметим, что для этой номерации справедливо $\ulcorner t' \urcorner < \ulcorner t \urcorner$ для любого подтерма t' терма t, отличного от t. Фиксируем также взаимно однозначную номерацию кортежей натуральных чисел (для этой номерации будем использовать определения и обозначения из [6], с. 43). Тогда одноместную операцию $\mathsf{R}_1^*: \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ назовем специальной примитивной рекурсией, если для любых натуральных n и m имеют место $\mathsf{R}_1^*(\varphi)\overline{\langle n\rangle} = \varphi\overline{n}$

и

$$\mathsf{R}_1^*(\varphi)\overline{m * \langle n\rangle} = \mathsf{R}_1^*(\varphi)\,\overline{m}(\varphi\overline{n}), \text{ если } lhm > 0.$$

Предложение 1. *Пусть R_1^* — специальная примитивная рекурсия в $\mathscr{F}$. Тогда существует $R_0 \cup \{\mathsf{R}_1^*\}$-выразимый элемент $\tau \in \mathscr{F}$ так, чтобы для любого терма t имело место $\tau|t| = \widetilde{t}$.*

Доказательство. Индукцией по n определим терм a_n так: $a_0 \leftrightharpoons c_l$ (символ для константы A), $a_{n+1} \leftrightharpoons c_l a_n$. Значение $\widetilde{a}_n$ обозначим через A_n. Тогда для каждого n и любых $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ из $\mathscr{F}$

$$A_k(\varphi_0 \ldots \varphi_n) = A_{k+n}\,\varphi_0 \ldots \varphi_n, \tag{5}$$

что легко видно из индукции по n. Назовем простыми те термы s, для которых либо $s \doteq c_i$ для некоторого $i < l$, либо $s = a_n$ для некоторого n. Определим канонический номер $K_0(s)$ простого терма s так: $K_0(c_i) \leftrightharpoons i$, где $i < l$, и $K_0(a_n) \leftrightharpoons l + n$. Так как $A_n = \mathsf{R}_1(A, A)\overline{n}$ для каждого n, то ясно, что элемент

$$\tau_0 \leftrightharpoons \mathsf{R}_0(\widetilde{c}_0, R_0(\widetilde{c}_1, \ldots, \mathsf{R}_0(\widetilde{c}_{l-1}, \mathsf{R}_1(A, A)) \ldots))$$

удовлетворяет для любого простого терма s равенство $\tau_0\overline{K_0(s)} = \widetilde{s}$.

Термы вида $s_0 s_1 \ldots s_n$, где s_j — простые термы ($j \leq n$), будем называть удобными. Определим канонический номер $K(q)$ удобного терма $q = s_0 s_1 \ldots s_n$ как номер $\langle K_0(s_0) \ldots K(s_n)\rangle$ непустого кортежа $K_0(s_0), K_0(s_1), \ldots, K_0(s_n)$ натуральных чисел. Тогда элемент $\tau_1 \leftrightharpoons \mathsf{R}_1^*(\tau_0)$ удовлетворяет для любого удобного терма q равенство $\tau_1\overline{K(q)} = \widetilde{q}$. Это легко доказывается индукцией по n, где $q = s_0 s_1 \ldots s_n$, а термы s_j — простые, $j \leq n$. В самом деле, если $n = 0$, т. е. $q = s_0$, то

$$\tau_1\overline{K(q)} = \mathsf{R}_1^*(\tau_0)\,\overline{\langle K_0(s_0)\rangle} = \tau_0\overline{K_0(s_0)} = \widetilde{s}_0 = \widetilde{q},$$

и если $q = q's_{n+1}$, где $q' = s_0 s_1 \ldots s_n$ и $\tau_1\overline{K(q')} = \widetilde{q}'$ то

$$\tau_1\overline{K(q)} = \mathsf{R}_1^*(\tau_0)\,\overline{K(q')*\langle K_0(s_{n+1})\rangle} = \mathsf{R}_1^*(\tau_0)\,\overline{K(q')}\,(\tau_0\overline{K_0(s_{n+1})}) = \tau_1\overline{K(q')}\,\widetilde{s}_{n+1} = \widetilde{q}'\,\widetilde{s}_{n+1} = \widetilde{q}.$$

Потом для любого терма t определим удобный терм $(t)^*$ и одновременно построим примитивно рекурсивную функцию $f(x)$ так, чтобы имели место $\widetilde{t} = \widetilde{(t)}^*$ и $f(\ulcorner t\urcorner) = K((t)^*)$. В самом деле, пусть $q = s_0 s_1 \ldots s_n$ и $r = s_0' s_1' \ldots s_m$ — удобные термы, где s_j и s_i' — простые, $j \leq n$ и $i \leq m$. Тогда с помощью (5) получим

$$qr \cong s_0 s_1 \ldots s_n(s_0' \ldots s_m') \cong a_0(s_0 \ldots s_n)(s_0' \ldots s_{m-1}')s_m' \cong a_n s_0 \ldots s_n(s_0' \ldots s_{m-1}')s_m'.$$

Сделав еще раз эти преобразования, получим

$$qr \cong a_{n+1}\,a_n s_0 \ldots s_n(s_0' \ldots s_{m-2}')\,s_{m-1}'\,s_m'.$$

Продолжая таким образом, наконец дойдем до

$$qr \simeq a_{n+m-1}\,a_{n+m-2} \ldots a_n s_0 \ldots s_n s_0' \ldots s_m'.$$

Обозначим правую сторону последнего равенства через $(qr)^1$. Тогда $(qr)^1$ — удобный и

$$K((qr)^1) = \langle (l+n+m-1) \ldots (l+\mathrm{n})\rangle * K(q) * K(r).$$

Если g — двухместная примитивно рекурсивная функция, определенная через $g(n, m) \leftrightharpoons \langle (l+n+m-1) \ldots (l+n)\rangle$ и $f_1(n, m) \leftrightharpoons g(lhn, lhm) * n * m$, то f_1 — примитивно рекурсивная и

$$K(qr)^1) = f_1(K(q),\ K(r))$$

для любых двух удобных термов q и r. Тогда с помощью теоремы о возвратной рекурсии определим примитивно рекурсивную функцию f так, что

$$f(\ulcorner t\urcorner) = \begin{cases} K(t) & \text{, если } t \text{ — символ для константы,} \\ f_1(f(\ulcorner t_0\urcorner),\ f(\ulcorner t_1\urcorner)), & \text{, если } t = t_0 t_1. \end{cases}$$

Кроме того, положим

$$(t)^* \leftrightharpoons \begin{cases} t & \text{, если } t \text{ — символ для константы,} \\ ((t_0)^*(t_1)^*)^1 & \text{, если } t = t_0 t_1. \end{cases}$$

Тогда индукцией по построению t видно, что $(t)^*$ — удобный, $t \cong (t)^*$ и $f(\ulcorner t\urcorner) = K((t)^*)$. Если R_0-выразимый элемент φ представляет в $\mathscr{F}$ функцию f, то положим $\tau \leftrightharpoons A\tau_1\varphi$. Тогда для любого t

$$\tau\,|\,t\,| = \tau_1(\varphi\,|\,t\,|) = \tau_1\,\overline{K((t)^*)} = (\widetilde{t})^* = \widetilde{t}.$$

2. Предложение 2. *Пусть $\mathscr{F}$ — B-комбинаторная алгебра. Тогда для любых φ, ψ, α, β, γ из $\mathscr{F}$ имеют место равенства*

$$(\alpha,\ \beta\varphi) = ACC(I,\ \beta\varphi)(J(DT\alpha,\ \breve{D}F)), \tag{6}$$

$$(\alpha, \varphi\ \beta) = ACC(I,\ \alpha\varphi)\,(J(\breve{D}F,\ DT\beta)), \tag{7}$$

$$(\alpha,\ \beta\varphi\gamma) = ACC(I,\ \beta\varphi)(J(DT\alpha,\ DF\gamma)), \tag{8}$$

$$(\alpha\varphi\gamma,\ \beta) = ACC(I,\ \alpha\varphi)(J(DF\gamma,\ DT\beta)), \tag{9}$$

$$(\alpha\varphi,\ \beta\psi) = ACC(\alpha,\ \beta)(J(DT\varphi,\ DF\psi)), \tag{10}$$

$$(\alpha,\ (\beta,\ \gamma)) = c((\alpha,\ \gamma),\ \gamma)b, \tag{11}$$

где $c \leftrightharpoons AC(ACC)$ и $b \leftrightharpoons J(\breve{D}(DTT),\ J(DTF,\ \breve{D}F))$.

