Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОПИСАНИЕ ВСЕХ РЕАЛИЗАЦИЙ КРАТНОСТИ РАМСЕЯ M (3,5)

ИВАН Ж. ПАШОВ

Множество из p вершин графа называется p-кликой (соотв. p-антикликой), если любые две из этих вершин смежны (соотв. — не смежны). Кратностью Рамсея $M(p,q)$ называется минимум суммы чисел p-клик и q-антиклик в произвольном графе с $R(p,q)$ вершинами, где $R(p,q)$ — число Рамсея. Реализация кратности Рамсея $M(p,q)$, есть граф с $R(p,q)$ вершинами, у которого сумма чисел p-клик и q-антиклик равна $M(p,q)$. Известны три реализации кратности Рамсея $M(3,5)$ (см. [2] и [9]). В этой работе получены все остальные реализации этой кратности.

1. Введение. Рассматриваются только обыкновенные графы. Множество из p вершин графа называется p-кликой (соотв. — p-антикликой), если любые две из этих вершин смежны (соотв. — не смежны). Числом Рамсея — $R(p,q)$, называется минимальное число n, такое, что любой n-вершинный граф содержит p-клику или q-антиклику. Существование чисел $R(p,q)$ доказано впервые Рамсеем [16]. Очевидно, $R(p,q)=R(q,p)$ и $R(p,2)=p$. Известны только семь нетривиальных чисел Рамсея, среди которых: $R(3,3)=6$, $R(3,4)=9$, $R(3,5)=14$.

Кратностью Рамсея — $M(p,q)$, называется минимум суммы чисел p-клик и q-антиклик в произвольном графе с $R(p,q)$ вершинами. Из определения чисел Рамсея следует, что $M(p,q)\geq 1$, $M(p,2)=1$ и $M(p,q)=M(q,p)$. Известны еще кратности Рамсея $M(3,3)=2$ [17], $M(3,4)=1$ [4], $M(3,5)=4$ [1] и оценки для кратностей Рамсея $M(4,4)\geq 3$ [5], $M(4,4)\leq 12$ и $M(3,6)\leq 4$[15]. В статьях [15,6,7] и [1] можно проследить этапы нахождения кратности Рамсея $M(3,5)$.

Следуя [14], назовем реализацией кратности Рамсея $M(p,q)$ граф с $R(p,q)$ вершинами, у которого сумма чисел p-клик и q-антиклик равна $M(p,q)$. Известные все реализации кратностей Рамсея $M(3,3)$ [14] (см. также [8]) и $M(3,4)$ [4]. Одна из последних реализаций изображена на рис. 1 и играет основную роль в нахождении реализаций кратности Рамсея $M(3,5)$.

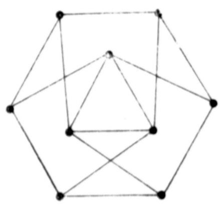

Рис. 1

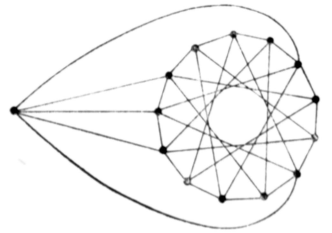

Рис. 2

2. Реализации кратности Рамсея $M(3,5)$. После доказательства, что кратность Рамсея $M(3,5)$ равна четырем [1], стало ясным, что конструкция из [15] дает одну реализацию этой кратности без 5-антиклик и с вершиной, принадлежащей всем четырем 3-кликам (см. рис. 2). Реализация с такими свойствами единственна [2]. Этот результат усилен в [3], где доказана:

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 224—238.

Теорема A. *Пусть граф G является реализацией кратности Рамсея M(3,5) без 5-антиклик. Если граф G имеет больше пяти вершин, непринадлежащих его 3-кликам, то G совпадает с графом на рис. 2.*

В [2] доказана еще следующая

Теорема B. *Существует единственный 14-вершинный граф без 5-антиклик, имеющий ровно четыре 3-клики, которые попарно не имеют общих вершин. Этот граф изображен на рис. 3.*

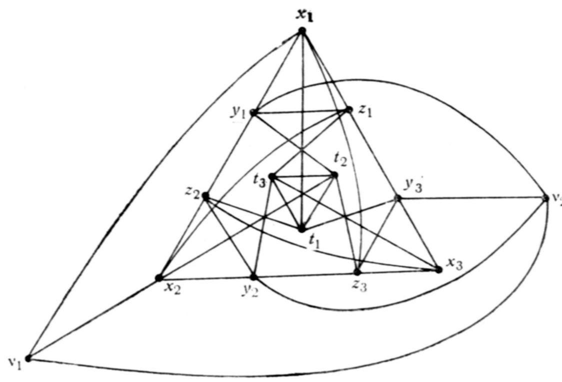

Рис. 3

В [9] получена еще одна реализация кратности Рамсея M(3,5). Более того, там доказана

Теорема C. *Существует единственный 14-вершинный граф, имеющий ровно одну 5-антиклику и три 3-клики. Этот граф изображен на рис. 4.*

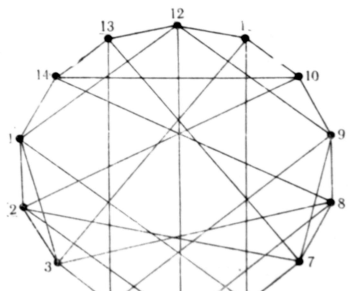

Рис. 4

В статьях [10,11] и [12] найден минимум чисел 5-антиклик 14-вершинного графа с k 3-кликами, где $k=0,1,2$. Для этого минимума получены соответственно значения 6, 5, 3. В частности, выполняется следующая

Теорема D. *Не существует реализация кратности Рамсея M(3,5), имеющая меньше трех 3-клик.*

В настоящей работе заканчивается поиск реализаций кратности Рамсея $M(3,5)$, а именно доказана

Теорема. *Все реализации кратности Рамсея $M(3,5)$ суть графы, изображенные на рисунках 2, 3, 4, 10, 12, 13 и граф, который получается от графа на рис. 10 добавлением ребра* [5,6].

Отметим, что (как не сложно проверить) граф с рис. 3 (соотв. рис. 13) можно получить из графа с рис. 4, добавляя ребро [11,13] (соотв. [1,9]).

3. Доказательство теоремы. Пусть граф G является реализацией кратности Рамсея $M(3,5)$, т. е. G имеет 14 вершин и сумма чисел его 3-клик и 5-антиклик равна четырем.

Если G содержит 5-антиклику, то из теорем C и D получим, что G совпадает с графом на рис. 4.

Впредь будем предполагать, что выполняется:

(1) Граф G не имеет 5-антиклик и, следовательно, содержит ровно четыре 3-клики.

Обозначим через V_i множество из всех вершин графа G, каждая из которых принадлежит ровно i 3-кликам $(0 \leq i \leq 4)$. Очевидно $|V_0| \geq 2$. Если $|V_0| = 2$, то 3-клики графа G попарно не имеют общих вершин и из теоремы B получим, что G совпадает с графом на рис. 3. Если $|V_0| \geq 6$, то из (1) и теоремы A получим, что G совпадает с графом на рис. 2.

Пусть в дальнейшем $3 \leq |V_0| \leq 5$.

Докажем, что $V_4 = \emptyset$. Допустим, что G имеет вершину i, принадлежащую всем четырем 3-кликам. Так как $|V_0| \leq 5$, любые две 3-клики графа G содержат только одну общую вершину — вершину i. Любые две вершины, принадлежащие разным 3-кликам, несмежны (иначе получим новую — пятую, 3-клику). Следовательно, множество из всех вершин из 3-клик графа G, отличных от i, порождает в G подграф N с восьмью вершинами и четырьмя попарно несмежными ребрами. Пусть j — вершина графа G, непринадлежащая его 3-кликам. Тогда j не смежна хотя бы одной вершине из каждой пары смежных вершин подграфа N. Следовательно, существуют четыре вершины подграфа N, которые, вместе с вершиной j, составят 5-антиклику графа G, что противоречит (1).