Доказательство. (6) следует из цепи равенств $(\alpha, \beta\varphi) = ((I, \beta\varphi)T\alpha, (I, \beta\varphi)F) = (C(I, \beta\varphi)(DT\alpha), C(I, \beta\varphi)(\breve{D}F)) = C(C(I, \beta\varphi))(J(DT\alpha, \breve{D}F)) = ACC(I, \beta\varphi)(J(DT\alpha, \breve{D}F))$.

Тождества (7), (8) и (9) доказываются аналогичным образом, а также и (10): $(\alpha\varphi, \beta\psi) = ((\alpha, \beta)T\varphi, (\alpha, \beta)F\psi) = (C(\alpha, \beta)(DT\varphi), C(\alpha, \beta)(DF\psi)) = C(C(\alpha, \beta))(J(DT\varphi, DF\psi)) = ACC(\alpha, \beta)(J(DT\varphi, DF\psi))$.

Наконец, положим $\chi \leftrightharpoons ((\alpha, \beta), \gamma)$. Тогда $\alpha = \chi TT$, $\beta = \chi TF$ и $\gamma = \chi F$, откуда $(\alpha, (\beta, \gamma)) = (\chi TT, (\chi TF, \chi F)) = (C\chi(DTT), (C\chi(DTF), C\chi(\breve{D}F))) = (C(C\chi)(\breve{D}(DTT)), (C(C\chi)(J(DTF, \breve{D}F))) = c\chi b$.

Далее до конца работы фиксируем B-комбинаторную алгебру $\mathcal{F}$ и представление $n \to \overline{n}$ натуральных чисел в $\mathcal{F}$ из [4], **1**, т. е. $\overline{0} \leftrightharpoons \breve{D}T$ и $\overline{n+1} \leftrightharpoons S\overline{n}$, где $S \leftrightharpoons DF$. Очевидно, что $\mathsf{R}_0(\varphi, \psi) \leftrightharpoons C(\varphi, \psi)$ — примитивно рекурсивное разветвление относительно этого представления. Через $\mathscr{C}_0$ будем обозначать множество исходных констант $\mathcal{F}$, а через B — операцию разветвления. Если в $\mathcal{F}$ имеются примитивно рекурсивная итерация R_1 и специальная примитивная рекурсия R_1^*, то обозначим множество $\mathscr{C}_0 \cup \{B, \mathsf{R}_1\}$ через R_1, а $\mathscr{C}_0 \cup \{B, \mathsf{R}_1, \mathsf{R}_1^*\}$ — через R_1^*. Напомним, что понятие кодирующей функции из [4], **4** зависело от некоторой оценки $\Theta_0 : X \to \mathcal{F}$ и некоторой переменной x. Далее до конца параграфа мы эту оценку и эту переменную фиксируем, сохраняя все оговорки о термах, предшествующих определению кодирующей функции из цитированного параграфа [4]. Множество $\{\Theta(y) : y \in X\}$ значений оценки Θ обозначим через $\mathscr{C}'$.

Предложение 3. *Пусть в $\mathcal{F}$ имеются примитивно рекурсивная итерация R_1 и специальная примитивная рекурсия R_1^*. Тогда существуют $\mathscr{C}' \cup R_1^*$-выразимый элемент $\sigma \in \mathcal{F}$ и двухместная функция k, определенная для пар термов r, t со значениями из $\mathcal{F}$ так, чтобы для любого терма r функция $t \to k(r, t)$ была кодирующей для r с читающим элементом σ. Кроме того, если $x_0 \in X$, $\varphi = \Theta(x_0)$ и $\mathscr{C}'' \leftrightharpoons \{\Theta(y) : y \in X \setminus \{x_0\}\}$, то в качестве σ можно выбрать элемент вида $c(I, \sigma' \mathsf{C}(\varphi))\sigma''$, где c, σ' и σ'' — соответственно $\mathscr{C}_0$—, $\mathscr{C}'' \cup R_1$- и $\mathscr{C}'' \cup R_1^*$ — выразимые элементы $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Определим нумерацию термов, например, как в гл. X из [7]. Номер терма t обозначим через $\ulcorner t \urcorner$. В обозначениях из доказательства теоремы 1 для любых двух термов r и t положим $k_0(r, t) \leftrightharpoons \overline{\langle \ulcorner r \urcorner, \ulcorner t \urcorner \rangle}$ и определим $k(r, t)$ как $k_0(r, t^N)$. Тогда функция $t \to k(r, t)$ удовлетворяет равенству $k(r, t) = k(r, t^N)$, которое входит в условия определения кодирующей функции в [4], **4**. Чтобы показать, что она удовлетворяет и остальным условиям этого определения, отметим сначала, что существуют примитивно рекурсивные функции $f_0(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ так, чтобы для любого терма t имели место равенства $f_0(\ulcorner t \urcorner) = \ulcorner t^N \urcorner$, $f_1(\ulcorner t \urcorner) = \ulcorner t^* \urcorner$ и $f_2(\ulcorner t \urcorner) = \ulcorner t^0 \urcorner$. Действительно, функции f_1 и f_2 легко строятся при помощи теоремы о возвратной рекурсии в соответствии с определением операций $t \to t^*$ и $t \to t^0$ из [4], **4**. Существование f_0 следует из того, что на основании (12) из [4], **3** любая цепь редукций $t \underset{1}{\Vdash\!\!\to} t_1 \underset{1}{\Vdash\!\!\to} t_2 \underset{1}{\Vdash\!\!\to} \ldots$ должна обрываться за не более чем $m(t)$ шагов, оканчиваясь нормальной формой t^N терма t. Это позволяет определить f_0 с помощью ограниченного μ-оператора.

Затем построим элементы σ_0, σ_1, σ_2 и σ_3 так, чтобы:

(12) $\sigma_0 k_0(r, t) = I$, если $t = I$;

(13) $\sigma_1 k_0(r, t) = Dk_0(r, t^*)\overline{t^0}$, если $t \neq I$ и t^0 — константа или A — терм;

(14) $\sigma_2 k_0(r, t) = J(k_0(r, t_0), k_0(r, t_1))$, если $t = \langle t_0, t_1 \rangle$;

(15) $\sigma_3 k_0(r, t) = \breve{D}k_0(r, (t^* r)^N)$, если $t^0 = x$.