Итак, $V_4 = \emptyset$. В [3, лемма 1] доказано, что в 14-вершинном графе без 5-антиклик, имеющем четыре 3-клики, ни одна вершина не принадлежит ровно трем 3-кликам. Следовательно, в графе G выполняется еще $V_3 = \emptyset$. Тогда, очевидно, имеют место $|V_0| + |V_1| + |V_2| = 14$ и $|V_1| + 2|V_2| = 4.3 = 12$ (вершины из V_2 считаются два раза). Следовательно, возможны три ситуации:

случай 1. $|V_0| = 3$, $|V_1| = 10$, $|V_2| = 1$;
случай 2. $|V_0| = 4$, $|V_1| = 8$, $|V_2| = 2$;
случай 3. $|V_0| = 5$, $|V_1| = 6$, $|V_2| = 3$.

Прежде чем рассмотреть эти случаи поотдельно, докажем некоторые общие утверждения.

Воспользуемся следующими обозначениями:

$\langle N \rangle$ — подграф, порожденный некоторым множеством N из вершин графа G;

$A(i)$ — множество из всех вершин графа G, смежных его вершине i; $\bar{A}(i_1, \ldots, i_k)$ — множество из всех вершин графа G, отличных от его вершин $i_1, \ldots, i_k$ и не смежных ни одной из них.

Из определений множеств V_i следует:

(2) Если $j \in V_i$, $i = 0, 1, 2$, то подграф $\langle A(j) \rangle$ графа G имеет ровно i ребер.

В частности, когда $j \in V_0$, вершины из $A(j)$ попарно несмежны и, следовательно, выполняется:

(3) Если вершина i_1 из V_0 смежна m вершинам из V_1 и n вершинам из V_2, то каждый из подграфов $\langle \bar{A}(i_1, i_2, \ldots, i_k) \rangle$ ($k \geq 1, i_2, \ldots, i_k$ — вершины G) содержит не больше $4 - (m + 2n)$ 3-клик.

Из (1) получаем:
(4) Если i и j — несмежные вершины графа G, то подграфы $\langle \bar{A}(i) \rangle$ и $\langle \bar{A}(i,j) \rangle$ не содержат l-антиклик, где l равно соответственно 4 и 3.

В [3, лемма 2] доказано, что, если 14-вершинный граф P не имеет 5-антиклик и, содержит ровно четыре 3-клики, причем каждая вершина графа P принадлежит не больше двум его 3-кликам, то вершины графа P, не принадлежащие его 3-кликам, имеют степень четыре. Так так в графе G выполняются (1) и $V_4 = V_3 = \varnothing$, получим:
(5) Каждая вершина из V_0 смежна ровно четырем вершинам графа G.

В [13] доказано:
(6) Любой 9-вершинный граф содержит 3-клику или 4-антиклику.

Отсюда и из (3), (4), (5) следуют:
(7) Подграф $\langle V_0 \rangle$ не имеет изолированных вершин (вершин степени 0).

Действительно, если вершина i изолированная в $\langle V_0 \rangle$, то подграф $\langle \bar{A}(i) \rangle$ не имеет 3-клик (см. (5) и (3)). Так как этот подграф имеет девять вершин (5) и не содержит 4-антиклик (4), получаем противоречие с (6).
(8) Каждая вершина подграфа $\langle V_0 \rangle$ смежна не больше одной вершине из V_2, а каждая его висячая вершина (вершина степени 1) несмежна ни одной вершине из V_2 (т. е. смежна трем вершинам из V_1 — из трех разных 3-клик).

Действительно, если вершина i из V_0 смежна больше одной вершине из V_2, то подграф $\langle \bar{A}(i) \rangle$ не содержит 3-клик (3). Так как этот подграф имеет девять вершин (5) и не содержит 4-антиклик (4), получаем противоречие с (6). Если i — висячая в $\langle V_0 \rangle$ вершина, которая смежна вершине из V_2, то подграф $\langle \bar{A}(i) \rangle$ не имеет 3-клик (3), что снова приведет к противоречию.

Воспользуемся следующим утверждением из [17]:
(9) Любой 6-вершинный (соотв. 7-вершинный и 8-вершинный) граф без 3-антиклик имеет хотя бы две (соотв. — четыре и восемь) 3-клики.
(10) Пусть i и j — вершины из V_0. Тогда $|A(i) \cap A(j)| \leq 2$.

Допустим, что для некоторых двух вершин i, j из V_0 выполняется $|A(i) \cap A(j)| \geq 3$. Тогда подграф $\langle \bar{A}(i,j) \rangle$ имеет хотя бы семь вершин (5) и вершины i, j не смежны (иначе будут принадлежать 3-клике). Из (4) получим, что подграф $\langle \bar{A}(i, j) \rangle$ не содержит 3-антиклик. Согласно (9), этот подграф содержит все четыре 3-клики графа G. Следовательно, каждая из несмежных вершин i, j смежна четырем вершинам из V_0 (см. (3) и (5)), что очевидно невозможно ($|V_0| \leq 5$).
(11) Пусть i и j — вершины подграфа $\langle V_0 \rangle$, для которых $|A(i) \cap A(j)| = 2$, причем вершина i смежна ровно двум вершинам из V_0. Тогда остальные две вершины, смежные i, принадлежат V_1 — двум разным 3-кликам. Притом каждая 3-клика, содержащая вершину, смежную j, есть одна из этих двух 3-клик.

Если допустим, что i смежна некоторой вершине из V_2, то подграф $\langle \bar{A}(i,j) \rangle$ будет содержать не больше одной 3-клики (3). Так как вершины i и j не принадлежат 3-кликам, они не смежны и, согласно (4), подграф $\langle \bar{A}(i, j) \rangle$ не содержит 3-антиклик. Из (9) следует, что этот подграф имеет не больше 5 вершин, что противоречит $|A(i) \cap A(j)| = 2$ (см. (5)).

Итак, i смежна двум вершинам и V_1 (5). Так как i не принадлежит 3-кликам, эти вершины не смежны. Следовательно, они принадлежат двум разным 3-кликам. Если j смежна некоторой вершине из 3-клик, непринадлежащей ни одной из этих двух 3-клик, то подграф $\langle \bar{A}(i, j) \rangle$ содержит не больше одной 3-клики и снова получим противоречие.
(12) Пусть i и j — вершины подграфа $\langle V_0 \rangle$, одна из которых — висячая в нем. Тогда $|A(i) \cap A(j)| \leq 1$.

Действительно, в противном случае подграф $\langle \bar{A}(i, j) \rangle$ имеет хотя бы шесть вершин (5) и вершины i, j несмежны (иначе будут принадлежать 3-клике). Из (4), получим, что подграф $\langle \bar{A}(i, j) \rangle$ не имеет 3-антиклик. С другой стороны, поскольку i — висячая вершина $\langle V_0 \rangle$, из (3) получим, что этот подграф содержит не больше одной 3-клики, что противоречит (9).

В дальнейшем многократно будем пользоваться следующим утверждением из [4]:
(13) Существует единственный 9-вершинный граф без 4-антиклик, имеющий ровно одну 3-клику. Этот граф изображен на рис. 1. Отметим, что вершины, непринадлежащие 3-клике, порождают простой 6-цикл и каждая из них смежна ровно одной вершине из 3-клики. Кроме того, две вершины из 6-цикла смежны одной и той же вершине из 3-клики только тогда, когда эти две вершины находятся через две вершины одна от другой (в порядке следования вершин в цикле). Такие вершины мы будем называть противостоящими в простом 6-цикле.

Отсюда следует:
(14) Если i — висячая вершина подграфа $\langle V_0\rangle$, то подграф $\langle \bar{A}(i)\rangle$ совпадает с графом на рис. 1.

Согласно (8), 9-вершинный подграф $\langle \bar{A}(i)\rangle$ имеет ровно одну 3-клику. Так как этот подграф не содержит 4-антиклик (4), из (13) следует (14).

Рассмотрим теперь указанные выше три возможные ситуации.

Случай 1. $|V_0|=3$, $|V_1|=10$, $|V_2|=1$. Так как вершины из V_0 не принадлежат 3-кликам, из (7) получим, что подграф $\langle V_0\rangle$ имеет ровно два ребра. Пусть $1, 2, 3$ — вершины, а $[1, 3]$ и $[2, 3]$ — ребра этого подграфа и вершины графа G обозначены как на рис. 5. Согласно (8), каждая из висячих в $\langle V_0\rangle$ вершин $1, 2$ смежна одной или двум (несмежным) вершинам из $\{5, 6, 7, 8\}$.

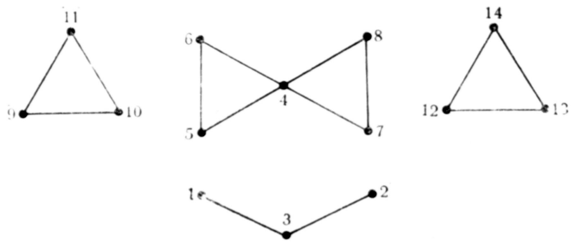

Рис. 5

Допустим сначала, что некоторая из вершин 1, 2 смежна двум вершинам из множества $\{5, 6, 7, 8\}$. Не теряя общности, можно считать, что вершина 1 смежна вершинам 5 и 7 из этого множества и еще вершине 9. Согласно (14), подграф $\langle \bar{A}(1)\rangle$ совпадает с графом на рис. 1. Следовательно, вершины 6, 4, 8, 10, 11, 2 этого подграфа порождают простой 6-цикл. Тогда вершина 2 смежна одной из вершин 6, 8 и одной из вершин 10, 11 (и, разумеется, — одной вершине из 3-клики $\{12, 13, 14\}$ подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$). Не теряя общности, предположим, что вершина 2 смежна вершинам 6, 10 и 12. Тогда в подграфе $\langle \bar{A}(1)\rangle$ смежны еще вершины 8 и 11. Подграф $\langle \bar{A}(2)\rangle$ тоже совпадает с графом на рис. 1 (см. (14)). Следовательно, вершины 5, 1, 9, 11, 13, 14 порождают простой 6-цикл. Очевидно вершины 5 и 11 должны быть противостоящими в этом 6-цикле (см. (13)). Получаем противоречие, так как эти вершины смежны разным вершинам (4 и 8, соответственно) из 3-клики $\{4, 7, 8\}$ подграфа $\langle \bar{A}(2)\rangle$.

Таким образом доказано, что каждая из вершин 1, 2 смежна ровно одной из вершин 5, 6, 7, 8. Не теряя общности, предположим, что вершина 1 смежна вершинам 5, 9, 12 (см. рис. 5). Напомним, что согласно (14), подграф $\langle \bar{A}(1)\rangle$ совпадает с графом на рис. 1. Следовательно, вершина 2 этого подграфа смежна некоторой из вершин 7, 8 из его 3-клики $\{4, 7, 8\}$ (согласно (8), вершина 2 несмежна вершине 4 из V_2). Так как вершина 2 смежна ровно одной из вершин 5, 6, 7, 8 получаем, что 2 не смежна вершине 6. Следовательно, вершины 2, 6. 10, 11, 13, 14 подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$ могут породить простой 6-цикл только если вершины 2 и 6 — противостоящие в этом 6-цикле (см. (13)). Получаем противоречие, так как вершина 4 из 3-клики-

$\{4, 7, 8\}$ подграфа $\langle \bar{A}(1) \rangle$ смежна только одной (вершине 6) из этих вершин. Следовательно, вершины графа G не могут быть распределенными, как в случае 1.

Случай 2. $|V_0|=4$, $|V_1|=8$, $|V_2|=2$. Обозначим через 1, 2, 3, 4 вершины из V_0. На рисунках 6, 7 и 8 показаны все возможные расположения 3-клик графа G в рассматриваемом случае.

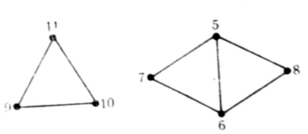

Рис. 6

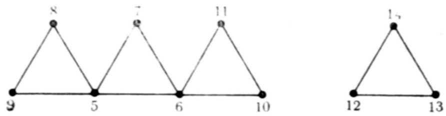

Рис. 7

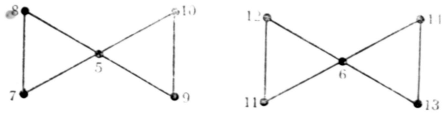

Рис. 8

Как и в первом случае, выясним сначала структуру подграфа $\langle V_0 \rangle$. Если в этом подграфе некоторая вершина имеет степень 3, то остальные его вершины — висячие. Так как $|V_1|=8$, из (8) получим, что некоторые две из этих вершин смежны одной и той же вершине из V_1, что противоречит (12). Следовательно, в подграфе $\langle V_0 \rangle$ все вершины имеют степень 1 или 2 (см. (7)). Рассмотрим поочередно ситуации, когда $\langle V_0 \rangle$ имеет или не имеет висячих вершин.

Подслучай 2. а. Подграф $\langle V_0 \rangle$ — регулярный степени 2. Тогда $\langle V_0 \rangle$ является простым 4-циклом 1, 2, 3, 4, 1. Из (10) и (11) следует, что вершины 1 и 3 смежны в совокупности четырем разным вершинам из V_1, принадлежащим двум 3-кликам (по две вершины в каждой). Вершины 2 и 4 не смежны ни одной из вершин, смежных 1 или 3 и, следовательно, смежны в совокупности четырем разным вершинам из остальных двух 3-клик (по две вершины в каждой, см. (10) и (11)). В частности получаем, что 3-клики графа G не могут быть расположенными как на рис. 6 и 7 (3-клика $\{5, 6, 7\}$ содержит только одну вершину из V_1).

Следовательно, в рассматриваемом подслучае 3-клики графа G расположены как на рис. 8. Если 3-клики, содержащие вершины, смежные 1 или 3, имеют общую вершину i, то получим 5-антиклику $\{1, 3, i, j, k\}$ где j и k — вершины из остальных двух 3-клик, несмежные вершине i и между собой. Следовательно, не теряя общности, можно считать, что вершина 1 смежна вершинам 7 и 11, вершина 3 — вершинам 8 и 12, вершина 2 — вершинам 9 и 13 и вершина 4 — вершинам 10 и 14 (см. рис. 9).

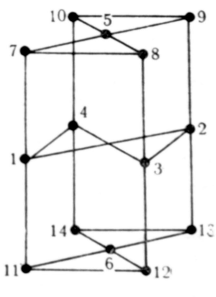

Рис. 9

Теперь докажем, что вершина 7 смежна вершине 12 и одной из вершин 13, 14. Отсюда получим (ввиду симметрии на рис. 9), что вершина i, $i=8, 9, \ldots, 14$, смежна ровно четырем вершинам из 3-клик. Например, вершина 8 смежна еще вершине 11 одной из вершин 13, 14 (которая не смежна 7, так как 7 и 8 — смежны).

Действительно, если вершина 7 смежна меньше двум вершинам из $\{12, 13, 14\}$, то некоторый из подграфов $\langle \bar{A}(7, i) \rangle$, $i=2, 3, 4$, имеет шесть вершин и содержит только одну 3-клику. Так как эти подграфы не имеют 3-антиклик (4), получаем противоречие с (9). Следовательно, вершина 7 смежна хотя бы двум вершинам из $\{12, 13\ 14\}$. Поскольку подграф $\langle A(7)\rangle$ уже имеет ребро [5, 8], из (2) получим, что 7 смежна только одной из смежных вершин 13, 14.