На основании теоремы 1 существует R_1-выразимый элемент $\zeta_0 \in \mathcal{F}$, такой, что $\zeta_0 \overline{n} = 0$ для любого n. Тогда элемент $\sigma_0 \leftrightharpoons A\mathsf{R}_0(I, O)\zeta_0$ будет удовлетворять (12):

$$\sigma_0 k_0(r,\ t) = \mathsf{R}_0(I,\ O)(\zeta_0 k_0(r,\ t)) = \mathsf{R}_0(I,\ O)\overline{0} = I.$$

Очевидно о нумерации термов можно предполагать, что существует примитивно рекурсивная функция двух аргументов g_0 так, чтобы для любых двух термов t и s имело место $g_0(\ulcorner t\urcorner,\ \ulcorner s\urcorner) = \ulcorner ts\urcorner$. Тогда если R_1-выразимый элемент $\psi \in \mathscr{F}$ представляет в $\mathscr{F}$ примитивно рекурсивную функцию $f(n) \leftrightharpoons \langle p_0(n),\ f_0(g_0(f_1(p_1(n)),\ p_0(n)))\rangle$, то для любых r и t имеет место

$$\psi k_0(r,\ t) = \overline{\langle \ulcorner r\urcorner,\ f_0(g_0(f_1(\ulcorner t\urcorner),\ \ulcorner r\urcorner))\rangle} = k_0(r,\ (t^*r)^N),$$

откуда видно, что элемент $\sigma_3 \leftrightharpoons A\breve{D}\psi$ обладает свойством (15):

$$\sigma_3 k_0(r,\ t) = \breve{D}(\psi k_0(r,\ t)) = \breve{D}k_0(r,\ (t^*r)^N).$$

Далее мы нуждаемся в двух вспомагательных построениях. Найдем элементы a и β из $\mathscr{F}$, соответственно $\{A,\ C\}$- и R_1-выразимые, так, чтобы для любых $\alpha,\ \gamma \in \mathscr{F}$ и натурального m имели место:

$$\alpha\overline{m}(\gamma\overline{m}) = a\alpha\mathsf{C}(\gamma)\partial\overline{m}, \tag{16}$$

$$\beta\overline{m} = (DT\overline{m},\ DF\overline{m}). \tag{17}$$

Действительно, существование a видно при помощи (2) и (3), из

$$\alpha\overline{m}(\gamma\overline{m}) = A(\alpha\overline{m})\gamma\overline{m} = C(AA\alpha)(D\overline{m}\gamma)\overline{m} = C(AA\alpha)(\mathsf{C}(\gamma)\overline{m})\overline{m} = A(C(AA\alpha))\mathsf{C}(\gamma)\overline{m}\,\overline{m}$$
$$= C(A(C(AA\alpha))\mathsf{C}(\gamma))(D\overline{m}\,\overline{m}) = A(C(A(C(AA\alpha))\mathsf{C}(\gamma)))\partial\overline{m}.$$

Для построения β положим $b \leftrightharpoons (A(DT)S,\ \mathrm{A}(DF)S)$. Тогда

$$(DT(S\overline{n}),\ DF(S\overline{n})) = (A(DT)S\overline{n},\ A(DF)S\overline{n}) = (bT\overline{n},\ bF\overline{n})$$
$$= (Cb(DT\overline{n}),\ Cb(DF\overline{n})) = A(C(Cb))J(DT\overline{n},\ DF\overline{n})$$

для любого n. Тогда (17) будет следовать индукцией по m из определения

$$\beta \leftrightharpoons \mathsf{R}_1((DT\overline{0},\ DF\overline{0}),\ A(C(Cb))J).$$

Теперь на основании теоремы 1 выберем R_1-выразимые элементы ψ_0 и ψ_1 из $\mathscr{F}$ так, чтобы для любых трех термов $r,\ t_0$ и t,

$$\psi_i k_0(r,\ \langle t_0,\ t_1\rangle) = k_0(r,\ t_i) \quad (i<2).$$

Тогда с помощью (10) из предложения 2 получим

$$J(k_0(r,\ t_0),\ k_0(r,\ t_1)) = J(\psi_0 k_0(r,\ t),\ \psi_1 k_0(r,\ t)) = J(ACC(\psi_0,\ \psi_1)(J(DTk_0(r,\ t),\ DFk_0(r,\ t))))$$

где $t \leftrightharpoons \langle t_0,\ t_1\rangle$, и, согласно (17),

$$J(k_0(r,\ t_0),\ k_1(r,\ t_1)) = J(ACC(\psi_0,\ \psi_1)(J(\beta k_0(r,\ t)))),$$

откуда следует существование σ_2 со свойством (14). Потом на основании предложения 1 найдем $\mathscr{C} \cup \mathring{R}_1$-выразимый элемент $\tau \in \mathscr{F}$ так, чтобы для любого терма q, не содержащего x и символа для разветвления, т. е. скобок $\langle\,.\,\rangle$, имело место $\tau\overline{\ulcorner q\urcorner} = \tilde{q}$. Тогда

$$Dk_0(r,\ t^*)\tilde{t}^0 = D\overline{\langle\ulcorner r\urcorner,\ f_1(\ulcorner t\urcorner)\rangle}(\tau\overline{f_2(\ulcorner t\urcorner)}).$$

Согласно теореме 1 существуют R_1-выразимые $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathscr{F}$ так, чтобы $\varphi_1\overline{\langle\ulcorner r\urcorner,\ \ulcorner t\urcorner\rangle} = \overline{\langle\ulcorner r\urcorner, f_1(\ulcorner t\urcorner)\rangle}$ и $\varphi_2\overline{\langle\ulcorner r\urcorner,\ \ulcorner t\urcorner\rangle} = \overline{f_2(\ulcorner t\urcorner)}$ для любых двух термов r и t. Отсюда

(18) $$Dk_0(r, t^*)\widetilde{t^0} = D(\varphi_1 k_0(r, t))(\tau(\varphi_2 k_0(r, t))).$$

Применяя здесь (16), получим

$$Dk_0(r, t^*)\widetilde{t^0} = a(AD\varphi_1)\mathsf{C}(A\tau\varphi_2)\partial k_0(r, t)$$

и значит элемент $\sigma_1 \lessgtr a(AD\varphi_1)\mathsf{C}(A\tau\varphi_2)\partial$ удовлетворяет (13).

Положим тогда

$$\varsigma \lessgtr C(A(DF)\sigma_1, C(A(DT)\sigma_0, C(A(DF)\sigma_2, C(A(DF)\sigma_3, O)))).$$

Из этого определения следует, что $\varsigma\overline{0} = A(DF)\sigma_1$, $\varsigma\overline{1} = A(DT)\sigma_0$ и $\varsigma\overline{j} = A(DF)\sigma_i$ для $j=2, 3$. Если тогда R_1-выразимый элемент $\varsigma_0 \in \mathscr{F}$ выбран на основании теоремы 1 так, чтобы

$$\varsigma_0 k_0(r, t) = \begin{cases} \overline{1}, & \text{если } t = I, \\ \overline{0}, & \text{если } t \neq I \text{ и } t^0 \text{ — константа или A-терм}, \\ \overline{2}, & \text{если } t \text{ имеет вид } \langle t_0, t_1\rangle, \\ \overline{3}, & \text{если } t^0 = x, \end{cases}$$

то в соответствующих случаях будем иметь

$$\varsigma(\varsigma_0 k_0(r, t))k_0(r, t) = \begin{cases} DTI, \\ DF(Dk_0(r, t^*)\widetilde{t^0}), \\ DF(J(k_0(r, t_0), k_0(r, t_1))), \\ DF(\breve{D}k_0(r, (t^*\imath)N)). \end{cases}$$