Ввиду симметрии (см. рис. 9), можно считать, что вершина 7 смежна вершинам 12 и 13. Тогда вершина 8 смежна вершинам 11 и 14, вершина 13 — вершине 10, а 14 — вершине 9. Вершина 9 смежна еще вершине 12 (иначе получим 5-антиклику $\{1, 8, 9, 12, 13\}$, что противоречит (1)). Тогда вершина10 смежна вершине 11. Допустим, что некоторая вершина i графа G, отличная от 5 и 6, инцидентна ребру, отличному от пречисленных выше (см. рис. 10) Тогда из (2) получим, что подграф $\langle A(i)\rangle$, содержит 5-антиклику, что противоречит (1). Следовательно, в рассматриваемой ситуации граф G либо совпадает с графом на рис. 10, либо получается от него добавлением ребра [5, 6].

Оба эти графа очевидно имеют ровно четыре 3-клики. Допустим, что некоторый из них имеет 5-антиклику. Эта 5-антиклика содержит хотя бы одну вершину из соответствующее V_0 (каждая 3-клика содержит не больше одной вершины из 5-антиклики). Однако подграфы $\langle \bar{A}(i)\rangle$, $i\in V_0$ обоих графов совпадают с графом на рис. 11 (штриховой линией обозначено ребро [5, 6]) и не имеют 4-антиклик. Следовательно, полученные два графа являются (единственными) реализациями кратности Рамсея $M(3, 5)$ без 5-антиклик в рассматриваемом подслучае.

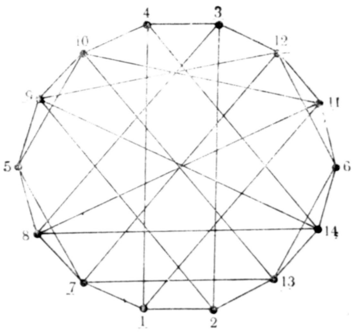

Рис. 10

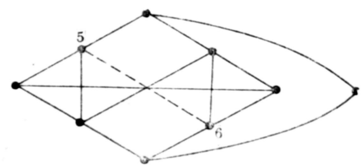

Рис. 11

Подслучай 2. б. Подграф $\langle V_0\rangle$ имеет висячую вершину.

Следовательно, либо $\langle V_0\rangle$ имеет ровно два (несмежные) ребра, либо $\langle V_0\rangle$ есть простая незамкнутая цепь с четырьмя вершинами. Рассмотрим эти возможности в отдельности.

Пусть сначала $\langle V_0\rangle$ имеет только два ребра: [1, 2] и [3, 4].

Если 3-клики графа G расположены как на рис. 6 или 7, то, применяя (2) к вершине 7, получим, что она смежна не больше двум вершинам из V_0. Пусть вершина 7 не смежна вершине 1. Согласно (8), подграф $\langle \bar{A}(1)\rangle$ содержит 3-клику $\{5, 6, 7\}$. Так как этот подграф должен совпадать с графом на рис. 1 (см. (14)), его вершины 3 и 4 должны быть смежными вершине 7 из 3-клики $\{5, 6, 7\}$ подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$ (см. (8)). Это противоречит (2), примененному к вершине 7.

Следовательно, в рассматриваемой ситуации 3-клики графа G расположены как на рис. 8. Не теряя общности, можно предположить, что вершина 1 смежна вершинам 7, 9 и 11 (см. (5) и (8)). Применяя (14) к вершине 1, получим, что каждая из вершин 3, 4 смежна одной вершине из 3-клики $\{6, 13, 14\}$ подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$. Учитывая (8), можем, не теряя общности, предположить, что 3 смежна 13, а 4 смежна 14 (вершины 3 и 4 — смежны). Из (14) следует еще, что в подграфе $\langle \bar{A}(1)\rangle$ вершины 8, 5, 10, 3, 4, 12 порождают простой 6-цикл. Следовательно, вершина 12 смежна одной из 8, 10 и одной из 3, 4. Не теряя общности, можно считать, что 12 смежна 10 и

4. Тогда 8 смежна 3. Из (14) получим еще, что 6 смежна 8 (которая противостоит вершине 12 в 6-цикле — см. (13)), а вершины 13 и 14 смежны соответственно вершинам 10 и 5. Таким образом вершина 8 не смежна вершинам 1, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (иначе получим новую 3-клику). Если 8 не смежна еще вершине 2, то $\langle \bar{A}(8) \rangle$ будет 9-вершинным графом без 4-антиклик и без 3-клик, что противоречит (6). Следовательно, вершина 8 смежна вершине 2. Рассуждая аналогично, для вершины 10, получимчто она тоже должна быть смежной вершине 2 (вершина 10 не смежна вершинам 1, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 14). Тогда вершина 2 не смежна вершинам 11, 12, 13 (иначе получим новую 3-клику). Следовательно, вершина 2 должна быть смежной вершине 14 (единственно возможной из V_1). Применяя теперь (14) к вершине 2, получим, что вершина 9 должна быть смежной вершине 6 из 3-клики {6, 11, 12} подграфа $\langle \bar{A}(2) \rangle$ (иначе получим новую 3-клику). Аналогично, вершины 3 и 5 должны быть смежными вершине 11, а вершина 7 — вершине 12 из этой 3-клики. Тогда в $\langle \bar{A}(2) \rangle$ смежны еще пары вершин {7, 13} и {4, 9}.

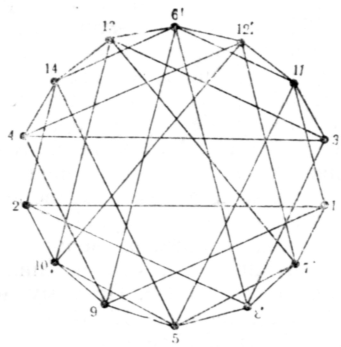

Рис. 12

Допустим, что некоторая вершина i графа G инцидентна ребру, отличному от перечисленных выше (см. рис. 12). Тогда из (2) получим, что подграф $\langle A(i) \rangle$ содержит 5-антиклику, что противоречит (1). Следовательно, граф G совпадает с графом на рис. 12.

Этот граф очевидно имеет ровно четыре 3-клики. Если допустим, что граф G (рис. 12) содержит 5-антиклику, то она должна содержать хотя бы одну вершину из V_0. Однако в графе G (см. рис. 12) для любого $i \in V_0$ подграф $\langle \bar{A}(i) \rangle$ совпадает с графом на рис. 1, который не имеет 4-антиклик (13). Следовательно, граф на рис. 12 является (единственной) реализацией кратности Рамсея $M(3, 5)$ без 5-антиклик в рассматриваемой ситуации.

Рассмотрим теперь вторую возможную ситуацию в подслучае 2. б. — когда подграф $\langle V_0 \rangle$ есть простая цепь 1, 2, 3, 4.

Если 3-клики графа G расположены как на рис. 6, то, согласно (8) и (2), каждая из висячих вершин 1, 4 подграфа $\langle V_0 \rangle$ смежна хотя бы одной из вершин 7, 8.

Допустим сначала, что некоторая из вершин 1, 4 — например, вершина 1, смежна обеим вершинам 7 и 8. Не теряя общности, предположим, что вершина 1 смежна еще вершине 9. Согласно (14), вершины 3, 4, 5, 6, 10, 11 подграфа $\langle \bar{A}(1) \rangle$ порождают простой 6-цикл. Так как вершина на 4 не смежна вершинам 5 и 6 (см. (8)), она должна быть смежной некоторой из вершин 10, 11 — например, вершине 10. Тогда вершина 11 смежна 5 или 6. Не теряя общности, можно предположить, что 11 смежна вершине 5, и тогда 3 смежна 6, т. е. 3, 4, 10, 11, 5, 6, 3 есть порожденный простой 6-цикл подграфа $\langle \bar{A}(1) \rangle$. Следовательно, противостоящие в этом 6-цикле вершины 4 и 5 смежны одной и той же вершине из 3-клики {12, 13, 14} подграфа $\langle \bar{A}(1) \rangle$ — например, вершине 12 (см. (13)). Тогда подграф $\langle \bar{A}(4) \rangle$ содержит 3-клику $\Delta = \{5, 6, 7\}$ или {5, 6, 8}. Согласно (14), вершина 2 этого подграфа смежна одной вершине из $\triangle$. При любом $\triangle$ вершина 2 дожна быть смежной вершине 5 (иначе получим новую 3-клику, содержащую вершины 2 и 1 или 3). Следовательно, подграф $\langle A(5) \rangle$ содержит вершины 2, 6, 7, 8, 11, 12. Так как этот подграф имеет ровно два ребра — [6, 7] и [6, 8] (см. (2)), он содержит 5-антиклику, что противоречит (1).

Следовательно, каждая из вершин 1, 4 смежна ровно одной вершине из {7, 8}. Не теряя общности, предположим, что вершина 1 смежна вершинам 7, 9, 12. Согласно (14) и (8), вершина 4 смежна вершине 8 из 3-клики {5, 6, 8} подграфа $\langle \bar{A}(1) \rangle$ и одной из вершин 10, 11, 13, 14. Не теряя общности, предположим, что 4 смежна вершине 13. Тогда вершины 3 и 14 — противостоящие в 6-цикле подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$ (см. (13)) и смежны одной и той же из вершин 5, 6 его 3-клики (вершины 3 и 8 не смежны). С другой стороны, так как вершина 4 не смежна вершинам из 3-клики {5, 6, 7}, из (14) получим, что вершины 2 и 14, противостоящие в 6-цикле подграфа $\langle \bar{A}(4)\rangle$, смежны одной и той же из вершин 5, 6 этой 3-клики (вершины 2 и 7 не смежны). Получаем новую 3-клику {2, 3, 5} или {2, 3, 6}, что является противоречием.

Пусть теперь 3-клики графа G расположены как на рис. 7. Тогда вершина 7 не смежна вершинам 8, 9, 10, 11 и некоторым двум вершинам из 3-клики {12, 13, 14}. Все эти вершины, вместе с вершинами из V_0, несмежными вершине 7, порождают подграф графа G, не имеющего ни 3-клик, ни 4-антиклик. Согласно (6), этот подграф имеет не больше восьми вершин, т. е. вершина 7 смажна хотя бы двум вершинам из V_0. Чтобы не получить новую 3-клику, вершина 7 должна быть смежной ровно двум несмежным вершинам из V_0. Точнее, вершина 7 смежна вершинам 1 и 4 (иначе получим противоречие с (12)).

Некоторая из вершин 1, 4 смежна вершине из 3-клики {12, 13, 14}. Действительно, если, например, вершина 1 не смежна ни одной вершине из этой 3-клики, то из (14) получим, что вершина 4 подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$ смежна (одной) вершине из его 3-клики {12, 13, 14}. Поэтому, не теряя общности, можно предполагать, что вершина 1 смежна вершине 12 из этой 3-клики. Ввиду симметрии можно считать, что вершина 1 смежна еще вершине 9 (см. (5)). Применяя (14) к вершине 1, получим, что подграф $\langle \bar{A}(1)\rangle$ совпадает с графом на рис. 1. В частности, вершина 4 этого подграфа смежна одной вершине из его 3-клики {6, 10, 11}. Согласно (8), вершина 4 не смежна вершине 6. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что вершина 4 смежна вершине 10. Вершина 4 смежна еще одной из вершин 8, 13, 14 подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$.

Допустим, что вершина 4 смежна вершине 8. Тогда вершины 3 и 5 — противостоящие в простом 6-цикле подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$ (см. (13)). Так как 5 смежна вершине 6 из 3-клики {6, 10, 11} этого подграфа, вершина 3 тоже должна быть смежной вершине 6. Вершина 3 смежна еще одной из вершин 13, 14 подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$ (см. рис. 1). Согласно (5), $A(3)\subset\{2, 4, 6, 13, 14\}$. В частности, вершина 3 не смежна вершине 9. Подграф $\langle \bar{A}(4)\rangle$ тоже должен совпадать с графом на рис. 1 (см. (14)). Вершины 1 и 6 этого подграфа являются противостоящими в его 6-цикле (см. (13)). Следовательно, вершина 6 смежна вершине 12 из его 3-клики {12, 13, 14} (вершины 1 и 12 — смежны). Отметим, что вершины 9 и 11 подграфа $\langle \bar{A}(4)\rangle$ являются противостоящими в его 6-цикле и, в частности, не смежны. Вершина 9 не смежна еще вершинам 7 и 12 (иначе получим новую 3-клику {5, 7, 9} или {1, 9, 12}). Поскольку вершины 3, 7, 11, 12 составляют 4-антиклику (иначе получим противоречие с (2), примененное к вершине 6), получаем 5-антиклику {3, 7, 9, 11, 12}, что противоречит (1).

Следовательно, вершина 4 не может быть смежной вершине 8 и смежна некоторой из вершин 13, 14. Ввиду симметрии будем предполагать, что 4 смежна вершине 13. Напомним, что подграф $\langle \bar{A}(1)\rangle$ должен совпадать с графом на рис. 1. Поскольку вершины 6 и 10 из 3-клики {6, 10, 11} этого подграфа уже смежны вершинам 5 и 4 (соответственно), противостоящие в 6-цикле подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$ вершины 3 и 14 должны быть смежными вершине 11 (см. (13)). Тогда вершины 8 и 13 смежны соответственно вершинам 10 и 6. Аналогично, из подграфа $\langle \bar{A}(4)\rangle$ (совпадающего с графом на рис. 1) получим, что вершины 2 и 14 смежны вершине 8, а вершины 11 и 12 смежны соответственно вершинам 9 и 5. Подграф $\langle \bar{A}(4)\rangle$ должен иметь еще ребро [2, 6]. Теперь снова из $\langle \bar{A}(1)\rangle$ получим, что вершины 3 и 5 смежны. Согласно (5), $A(2)=\{1, 3, 6, 8\}$ и $A(3)=\{2, 4, 5, 11\}$. Следовательно, каждый из 9-вершинных подграфов $\langle \bar{A}(2)\rangle$, $\langle \bar{A}(3)\rangle$ имеет ровно одну 3-клику — {12, 13, 14}. Так как эти подграфы не содержат 4-антиклик (4), из (13) получим, что каждый из них должен совпадать с графом на рис. 1. Отсюда следует, что G имеет еще ребра [7, 14], [9, 13], [10, 12].

Как и для графа на рис. 12 (первая возможная ситуация в подслучае 2. б.) доказываем, что перечислены все ребра графа G (см. рис. 13) и что граф на рис.

13 является (единственной) реализацией кратности Рамсея $M(3, 5)$ в рассматриваемой второй возможной ситуации подслучая 2. б. (точнее — когда 3-клики графа G расположены как на рис. 7).

Закончим рассмотрение подслучая 2. б. (и случая 2), предполагая, что 3-клики графа G расположены как на рис. 8. Ввиду симметрии можно считать, что вершина 1 смежна вершинам 7, 9, 11 (см. (8)). Так как подграф $\langle \bar{A}(1)\rangle$ должен совпадать с графом на рис. 1 (см. (14)), его вершина 12 смежна одной из вершин 8, 10 и одной из вершин 3, 4. Из-за симметрии достаточно рассмотреть ситуации, когда вершина 12 смежна вершинам 10 и 3 и когда вершина 12 смежна вершинам 10 и 4.