Это равенство справедливо для нормальных t с заменой k_0 на k, поскольку для таких t имеет место $k_0(r, t) = k(r, t)$. Отсюда следует, что $\sigma \lessgtr A(C(A\varsigma\varsigma_0))\partial$ — читающий элемент k, так как для нормальных t справедливо

$$\sigma k(r, t) = C(A\varsigma\varsigma_0)(\partial k(r, t)) = C(A\varsigma\varsigma_0)(Dk(r, t)k(r, t)) = A\varsigma\varsigma_0 k(r, t)k(r, t) = \varsigma(\varsigma_0 k(r, t))k(r, t).$$

Таким образом первая часть предложения доказана. Для доказательства второй заметим, что из элементов σ_i $(i<4)$ лишь σ_1 зависел от оценки Θ, да и то через τ. Но элемент τ можно выбрать более специального вида, а именно:

(19) $$\tau = c_0(\varphi, \tau_0)\alpha_0,$$

где здесь и далее до конца доказательства буквы c_i, α_i и τ_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ будут обозначать элементы $\mathscr{F}$, которые соответственно $\mathscr{C}_0$-, $\mathscr{C}' \cup R_1$- и $\mathscr{C}' \cup R_1^*$-выразимы. Действительно, предложением 1 и теоремой 1 гарантируется существование элементов τ_0, $\alpha_0 \in \mathscr{F}$, таких, что τ_0 — $\mathscr{C}' \cup R_1^*$-выразимый и $\tau_0\ulcorner q\urcorner = \widetilde{q}$ для любого терма q, не содержащего x, x_0 и скобок $\langle\,,\rangle$, и α_0- R_1-выразимый и, если $t = x_0$, то $\alpha_0 k_0(r, t) = \overline{0}$ а в противном случае — $\alpha_0 k_0(r, t) = Sk_0(r, t)$. Тогда если t — константа или A-терм, то

$$\widetilde{t} = C(\varphi, \tau_0)(\alpha_0 k_0(r, t)) = AAC(\varphi, \tau_0)\alpha_0 k_0(r, t)$$

и значит элемент (19), где $c_0 \lessgtr AAC$, обладает нужным нам свойством. Возвращаясь к (18) видим, что

(20) $$Dk_0(r, t^*)\widetilde{t^0} = AD\varphi_1 k_0(r, t)(c_0(\varphi, \tau_0)\alpha_0(\varphi_2 k_0(r, t))).$$

При помощи некоторых преобразований приведем это равенство к виду

(21) $$Dk_0(r, t^*)\widetilde{t^0} = c_1(I, \alpha_1\mathsf{C}(\varphi))\tau_1 k_0(r, t).$$

Для этого положим, ради краткости, $\overline{m} \lessgtr k_0(r, t)$ и $\delta \lessgtr Dk_0(r, t^*)\widetilde{t^0}$. Тогда при помощи комбинатора A сначала приводим правую сторону (20) к виду $c_2\varphi_1\overline{m}c_0(\varphi, \tau_0)\alpha_0\varphi_2\overline{m}$. Потом, при помощи справедливых для любых ξ, $\eta \in \mathscr{F}$ преобразований

$$\xi\overline{m}\eta = C\xi(D\overline{m}\eta) = C\xi(\mathsf{C}(\eta)\overline{m}) = AAC\xi\mathsf{C}(\eta)\overline{m}, \tag{22}$$

представляем δ так: $\delta = \alpha_2\overline{m}(\varphi, \tau_0)\alpha_0\varphi_2\overline{m}$. Но выражение $\alpha_2\overline{m}(\varphi, \tau_0)$ приводится последовательными преобразованиями, использующими (22), предложение 2 и (17), к виду

$$\alpha_2\overline{m}(\varphi, \tau_0) = (E_0(\alpha_2\overline{m})\varphi, E_1(\alpha_2\overline{m})\tau_0)E = (\alpha_3\mathsf{C}(\varphi)\overline{m}, \tau_2\overline{m})E = ACC((\alpha_3\mathsf{C}(\varphi), \tau_2)(J(DT\overline{m}, DF\overline{m}))E$$
$$= c_3(I, \alpha_3\mathsf{C}(\varphi))\tau_3(J(\beta\overline{m}))E = c_4(I, \alpha_3\mathbf{C}(\varphi))\tau_4\overline{m}E = c_5(I, \alpha_3\mathsf{C}(\varphi))\tau_5\overline{m}.$$

Тогда

$$\delta = c_5(I, \alpha_3\mathsf{C}(\varphi))\tau_5\overline{m}\alpha_0\varphi_2\overline{\boldsymbol{m}} = c_6(I, \alpha_3\mathsf{C}(\varphi))\tau_5\overline{m}(D(D\alpha_0\varphi_2)\overline{m}),$$

откуда при помощи (16) получается (21). Это означает, что мы можем взять $c_1(I, \alpha_1\mathsf{C}(\varphi))\tau_1$ в качестве σ_1. Тогда, возвращаясь к определению ς, видим, что ς имеет вид $C(c_7(I, \alpha_1\mathsf{C}(\varphi))\tau_1, \alpha_4)$, откуда последовательными преобразованиями, использующими (9), (10), (11) и (6) из предложения 2, приводим его к виду

$$\varsigma = c_8(I, c_7(I, \alpha_1\mathsf{C}(\varphi)))\tau_6 = c_8(I, (E_1c_7I, E_1c_7(\alpha_1\mathsf{C}(\varphi)))E)\tau_6 = c_8(II, (c_9, \alpha_5\mathsf{C}(\varphi))E)\tau_6$$
$$= c_{10}(I, (c_9, \alpha_5\mathsf{C}(\varphi)))\tau_7 = c_{11}((I, c_9), \alpha_5\mathsf{C}(\varphi))\tau_8 = c_{12}(I, \alpha_5\mathsf{C}(\varphi))\tau_9.$$

Поставляя последнее выражение вместо ς в определении $\sigma \lessgtr A(C(A\varsigma\varsigma_0))\partial$ читающего елемента σ, видим, что σ может быть выбран требуемого вида. Предложение доказано.

3. Далее до конца работы будем предполагать, что $\mathscr{F}_1'$ — итеративное расширение B-комбинаторной алгебры $\mathscr{F}$. Через I обозначаем двухместную операцию, определенную условием (г) из **4. 2**.

Лемма 1. *Существует $\mathscr{C}_0 \cup \{B, \mathsf{I}\}$-выразимая операция $\mathsf{I}' : \mathscr{F}^3 \to \mathscr{F}$ так, чтобы для любых φ, α и ψ из $\mathscr{F}$ $\mathsf{I}'(\varphi, \alpha, \psi)$ являлось наименьшим решением в $\mathscr{F}_1$ относительно ξ неравенства $\varphi(I, \alpha\xi)\psi \leqq \xi$, и, следовательно, удовлетворяет соответствующему равенству $\varphi(I, \alpha\xi)\psi = \xi$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\alpha = DF$. Положим $\vartheta \lessgtr \mathsf{I}(A(A \times (DF))\varphi, \psi)$. Из этого определения легко видно, что ϑ — наименьшее решение в $\mathscr{F}_1$ относительно η неравенства

$$DF(\varphi(I, \eta)\psi) \leqq \eta. \tag{23}$$

Тогда должно выполняться равенство $\vartheta = DF(\varphi(I, \vartheta)\psi)$. Отсюда

$$\chi \lessgtr C(O, I)\upsilon = (O, I)F(\varphi(I, \vartheta)\psi) = \varphi(I, \vartheta)\psi.$$