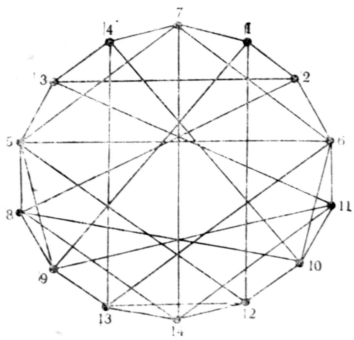

Рис. 13

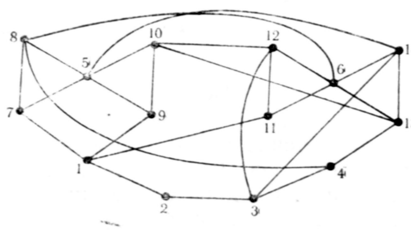

Рис. 14

В первой ситуации вершина 8 должна быть смежной вершине 6 (вершины 8 и 12 — противостоящие в 6-цикле подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$). В подграфе $\langle \bar{A}(1)\rangle$ вершина 4 смежна вершине 8 и одной из вершин 13, 14. Не теряя общности, можно предполагать, что вершина 4 смежна вершине 13. Тогда в подграфе $\langle \bar{A}(1)\rangle$ имеем еще ребра [10, 13] (вершины 10 и 4 противостоящие в 6-цикле) и [3, 14], [5, 14] (см. рис. 14). Применяя (2) к вершине 1, получим, что вершины 2, 7, 9, 11 составляют 4-антиклику. Вершина 14 не смежна ни одной из этих вершин (иначе получим новую 3-клику, содержащую некоторую из вершин 3, 5, 6). Следовательно {2, 7, 9, 11, 14} — 5-антиклика, что противоречит (1).

Во второй ситуации, когда вершина 12 смежна вершинам 10 и 4, подграф $\langle \bar{A}(1)\rangle$ может совпадать с графом на рис. 1 только если имеет ребра [3, 8] и [6, 8]. Вершина 4 снова должна быть смежной одной из вершин 13, 14. Не теряя общности, предполагаем, что 4 смежна 13. Тогда в подграфе $\langle \bar{A}(1)\rangle$ имеем еще ребра [5, 13], [3, 14], [10, 14] (см. рис. 15). Применяя (2) к вершине 3, получим, что вершины 2, 4, 8, 14 попарно не смежны. Вершина 11 не смежна ни одной из этих вершин (иначе получим новую 3-клику, содержащую некоторую из вершин 1, 12, 6). Следовательно {2, 4, 8, 11, 14} — 5-антиклика, что противоречит (1).

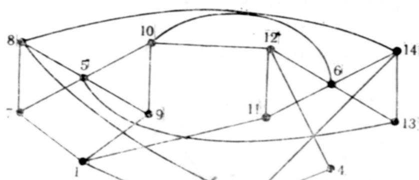

Рис. 15

Таким образом доказано, что во второй ситуации подслучая 2. б. (когда подграф $\langle V_0\rangle$ есть простая цепь) 3-клики графа G не могут быть расположенными как на рис. 8. Следовательно, графы на рис. 12 и 13 являются единственными реализациями кратности Рамсея $M(3,5)$ без 5-антиклик в подслучае 2. б,

Случай 3. $|V_0|=5$, $|V_1|=6$, $|V_2|=3$.

Обозначим через 1, 2, 3, 4, 5 вершины из V_0. На рис. 16, 17, 18 и 19 показаны все возможные взаимные расположения 3-клик в рассматриваемом случае. Выясним сначала структуру подграфа $\langle V_0 \rangle$.

Докажем, что подграф $\langle V_0 \rangle$ не имеет вершину, смежную двум из его висячих вершин.

Допустим, что вершина 1 подграфа $\langle V_0 \rangle$ смежна его висячим вершинам 2 и 3. Тогда некоторая вершина i из $\{4, 5\}$ — тоже висячая (иначе получим новую 3-клику

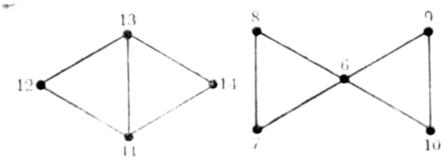

Рис. 16

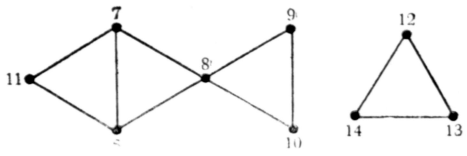

Рис. 17

или противоречие с (7)). Согласно (8), каждая из вершин 2, 3, i смежна трем вершинам из V_1. Из (12) получим, что ни одна вершина из V_1 не смежна обеим вершинам 2 и 3. Следовательно, имеются две вершины из V_1, смежные вершине i и одной из вершин 2, 3, что противоречит (12).

Из доказанного следует, что в подграфе $\langle V_0 \rangle$ нет вершин степени 4.

Докажем, что $\langle V_0 \rangle$ не имеет также вершин степени 3. Допустим, что вершина 1 подграфа $\langle V_0 \rangle$ смежна его вершинам 2, 3, 4 и не смежна его вершине 5. Согласно (2), вершины 2, 3, 4 попарно не смежны. Вершина 5 смежна ровно двум из этих вершин (иначе получим противоречие с (10) или две висячие вершины, смежные вершине 1). Пусть вершина 5 смежна вершинам 2 и 3. Из (11) получим, что вершины 2 и 3 смежны четырем (разным — см. (10)) вершинам из V_1. Так как висячая вершина 4 смежна трем вершинам из V_1 (см. (8)) и $|V_1|=6$, получим противоречие с (12) (для вершины 4 и некоторой из вершин 2, 3).

Из доказанного выше и (7) следует, что все вершины подграфа $\langle V_0 \rangle$ имеют степень 1 или 2 в нем. Хорошо известно, что число вершин нечетной степени долж-

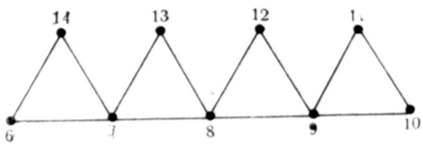

Рис. 18

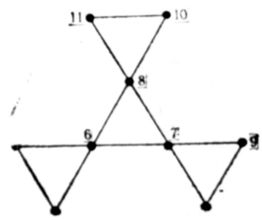

Рис. 19

но быть четным. Так как в подграфе $\langle V_0 \rangle$ нет пары висячих вершин, смежных одной и той же его вершине (см. выше), число висячих вершин отлично от 4. Следовательно, подграф $\langle V_0 \rangle$ либо имеет ровно две висячие вершины и является простой незамкнутой цепью с пятью вершинами, либо вовсе не имеет висячих вершин и является простым 5-циклом.

Подслучай 3. а. Подграф $\langle V_0 \rangle$ есть простая незамкнутая цепь 1, 2, 3, 4, 5.

Допустим сначала, что 3-клики графа G расположены как на рис. 17 или 19, т. е. множество V_2 есть 3-клика. Согласно (8), эта 3-клика содержится в подграфе $\langle \bar{A}(1) \rangle$. Последний подграф должен совпадать с графом на рис. 1 (см. (14)). В частности, его вершина 5 смежна некоторой вершине из его 3-клики, т. е. некоторой вершине из V_2, что противоречит (8).

Пусть теперь 3-клики графа G расположены как на рис. 16. Докажем, что вершина 3 не смежна вершине 6. Действительно, в противном случае вершина 3 смежна еще некоторой вершине i из $\{12, 14\}$ (см. (8)). Согласно (12), ни одна из вершин 1, 5 не смежна вершине i. Следовательно, вершина 5 из подграфа $\langle \bar{A}(1) \rangle$ не смежна ни одной вершине из его 3-клики $\{11, 13, i\}$ (см. (8)), что противоречит (14).