Тогда

$$\varphi(I, DF\chi)\psi = \varphi(I, DF(\varphi(I, \vartheta)\psi))\psi = \varphi(I, \vartheta)\psi = \chi.$$

Если, с другой стороны, $\varphi(I, DF\chi')\psi \leqq \chi'$, где $\chi' \in \mathscr{F}_1$, то умножением слева на DF получим, что $DF\chi'$ — решение (23). Тогда $\vartheta \leqq DF\chi'$, откуда

$$\chi \lessgtr C(O, I)\vartheta \leqq C(O, I)(DF\chi') = (O, I)F\chi' = \chi'.$$

Значит χ — наименьшее решение неравенства $\varphi(I, DF\xi)\psi \leqq \xi$ в $\mathscr{F}_1$. Но с помощью (10) и (6) предложения 2 легко представить $\varphi(I, \alpha\xi)\psi$ в виде $\Gamma(\varphi, \alpha)(I, DF\xi)(d\psi)$, где d и Γ — $\mathscr{C}_0 \cup \{B\}$-выразимые элементы и операция в $\mathscr{F}_1$, соответственно. Таким образом, общий случай для α сводится к уже рассмотренному случаю $\alpha = DF$.

Предложение 4. *В $\mathscr{F}$ существуют $\mathscr{C}_0 \cup \{B, \mathsf{I}\}$-выразимые примитивно рекурсивная итерация R_1 и специальная примитивная рекурсия R_1^*.*

Доказательство. На основании леммы 1 существует $\mathscr{C}_0 \cup \{B, \mathsf{I}\}$-выразимая операция $\mathsf{R}_1 : \mathscr{F}^2 \to \mathscr{F}$ так, чтобы для любых $\varphi, \psi \in \mathscr{F}$ $\mathsf{R}_1(\varphi, \psi)$ было решением относительно ξ равенства

$$C(\varphi, A\psi\xi) = \xi. \tag{24}$$

Действительно, согласно (6) из предложения 2

$$C(\varphi, A\psi\xi) = B(ACC(I, A\psi\xi)(J(DT\varphi, \check{D}F))) = A(AC)(ACC)(I, A\psi\xi)(J(DT\varphi, \check{D}F)),$$

и мы можем определить операцию R_1 посредством

$$\mathsf{R}_1(\varphi, \psi) \lesseqgtr \mathsf{I}'(A(AC)(ACC), A\psi, J(DT\varphi, \check{D}F)).$$

Умножая (24) справа по $\overline{0}$ и $\overline{Sn}$ получаем $\xi\overline{0} = \varphi$ и $\xi\overline{n+1} = \psi(\xi\overline{n})$, откуда, поставляя $\xi = \mathsf{R}_1(\varphi, \psi)$, видим, что R_1 — примитивно рекурсивная итерация. Затем найдем $\mathscr{C}_0 \cup \{B, \mathsf{I}\}$-выразимую операцию $\Gamma : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ со свойствами (об обозначениях, связанных с кортежами натуральных чисел, см. [6], с. 43):

$$\xi\overline{0}\,\overline{n} = \varphi\overline{[n]_0} \quad \text{и} \quad \zeta(\overline{Sj})\,\overline{n} = \zeta\,\overline{j}\,\overline{n}(\varphi\,\overline{[n]_{j+1}}) \tag{25}$$

для любых натуральных n и j, где $\zeta \lesseqgtr \Gamma(\varphi)$. Для этого, в обозначениях из доказательства теоремы 1, выберем на ее основании R_1- выразимые элементы π_0, π_1, $\varkappa$, представляющие соответственно примитивно рекурсивные функции p_0, p_1 и $x \to [p_1(x)]_{p_0(x)+1}$. Положим $m \lesseqgtr \langle j, n\rangle$. Тогда правая сторона равенства (25) будет равна $\zeta(\pi_0\overline{m})(\pi_1\overline{m})(\varphi(\varkappa\overline{m}))$. Отсюда видно, что, используя несколько раз (16), (2) и (3), мы можем представить ее в виде

$$\zeta\overline{j}\,\overline{n}(\varphi\,\overline{[n]_{j+1}}) = a'\zeta\varphi'\overline{m},$$

где a' и φ' — соответственно $\{A, C\}$ — и $\{\pi_0, \mathsf{C}(\pi_1), \partial, \mathsf{C}(A\varphi\varkappa)\}$ — выразимые элементы $\mathscr{F}$. Но $\overline{m} = \pi\overline{j}\,\overline{n}$, где π — элемент, определенный в доказательстве теоремы 1, откуда

$$a'\varepsilon\varphi'\overline{m} = a'\zeta\varphi'(\pi\overline{j}\,\overline{n}) = a''\zeta\varphi'\pi\overline{j}\,\overline{n}$$

для некоторого $\{A, C\}$-выразимого $a'' \in \mathscr{F}$. Кроме того, согласно теореме 1, существует R_1-выразимый $\nu \in \mathscr{F}$ так, чтобы $\nu\overline{n} = \overline{[n]_0}$ для любого n. Тогда (25) становится равносильным с

$$\zeta\overline{0}\,\overline{n} = A\varphi\nu\overline{n} \text{ и } \zeta\overline{j+1}\,\overline{n} = a''\zeta\varphi'\pi\overline{j}\,\overline{n},$$

и, значит, будет следовать из равенства

$$\zeta = C(A\varphi\nu, a''\zeta\varphi'\pi).$$

При помощи (8) из предложения 2 правую сторону последнего равенства легко представить в виде $\Gamma_1(\varphi)(I, a''\zeta)\Gamma_2(\varphi)$, где Γ_1 и Γ_2 — $\mathscr{C}_0 \cup \{B, \mathsf{I}\}$-выразимые операции в $\mathscr{F}$. Применяя лемму 1, тогда находим оператор Γ со свойствами (25).

Теперь определим операцию $\mathsf{R}_1^* : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ так, чтобы

$$\mathsf{R}_1^*(\varphi)\overline{m} = \Gamma(\varphi)\overline{lhm \dot{-} 1}\;\overline{m} \tag{26}$$

для любых $\varphi \in \mathscr{F}$ и натурального m. Это может быть сделано так: берем $\mathscr{C}_0 \cup \{B, \mathsf{I}\}$-выразимый $\lambda \in \mathscr{F}$ для которого $\lambda\overline{m} = \overline{lhm \dot{-} 1}$ и представляем правую сторону (26) в виде $\Gamma(\varphi)\overline{lhm \dot{-} 1}\;\overline{m} = A\Gamma(\varphi)\lambda\overline{m}\,\overline{m} = C(A\Gamma(\varphi)\lambda)(\partial\overline{m}) = A(C(A\Gamma(\varphi)\lambda))\partial\overline{m}$. Тогда, полагая $\mathsf{R}_1^*(\varphi) \lesseqgtr A(C(A\Gamma(\varphi)\lambda))\partial$, получим (26). Потом по (25) $\mathsf{R}_1^*(\varphi)\overline{\langle n\rangle} = \Gamma(\varphi)\overline{0}\,\overline{\langle n\rangle} = \varphi\overline{n}$.

Кроме того, из (25) индукцией по j легко следует, что для любых натуральных n и n' справедливо

$$(\forall_i \leq j)([n]_i = [n']_i) \Rightarrow \Gamma(\varphi)\bar{j}\ \bar{n} = \Gamma(\varphi)\bar{j}\ \bar{n}'.$$

Отсюда следует, что для всех m и m' имеет место

$$\mathsf{R}_1^*(\varphi)\bar{m} = \Gamma(\varphi)\overline{lhm \dot{-} 1}\ \overline{m * m'},$$

и, значит, если $lhm > 0$, то $\mathsf{R}_1^*(\varphi)\overline{m*\langle n\rangle} = \Gamma(\varphi)\,\overline{lhm}\ \overline{m*\langle n\rangle} = \Gamma(\varphi)\,\overline{lhm \dot{-} 1}\ \overline{m*\langle n\rangle}\,(\varphi\bar{n}) = \mathsf{R}_1^*(\varphi)\bar{m}(\varphi\bar{n})$. Таким образом R_1^* — специальная примитивная рекурсия в $\mathcal{F}$.

Определение. *Пусть $\mathscr{C}' \subseteq \mathcal{F}$ и $\Gamma_i : \mathcal{F}_1^{n+1} \to \mathcal{F}_1$ $(i \leq n)$ — $\mathscr{C}' \cup \{B\}$-выразимые операции. Тогда решение $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ относительно $\xi_0, \ldots, \xi_n$ в $\mathcal{F}$ системы неравенства*

$$(27) \qquad \Gamma_i(\xi_0, \ldots, \xi_n) \leq \xi_i \quad (i \leq n)$$

называется $\mathcal{F}_1$-минимальным, если для любого решения $\psi_0, \ldots, \psi_n$ (27) относительно $\xi_0, \ldots, \xi_n$ в $\mathcal{F}_1$ справедливы неравенства $\varphi_i \leq \psi_i$ для каждого $i \leq n$. Элемент $\varphi \in \mathcal{F}$ называется $\mathcal{F}_1$-рекурсивным относительно $\mathscr{C}'$, если существуют система неравенств вида (27) и ее $\mathcal{F}_1$-минимальное решение $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ так, чтобы $\varphi = \varphi_0$. Оператор $\Gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ называется $\mathcal{F}'$-рекурсивным относительно $\mathscr{C}'$, если для любого $\psi \in \mathcal{F}$ $\Gamma(\psi)$ — член $\mathcal{F}_1$-минимального решения системы вида (27), зависящей от ψ как от параметра.

Предложение 5. *Для любой системы вида (27) существует $\mathscr{C}' \cup \mathscr{C}_0 \cup \{B\}$-выразимая операция $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ так, чтобы если $\varphi \in \mathcal{F}$ — $\mathcal{F}_1$-минимальное решение неравенства $\Gamma(\xi) \leq \xi$ относительно ξ, то $\varphi\bar{0}, \varphi\bar{1}, \ldots, \varphi\bar{n}$ — $\mathcal{F}_1$-минимальное решение (27) относительно $\xi_0, \ldots, \xi_n$.*

Доказательство. Для любых $\xi_0, \ldots, \xi_n$ из $\mathcal{F}_1$ полагаем

$$\Delta(\xi_0, \ldots, \xi_n) \lessgtr C(\xi_0, C(\xi_1, \ldots, C(\xi_n, O) \ldots)).$$

Из этого определения следует, что для любого $i \leq n$ имеет место

$$\Delta(\xi_0, \ldots, \xi_n)\bar{i} = \xi_i.$$

Положим для любого $\xi \in \mathcal{F}_1$

$$\Gamma(\xi) \lessgtr \Delta(\Gamma_0(\xi\bar{0}, \ldots, \xi\bar{n}), \ldots, \Gamma_n(\xi\bar{0}, \ldots, \xi\bar{n})).$$

Пусть φ — $\mathcal{F}_1$-минимальное решение неравенства $\Gamma(\xi) \leq \xi$ в $\mathcal{F}$. Тогда

$$\Gamma_i(\varphi\bar{0}, \ldots, \varphi\bar{n}) = \Gamma(\varphi)\bar{i} \leq \varphi\bar{i} \text{ для любого } i \leq n.$$

Если $\psi_0, \ldots, \psi_n$ — решение (27) относительно $\xi_0, \ldots, \xi_n$ в $\mathcal{F}_1$, то

$$\Gamma(\Delta(\psi_0, \ldots, \psi_n)) = \Delta(\Gamma_0(\psi_0, \ldots, \psi_n), \ldots, \Gamma_n(\psi_0, \ldots, \psi_n))$$

$$\leq \Delta(\psi_0, \ldots, \psi_n), \text{ откуда } \varphi \leq \Delta(\psi_0, \ldots, \psi_n)$$

и умножением справа по $\bar{i}$ получим $\varphi\bar{i} \leq \psi_i$ для каждого $i \leq n$.

Теорема 2 (первая теорема о рекурсии). *Любая система неравенств вида (27) имеет $\mathcal{F}_1$-минимальное решение $\varphi_0 \ldots, \varphi_n$ в $\mathcal{F}$, все члены φ_i которого $\mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}' \cup \{B, \mathsf{I}\}$-выразимы.*

Доказательство. На основании предложения 4 применимо предложение 3, согласно которому для любого терма r существует кодирующая функция с читающим элементом σ, являющимся $\mathscr{C} \cup R_1^*$-, и, следовательно, — $\mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C} \cup \{B, \mathsf{I}\}$-выразимым. По лемме 1 элемент $\omega \lessgtr \mathsf{I}'(AAC, C, \tau)$ будем $\mathcal{F}_1$-минимальным решением неравенства $AAC(I, B\xi)\sigma \leq \xi$ в $\mathcal{F}$. Применяя теорему 1 из [4], найдем натуральное число n так, чтобы $\omega\bar{n}$ было F_1-минимальным решением неравенства $r(\xi) \leq \xi$ относительно ξ в $\mathcal{F}$.

Таким образом теорема доказана в случае одного неравенства вида (27), а общий случай сводится к этому предложением 5.

Теорема 3 (о нормальной форме рекурсивных операторов). *Пусть* R_1 — *примитивно рекурсивная итерация и* R_1^* — *специальная примитивная рекурсия в* $\mathscr{F}$. *Тогда для любого* $\mathscr{F}_1$-*рекурсивного относительно* $\mathscr{C}'$ *оператора* $\Gamma: \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ *существуют натуральные числа* n *и* i *и элементы* c, α, τ *из* $\mathscr{F}$, *соответственно* $\mathscr{C}_0$-, $\mathscr{C}' \cup R_1$- *и* $\mathscr{C}' \cup R_1^*$-*выразимые, так, чтобы для любого* $\varphi \in \mathscr{F}$

$$\Gamma(\varphi) = \mathsf{I}(A(AC)(AAC),\ c(I,\ \alpha\mathsf{C}(\varphi))\tau)(\breve{D}\,\bar{n})\,\bar{i}.$$