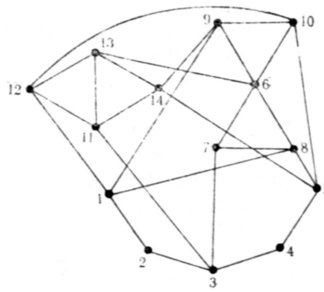

Рис. 20

Итак, вершина 3 не смежна вершине 6. Следовательно, $\{1, 3, 5, 6\}$ есть 4-антиклика графа G (см. (8)). Так как G не имеет 5-антиклик (см. (1)), каждая из вершин 11, 13 смежна некоторой вершине из $\{3, 6\}$ (см. (8)). Чтобы не получить новую 3-клику, вершина 11 должна быть смежной ровно одной из вершин 3, 6, а вершина 13 — другой из этих вершин. Не теряя общности, предположим, что вершина 11 смежна вершине 3, а 13 — вершине 6. Тогда четвертая вершина, смежная вершине 3 (см. (5)), принадлежит $\{7, 8, 9, 10\}$. Ввиду симметрии, пусть 3 смежна вершине 7. Так как 9-вершинный подграф $\langle \bar{A}(3) \rangle$ не имеет 4-антиклик (4) и содержит ровно одну 3-клику — $\{6, 9, 10\}$, то он совпадает с графом на рис. 1 (см. (13)). Поскольку вершины 8 и 13 смежны вершине 6 из его 3-клики, то эти вершины должны быть противостоящими в простом 6-цикле, порожденном вершинами 1, 5, 8, 12, 13, 14. Следовательно, вершины 1 и 5 смежны вершине 8 и каждая из них смежна одной из вершин 12, 14. Не теряя общности, можно предположить, что вершина 1 смежна вершине 12, а вершина 5 — вершине 14. Из подграфа $\langle \bar{A}(3) \rangle$ получим еще, что вершины 1 и 14 смежны одной и той же вершине из $\{9, 10\}$. Не теряя общности, можно считать, что 1 и 14 смежны вершине 9. Тогда в подграфе $\langle \bar{A}(3) \rangle$ вершина 10 смежна вершинам 5 и 12 (см. рис. 20). Применяя (2) к вершине 3, получим, что вершины 4, 7, 11 попарно не смежны. Вершина 10 не смежна ни одной из этих вершин (иначе получим новую 3-клику, содержащую некоторую из вершин 5, 6, 12). Так как $A(1) = \{2, 8, 9, 12\}$, получаем 5-антиклику $\{1, 4, 7, 10, 11\}$, что противоречит (1).

Заканчивая рассмотрение подслучая 3. а., допустим, что 3-клики графа G расположены как на рис. 18. Если вершина 3 не смежна вершинам 7 и 9, то она составит с ними и с вершинами 1 и 5 (см. (8)) 5-антиклику, что противоречит (1). Поэтому, не теряя общности, предположим, что вершина 3 смежна вершине 7. Тогда вершина 3 не смежна вершине 9 (см. (8)) и вершинам 6, 8, 13, 14 (иначе получим новую 3-клику).

Докажем, что вершина 3 не смежна также вершине 12. Действительно, в противном случае 9-вершинный подграф $\langle \bar{A}(3) \rangle$ имеет единственную 3-клику — $\{9, 10, 11\}$. Так как этот подграф не имеет 4-антиклик (4), он должен совпадать с графом на рис. 1 (см. (13)). В частности, вершина 8 смежна некоторой из вершин 1, 5, 6, 14, что приведет к получению противоречия с (8) или новой 3-клики.

Из доказанного следует, что вершина 3 смежна некоторой из вершин 10, 11 — например, вершине 10. Тогда снова получаем противоречие с (13), так как в подграфе $\langle \bar{A}(3) \rangle$ вершина 8 из его 3-клики не смежна ни одной из его вершин 1, 5, 6, 14, 11 (см. (8)).

Подслучай 3. б. Подграф $\langle V_0 \rangle$ есть простой 5-цикл 1, 2, 3, 4, 5, 1.

Пусть сначала 3-клики графа G расположены как на рис. 19. Из (5) получим, что некоторые две вершины i, j из V_0 смежны одной и той же вершине k из 3-клик. Тогда вершины i и j не смежны и, следовательно, смежны некоторой (одной и той же) вершине из V_0. Согласно (11), если i смежна еще вершине m, а j — вершине n (m и n — из 3-клик), то все вершины m, n, k принадлежат V_1, причем вершины m и n принадлежат одной и той же 3-клике. Не теряя общности, можно предполагать, что вершина k составляет 3-клику с вершинами 7 и 9 (см. рис. 19), а вершины m и n составляют 3-клику с вершиной 6. Тогда получим 5-антиклику $\{i, j, 9, 6, l\}$, где $l=10$ или 11, что противоречит (1)

Пусть теперь 3-клики графа G расположены как на рис. 18. Тогда вершина 8 не смежна вершинам 6, 14, 10, 11. Если 8 не смежна также ни одной вершине из V_0, то подграф $\langle \bar{A}(8)\rangle$ имеет девять вершин. Так как этот подграф не содержит ни 4-антиклик (4), ни 3-клик, получим противоречие с (6). Поэтому можно предполагать, что вершина 8 смежна вершине 1. Пусть вершина 1 смежна еще вершине 10 из V_1 (см. (8)). Тогда 9-вершинный подграф $\langle \bar{A}(1)\rangle$ содержит единственную 3-клику — $\{6, 7, 14\}$ и не имеет 4-антиклик (4). Согласно (13), этот подграф совпадает с графом на рис. 1. Так как вершина 13 не смежна вершине 12, то она должна быть смежной вершине 11. Тогда вершины 12 и 13 — противостоящие в простом 6-цикле подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$ и должны быть смежными одной и той же вершине из его 3-клики. Получаем новую 3-клику $\{12, 7, 8\}$, что является противоречием.

Допустим теперь, что 3-клики графа G расположены как на рис. 16.

Докажем сначала, что некоторая из вершин 11, 13 смежна вершине из V_0. Действительно, если допустим, что вершины 11 и 13 не смежны ни одной вершине из V_0, то каждая из них смежна хотя бы одной из вершин 7, 8, 9, 10 (иначе подграф $\langle \bar{A}(i)\setminus\{6\}\rangle$, где $i=11$ или 13, будет иметь девять вершин, ни одной 3-клики и ни одной 4-антиклики, что противоречит (6)). В частности, получаем, что вершины 11 и 13 не смежны вершине 6.

Если вершина i, $i=11, 13$ смежна ровно одной из вершин 7, 8, 9, 10, то подграф $\langle \bar{A}(i)\rangle$ имеет девять вершин, ни одной 4-антиклики (4) и ровно одну 3-клику. Согласно (13), этот подграф должен совпадать с графом на рис. 1. В частности, вершины 5-цикла $\langle V_0\rangle$ вместе с одной из вершин 7, 8, 9, 10 должны порождать простой 6-цикл, что, очевидно, невозможно. Следовательно, каждая из вершин 11, 13 смежна ровно двум вершинам из $\{7, 8, 9, 10\}$ (иначе получим новую 3-клику).

Так как вершины 11 и 13 смежны, каждая из вершин 7, 8, 9, 10 смежна некоторой из вершин 11, 13 и, следовательно, не смежна ни одной из вершин 12, 14. Еели вершина j из V_0 не смежна ни одной из вершин 12, 14, то некоторые две вершины из $\{7, 8, 9, 10\}$ вместе с вершинами j, 12, 14 составят 5-антиклику, что противоречит (1). Следовательно, каждая вершина из V_0 смежна хотя бы одной из вершин 12, 14. Тогда некоторая из вершин 12, 14 смежна трем вершинам из V_0, и получим новую 3-клику, что является противоречием.