Доказательство. Согласно предложению 5 любой $\mathscr{F}_1$-рекурсивный относительно $\mathscr{C}$ оператор $\Gamma: \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ имеет вид $\Gamma(\varphi) = \Gamma_0(\varphi)\bar{i}$ для некоторого натурального числа i, где для любого $\varphi \in \mathscr{F}$ $\Gamma_0(\varphi)$ есть $\mathscr{F}_1$-минимальное решение неравенства вида $\Delta(\varphi,\ \xi) \leqq \xi$ относительно ξ, для подходящей $\mathscr{C}' \cup \{B\}$-выразимой операции $\Delta: \mathscr{F}^2 \to \mathscr{F}$. Эта операция Δ задается некоторым термом r, для которого, на основании предложения 3, существует кодирующая функция k с читающим элементом σ вида $\sigma = c(I,\ \alpha\mathsf{C}(\varphi))\tau$, где элементы c, α и τ — выразимые указанным в формулировке теоремы образом. Пусть $\omega \lessgtr AAC(I,\ \upsilon)\sigma$, где $\upsilon \lessgtr \mathsf{I}(A(AC)(AAC),\ \sigma)$. Покажем, что ω — $\mathscr{F}_1$-минимальное решение неравенства $AAC(I,\ C\xi)\sigma \leqq \xi$ относительно ξ. Действительно, элемент υ есть, как легко видеть, $\mathscr{F}_1$-минимальное решение относительно η неравенства

$$C(AAC(I,\ \eta)\sigma) \leqq \eta. \tag{28}$$

Тогда $AAC(I,\ C\omega)\sigma = AAC(I,\ C(AAC(I,\ \upsilon)\sigma))\sigma \leqq AAC(I,\ \upsilon)\sigma = \omega$. Пусть $\chi \in \mathscr{F}_1$ и $AAC(I,\ C\chi)\sigma \leqq \chi$. Тогда умножением слева на C видно, что $C\chi$ — решение (28). Значит $\upsilon \leqq C\chi$, откуда

$$\omega = AAC(I,\ \upsilon)\sigma \leqq AAC(I,\ C\chi)\sigma \leqq \chi.$$

Таким образом к ω применима теорема 1 из [4], на основании которой $\mathscr{F}_1$-минимальное решение $\Delta(\varphi,\ \xi) \leqq \xi$ относительно ξ имеет вид $\omega k(x)$, т. е., $\Gamma_0(\varphi) = AAC(I,\ \upsilon)\sigma k(x)$. Поскольку k — кодирующая функция для r с читающим элементом σ, то тогда

$$\Gamma_0(\varphi) = C(I,\ \upsilon)(\sigma k(x)) = C(I,\ \upsilon)(DF(\breve{D}k(Ir))) = (I,\ \upsilon)F(\breve{D}k(Ir)) = \upsilon(\breve{D}k(Ir)).$$

Но $k(Ir) = \bar{n}$ для некоторого n, откуда

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0(\varphi)\bar{i} = \upsilon(\breve{D}\,\bar{n})\,\bar{i} = \mathsf{I}(A(AC)(AAC),\ \sigma)(\breve{D}\,\bar{n})\,\bar{i}$$

и, поставляя $\sigma = c(I,\ \alpha\mathsf{C}(\varphi))\tau$, получим искомое представление.

Прежде чем приступить к следующей теореме, отметим, что любой $\mathscr{C}' \cup \mathscr{C}_0 \cup \{B,\ \mathsf{I}\}$-выразимый элемент $\varphi \in \mathscr{F}$ является $\mathscr{F}_1$-рекурсивным относительно $\mathscr{C}'$, как это нетрудно показать индукцией по построению φ как $\mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}' \cup \{B,\ \mathsf{I}\}$-выразимого элемента. В силу теоремы 2 обратное также справедливо.

Теорема 4 (о параметризации). *Существует* $\mathscr{F}_1$-*рекурсивный относительно* $\mathscr{C}'$ *элемент* $\omega \in \mathscr{F}$, *такой, что:*

а) *для любого* $\mathscr{F}_1$-*рекурсивного относительно* $\mathscr{C}'$ *элемента* $\varphi \in \mathscr{F}$ *существует натуральное число* n *так, чтобы* $\varphi = \omega\bar{n}$;

б) *существует примитивно рекурсивная функция* s *двух аргументов так, чтобы для любых натуральных* n *и* m *имело место*

$$\omega\overline{s(n,\ m)} = \omega\bar{n}\,\bar{m}.$$

Доказательство. На основании предложения 3, применимого благодаря предложению 4, существует универсальная (в очевидном смысле) кодирующая функция $k(r,\ t)$ с читающим элементом σ, который, по предложению 4 $\mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}' \cup \{B,\ \mathsf{I}\}$-

выразим и значит $\mathscr{F}_1$-рекурсивен относительно $\mathscr{C}'$. По лемме 1 существует $\mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}' \cup \{B, \mathsf{I}\}$- выразимый, и значит $\mathscr{F}_1$-рекурсивный относительно $\mathscr{C}$, элемент $\omega_1 \in \mathscr{F}$ так, чтобы ω_1 был $\mathscr{F}_1$-минимальным решением неравенства $AAC(I, C\xi)\sigma \leqq \xi$ относительно ξ. Применяя теорему 1 из [4], заключаем, что $\omega_1 k(r, x)$ — $\mathscr{F}_1$-минимальное решение неравенства $\tilde{r}(\xi) \leqq \xi$ для любого r. Отсюда по предложению 5 следует, что для любого $\mathscr{F}_1$-рекурсивного относительно $\mathscr{C}$ элемента $\varphi \in \mathscr{F}$ существуют натуральные n и i так, чтобы $\varphi = \omega_1 \bar{n}\,\bar{i}$. Следовательно, теорема будет доказана, если найдем $\mathscr{F}_1$-рекурсивный относительно $\mathscr{C}'$ елемент $\omega \in \mathscr{F}$ так, чтобы

$$\omega\overline{\langle 0, \langle n, i\rangle\rangle} = \omega_1 \bar{n}\,\bar{i} \tag{29}$$

$$\omega\overline{\langle 1, \langle n, i\rangle\rangle} = \omega \bar{n}\,\bar{i} \tag{30}$$

для любых n и i (здесь и далее используем некоторые обозначения из доказательства теоремы 1). Для этого представим, при помощи (16), выражения $\xi(\pi_0\bar{m})(\pi_1\bar{m})$в виде $a_0\xi\pi'\bar{m}$, где $\xi \in \mathscr{F}_1$ — произвольный, a_0 и π' — соответственно $\{A, C\}$- и R_1-выразимые элементы $\mathscr{F}$. Кроме того, выберем, на основании теоремы 1, R_1-выразимый $\sigma_0 \in \mathscr{F}$ так, чтобы для любого натурального k, если $p_0(k) = 0$, то $\sigma_0\bar{k} = \bar{0}$ и, если $p_0(k) > 0$, то $\sigma_0\bar{k} = \bar{1}$. После этого определим ω как $\mathscr{F}_1$-минимальное решение з $\mathscr{F}$ относительно ξ неравенства $\Gamma(\xi) \leqq \xi$, где

$$\Gamma(\xi) \lesseqgtr a(AAC(a_0\omega_1\pi_1,\ a_0\xi\pi')\sigma_0)\mathsf{C}(\pi_1)\partial,$$

а a — элемент из (16). Согласно теореме 2 ω — $\mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}' \cup \{B, \mathsf{I}\}$ — выразимый, и, следовательно, — $\mathscr{F}_1$-рекурсивный относительно $\mathscr{C}'$. Кроме того $\Gamma(\omega) = \omega$, откуда для $k \lesseqgtr \langle 0, \langle n, i\rangle\rangle$ получается при помощи (16),

$$\omega\bar{k} = \Gamma(\omega)\bar{k} = AAC(a_0\omega_1\pi',\ a_0\omega\pi')\sigma_0\bar{k}\,(\pi_1\bar{k})$$

$$= C(a_0\omega_1\pi',\ a_0\omega\pi')\,(\sigma_0\bar{k})\,(\pi_1\bar{k}) = a_0\omega_1\pi'\,\overline{\langle n, i\rangle} = \omega_1\bar{n}\,\bar{i}.$$

Это доказывает (29), а (30) получается аналогичным образом.

Отметим, что из теоремы о параметризации обычным диагональным рассуждением легко следует вторая теорема о рекурсии: Для любого $\mathscr{F}_1$-рекурсивного относительно $\mathscr{C}'$ элемента $\psi \in \mathscr{F}$ существует натуральное число n так, чтобы $\omega(\psi\bar{n}) = \omega\bar{n}$.

4. Наконец, уже не опираясь на теорему 1 из [4], докажем теорему о представимости частично рекурсивных функций в $\mathscr{F}$. Для этого условимся называть частично рекурсивную функцию $f(x_0, \ldots, x_{k-1})$ сильно представимой в $\mathscr{F}$ элементом $\varphi \in \mathscr{F}$, если для любых натуральных чисел $n_0, \ldots, n_{k-1}$ и m имеют место:

1) если $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) = m$, то $\varphi\bar{n}_0 \ldots \bar{n}_{k-1} = \bar{m}$;

2) если значение $f(n_0, \ldots, n_{k-1})$ не определено, то

$$\varphi\bar{n}_0 \ldots \bar{n}_{k-1} = 0.$$

Теорема 5. *Любая частично рекурсивная функция $f(x_0, \ldots, x_{k-1})$ сильно представима в $\mathscr{F}$ подходящим $\mathscr{C}_0 \cup \{B, \mathsf{I}\}$-выразимым элементом $\varphi \in \mathscr{F}$.*

Доказательство. Мы рассмотрим лишь случай $k = 1$. Многоместный случай легко сводится к этому, например, как в доказательстве теоремы 1. Воспользуемся следующим представлением произвольной частично рекурсивной функции $F(x)$:

$$F(x) \simeq a([g, h](b(x))), \tag{31}$$

где a, b, g, h — одноместные примитивно рекурсивные функции, а $[g, h]$ — итерация g, управляемая h, в смысле п. 1. 2. из гл. I книги [8]. (Это представление по существу доказано в цитированном пункте [8], а также следует из теоремы о нормальной форме рекурсивных элементов из [8], с. 355). Если функции f_i сильно представимы в $\mathscr{F}$ элементами φ_i $(i<2)$, то их композиция $f_0(f_1(x))$ сильно представляется элементом $A\varphi_0\varphi_1$. Тогда ввиду представления (31) достаточно показать, что итерация $[g, h]=f$ одноместных примитивно рекурсивных функций g и h сильно представима. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $h(n)\leq 1$ для любого n. Тогда функция f удовлетворяет равенству

$$f(x)\simeq\begin{cases} x & , \text{ если } h(x)=0, \\ f(g(x)), & \text{ если } h(x)=1, \end{cases} \tag{32}$$

которое можно рассматривать как индуктивное определение графика f.

На основании теоремы 1 существуют R_1-выразимые $\psi, \chi\in\mathscr{F}$ так, чтобы $\psi\bar{n}=\overline{g(n)}$ и $\chi\bar{n}=\overline{1\dot{-}h(n)}$ для любого n. Тогда

$$D\overline{1\dot{-}h(n)}\,\bar{n}=D(\chi\bar{n})\bar{n}=C(AD\chi)(D\bar{n}\,\bar{n})=C(AD\chi)(\partial\bar{n})=\chi_1\bar{n},$$

где $\chi_1\lessgtr A(C(AD\chi))\partial$. Положим

$$\Gamma(\xi)\lessgtr A(ACC(A\xi\psi,\ C(I,\ O)))\chi_1$$

и определим φ как $\mathscr{F}_1$-минимальное решение относительно ξ неравенства $\Gamma(\xi)\leq\xi$ в $\mathscr{F}$. При помощи предложения 2 нетрудно представить выражение $\Gamma(\xi)$ в виде, удобном для применения леммы 1, из которой тогда будет следовать, что $\varphi-\mathscr{C}_0\cup\{B, \mathbf{I}\}$-выразимый элемент $\mathscr{F}$. Поскольку должно иметь место равенство $\Gamma(\varphi)=\varphi$, то для любого натурального n получается

$$\varphi\bar{n}=\Gamma(\varphi)\bar{n}=ACC(A\varphi\psi,\ C(I,\ O))(\chi_1\bar{n})$$

$$=C(C(A\varphi\psi,\ C(I,\ O)))(D\overline{1\dot{-}h(n)}\,\bar{n})=C(A\varphi\psi,\ C(I,\ O))\overline{1\dot{-}h(n)}\,\bar{n}.$$

Тогда, если $h(n)=0$, то $1\dot{-}h(n)=1$ и значит

$$\varphi\bar{n}=C(I,\ O)\bar{o}\ \bar{n}=I\bar{n}=\bar{n},$$

а если $h(n)=1$, то $1\dot{-}h(n)=0$ и значит

$$\varphi\bar{n}=A\varphi\psi\bar{n}=\varphi(\psi\bar{n})=\varphi\overline{g(n)}.$$

Отсюда индукцией, соответствующей определению (32) графика функции f, следует что $f(n)=m$ влечет $\varphi\bar{n}=\bar{m}$. Допустим теперь, что значение $f(n)$ неопределено. Тогда опять из определения (32) видно, что для любого натурального j значение $f(g^j(n))$ неопределено и $h(g^j(n))=1$, где $g^j(n)\lessgtr g(g(\ldots g(n)\ldots))$ (j раз). На основании (б) и (в) из [4], 2, существует наибольший элемент $\vartheta\in\mathscr{F}_1$ со свойством: для любого натурального j $\vartheta\overline{g^j(n)}\leq 0$. Точнее элемент ϑ определяется через $\vartheta\lessgtr\inf(O/\overline{g^j(n)})$. Покажем, что $\Gamma(\vartheta)\leq\vartheta$. В самом деле

$$\Gamma(\vartheta)\overline{g^j(n)}=ACC(A\vartheta\psi,\ C(I,\ O))(\chi_1\overline{g^j(n)})=C(A\vartheta\psi,\ C(I,O))\,\overline{1\dot{-}h(g^j(n))}\,\overline{g^j(n)}$$

и, поскольку $1\dot{-}h(g^j(n))=0$, то

$$\Gamma(\vartheta)\overline{g^j(n)}=A\vartheta\psi\overline{g^j(n)}=\vartheta(\psi\overline{g^j(n)})=\vartheta\overline{g^{j+1}(n)}\leq 0.$$

Отсюда по определению $\vartheta\Gamma(\vartheta)\leq\vartheta$ и значит $\varphi\leq\vartheta$. Следовательно, $\varphi\bar{n}\leq\vartheta\bar{n}=\vartheta\overline{g^0(n)}\leq 0$ Таким образом f сильно представляется элементом φ. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Л. Иванов. Итеративные операторные пространства. *Доклады БАН*, **33**, 1980, № 6, 735—738.
2. Л. Л. Иванов. Итеративни операторни пространства. (Дисертацая). С., 1980.
3. L. L. Ivanov. Algebraic recursion theory. Chichester, 1986.
4. J. A. Zašev. B-combinatory algebras. *Serdica Bulg. math. publ.*, **12**, 1986, 225—237.
5. N. Georgieva. Another simplification of the recursion scheme. *Arch. math. Loik u. Grundlagenforsch.*, **18**, 1976, 1—3.
6. А. Г. Драгалин. Математический интуиционизм. М. 1979.
7. С. К. Клини. Введение в метаматематику. М., 1957.
8. Д. Г. Скордев. Комбинаторные пространства и рекурсивность в них. С., 1980.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 24. 12. 1984
В переработанном виде 26. 11. 1986