Таким образом доказано, что некотороя из вершин 11, 13 смежна вершине из V_0. Не теряя общности, предположим, что вершина 11 смежна вершине 1 из V_0 и вершина 1 смежна еще вершине 7 из V_1 (см. (8)) Подграф $\langle \bar{A}(1)\rangle$ содержит единственную 3-клику $\{6, 9, 10\}$. Так как этот 9-вершинный подграф не имеет 4-антиклик (4), из (13) получим, что он совпадает с графом на рис. 1. В частности, вершина 8 смежна одной из вершин 12, 14 и одной из вершин 3, 4. Не теряя общности, предположим, что вершина 8 смежна вершине 14 и вершине 4. Тогда в подграфе $\langle \bar{A}(1)\rangle$ имеем еще ребра [12, 3] и [12, 6], а противостоящие в простом 6-цикле вершины 4 и 13 смежны одной и той же вершине из $\{9, 10\}$ Ввиду симметрии, пусть вершины 13 и 4 смежны вершине 9. Тогда последние два ребра подграфа $\langle \bar{A}(1)\rangle$ являются [10, 3] и [10, 14]. Согласно (2), множество $A(3)$ есть 4-антиклика. Вершина 7 не смежна ни одной вершине из этого множества (иначе получим новую 3-клику, содержащую некоторую из вершин 1, 8, 6 — см. рис 21). Следовательно, множество $A(3)\cup\{7\}$ есть 5-антиклика, что противоречит (1).

Закончим случай 3. б. (и случай 3), предполагая, что 3-клики графа G расположены как на рис 17. Вершина 6 не смежна вершинам 9, 10 и двум вершинам из 3-клики $\{12, 13, 14\}$ (иначе получим новую 3-клику). Если вершина 6 не смежна также ни одной вершине из V_0, то получим множество из девяти вершин, не смежных вершине 6. Это множество порождает в G подграф, который не имеет ни 3-клик, ни 4-антиклик (4), что противоречит (6). Поэтому, не теряя общности, предположим, что вершина 6 смежна вершине 1 из V_0. Согласно (5), вершина 1 смежна

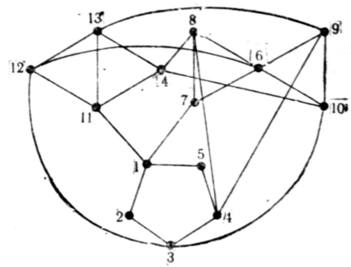

Рис. 21

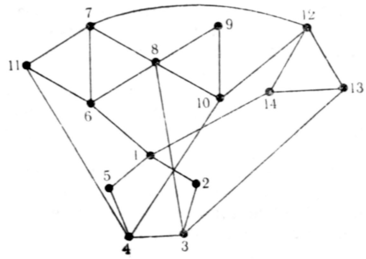

Рис. 22

еще либо одной из вершин 9, 10, либо одной из вершин 12, 13, 14 (иначе получим новую 3-клику).

В первой ситуации, пусть вершина 1 смежна вершине 10. Тогда подграф $\langle\bar{A}(1)\rangle$ имеет единственную 3-клику — $\{12, 13, 14\}$. Так как этот 9-вершинный подграф не содержит 4-антиклик (4), из (13) получим, что он совпадает с графом на рис. 1. Следовательно, вершина 9 смежна одной из вершин 3, 4. Не теряя общности, можно считать, что вершина 9 смежна вершине 3, и тогда вершина 11 должна быть смежной вершине 4. Вершины 3 и 7 будут противостоящими в простом 6-цикле подграфа $\langle A(1)\rangle$ и поэтому смежны одной и той же вершине из 3-клики $\{12, 13, 14\}$ — например, вершине 14. Тогда вершина 6 не смежна ни одной вершине из множества $A(3)=\{2, 4, 9, 14\}$ (иначе получим новую 3-клику, содержащую некоторую из вершин 1, 11, 8, 7). Множество $A(3)$ есть 4-антиклика (2). Получаем 5-антиклику $\{2, 4, 6, 9, 14\}$, что противоречит (1).

Во второй ситуации, когда вершина 1 смежна (кроме вершине 6) одной из вершин $\{12, 13, 14\}$, скажем, вершине 14, подграф $\langle\bar{A}(1)\rangle$ снова должен совпадать с графом на рис. 1 (см. (13)). В частности, вершина 7 смежна одной из вершин 3, 4, 12, 13. Если вершина 7 смежна вершине i, где $i=3$ или 4, то вершина i смежна некоторой из вершин 9, 10, и попадаем в рассмотренную выше ситуацию (для вершин 7 и i на месте вершин 6 и 1). Следовательно, можно предполагать, что вершина 7 смежна вершине 12. Из-за симметрии можно считать, что подграф $\langle\bar{A}(1)\rangle$имеет еще ребро [13, 3]. Тогда этот подграф имеет еще ребра [4, 11] и [3, 8]. Вершины 4 и 12 подграфа $\langle\bar{A}(1)\rangle$ должны быть смежными одной и той же вершине из $\{9, 10\}$. Не теряя общности, предположим, что вершина 10 смежна вершинам 4 и 12. Тогда имеем пять попарно несмежных вершин 3, 5, 6, 10, 14 (иначе получим новую 3-клику, см. рис. 22), что противоречит (1).

Таким образом доказано, что в случае 3 не имеется ни одной реализации кратности Рамсея $M(3, 5)$ без 5-антиклик.

Теорема доказана полностью.

Автор благодарен своему научному руководителю Н. Г. Хаджииванову и Н. Д. Ненову за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ив. Ж. Пашов. Кратность Рамсея при 2-раскрасках ребер полного графа с четырнадцатью вершинами. *Сердика*, **10**, 1984, 192 — 197.
2. Ив. Ж. Пашов. О реализациях кратности Рамсея M (3, 5). *Год. ВПИ — Шумен*, **7** Б, 1984, 5 — 10.
3. Ив. Ж. Пашов. О возможности реализации кратности Рамсея M(3, 5) без 5-антиклик. *Год ВПИ — Шумен*, **11** Б, 1987 (в печати).
4. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. Усиление одной теоремы Грийнвуда и Глисона о раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 631 — 633.
5. Ив. Ж. Пашов. Одно свойство 2-раскрасок ребер полного графа с восемнадцатью вершинами. — В: Математика и математическо образование. С., 1982, 262 — 264.
6. Н. Д. Ненов. Некоторые замечания о Рамсеевских кратностях. — В: Математика и математическо образование. С., 1981, 176 — 179.
7. Н. Д. Ненов, Ив. Ж. Пашов, Н. Г. Хаджииванов О числе монохроматеческих p-клик в двуцветных раскрасках ребер некоторых полных графов. *Доклады БАН*, **35**, 1982, 439 — 442.
8. Н. Г. Хаджииванов. Числа на Рамзи. С., 1982.
9. Ив. Ж. Пашов, Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. Существование и единственность 14-вершинного графа с тремя 3-кликами и одной 5-антикликой. *Год. Соф. Унив.*, **78**, 1985 (в печати).
10. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О минимуме числа 5-антиклик 14-вершинных графов без треугольников. *Доклады БАН*, **36**, 1983, 1155 — 1157.
11. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов, Ив. Ж. Пашов. Любой 14-вершинный граф с единственным треугольником имеет не меньше пяти 5-антиклик. *Сердика*, **13**, 1987.
12. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов, Ив. Ж. Пашов. Минимум чисел 5-антиклик 14-вершинных графов с двумя 3-кликами есть 3. *Год. ВПИ — Шумен*, **10** Б, 1986, 23—37.
13. R. Greenwood, A. Gleason. Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J. Math.*, **7**, 1955, 1 — 7.
14. F. Harary, G. Prins. Generalized Ramsey theory for graphs. IV. *Networks*, **4** 1974, 163 — 173.
15. M. Jacobson. A note on Ramsey multiplcity. *Discrete Math.*, **29**, 1980, 201 — 203.
16. F. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.*, **30**, 1930, 246—286.
17. A. Goodman. On sets of acquaintances and strangers at any party. *Amer. Math. Month.*, **63**, 1959, 778 — 783.

Высший педагогический институт
Природо-математический факультет
Кафедра „Методика математики"
Шумен 9700 *Болгария*

Поступила 24. 4. 85