Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СПРОСА

ЧАН ЗОАН ФУ

В работе рассматривается однопериодовая однономенклатурная модель управления запасами в предположении, что распределение объема спроса не вполне известное — даны только первые два момента. При таких условиях предлагается решать задачу о минимизации расходов, ориентируясь на самый худший случай распределения спроса, т. е. решать минимаксную задачу.

Находится представление характеристик снабжения только через известные ценовые коэффициенты и моменты распределения спроса.

1. Введение. Обычно в стохастических моделях управления запасами решаются оптимальные задачи управления по разным номенклатурам запасов, предполагая что распределения спроса известные. Однако на практике эти предположения иногда не всегда выполнены. Во многих случаях, например, информация для них сводится, к знанию только нескольких первых моментов. При таких условиях предлагается решать задачу о минимизации расходов, ориентируясь на самый худший случай распределения спроса, т. е. решать минимаксную задачу.

Подобные задачи управления запасами с неполной информацией решались для адаптивных систем управления запасами [1, с. 174], однако, здесь постановка сильно отличается от тех постановок. Близкие по постановке оптимизационные задачи решались для некоторых надежностных систем в [3].

2. Постановка задачи. (Однопериодовая однономенклатурная модель). Предполагается, что запасы можно доставлять только в начале периода и Q есть неизвестный объем поставки. Предполагаем, что единица запаса стоит C, а в конце периода остаток можно продать по цене D. Расходы запаса из-за дефицита оцениваются на π для каждой единицы запаса в этом периоде. Предполагаем также, что в системе не учитываются расходы по сохранению и потери из-за неудовлетворенного спроса, зависящие от времени. Пусть спрос X в периоде есть неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)=P\{X<x\}$, принадлежащей к классу функций распределения $\Omega(\mu_1, \mu_2)$ с двумя фиксированными моментами

$$\mu_1=\int_0^\infty x dF(x), \quad \mu_2=\int_0^\infty x^2 dF(x). \tag{1}$$

Во избежания тривиального случая предполагаем, что $\sigma^2=\mu_2-\mu_1^2>0$.

Используя [1, с. 103] расходы системы можно записать равенством

$$R(X, Q)=\begin{cases}(C-D)(Q-X) & \text{при} \quad X\leq Q;\\ \pi(X-Q) & \text{при} \quad X>Q.\end{cases}$$

Математическое ожидание функции потерь $R(X, Q)$ записывается выражением

$$R(Q, F)=ER(X, Q)=\int_0^Q (C-D)(Q-x)dF(x)+\int_Q^\infty \pi(x-Q)dF(x).$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 252—257.

После несложных вычислений [1, с. 113] получаем

$$R(Q, F)=[(C-D)+\pi]\int_0^Q(Q-x)dF(x)+\pi(\mu_1-Q). \tag{2}$$

Наша задача состоит в определении

$$Q^*=\arg\min_{Q\geq 0}\max_{F(x)\in\Omega(\mu_1,\mu_2)} R(Q,F),$$

где $R(Q, F)$ определена через (2).

3. Вычисление. $F^*(x)=\arg\{\max R(Q, F): F(x)\in\Omega(\mu_1, \mu_2)\}$. Пусть $u_k(x)$ $(k=0,\ldots,n)$ система непрерывных и линейно независимых функций, определенных на интервале $[0, \infty)$ и пусть $c_k(k=0,\ldots,n)$ последовательность чисел. Через $V(C)$ обозначим совокупность всех функций распределения $F(x)$, $0\leq x<\infty$, для которых

$$\int_0^\infty u_k(x)dF(x)=c_k \quad (k=0,\ldots,n). \tag{3}$$

Теорема 1.3 из [2, с. 242] утверждает, что если даны $n+1$ первых моментов

$$\int_0^\infty u_k(x)\,dF(x)=c_k \quad (k=0,\ldots,n)$$

и $\{u_k(x)\}_0^n$ образуют T_+ систему порядка n[2, с. 52] на $[0, \infty)$, то самое большое значение интеграла

$$I=\int_0^Q \Omega(x)dF(x), \quad F(x)\in V(C)$$

достигается, когда $F(x)$ есть канонический закон распределения [2, с. 110].

Утверждение верно только в случае, когда переопределение $\Omega(x)$ на интервале $[Q, \infty)$ возможно произвести так, чтобы $\Omega(x)$ была непрерывна на $[0, \infty)$ и удовлетворяла условию: $\{u_0,\ldots,u_n, \Omega\}$ образует T_+^0 систему порядка $n+1$ [2, с. 154]. на $[0, \infty)$.

Вернемся к нашей задаче. Имеем

$$u_0=1,\ u_1=x,\ u_2=x^2;\ c_0=1,\ c_1=\mu_1,\ c_2=\mu_2;\ \Omega(x)=Q-x.$$

Если переопределить $\Omega(x)$ на интервале $[Q, \infty)$ равенством

$$\Omega(x)=Q-x, \quad x\in[Q, \infty),$$

то все условия указанной выше теоремы выполнены.

Действительно,

$$\{u_0, u_1, u_2\}=\{1, x, x^2\} \text{ образуют } T_+ \text{ систему:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}>0 \quad \text{для} \quad 0\leq x_0<x_1<x_2<\infty.$$

Это следует из свойства определителя Вандермонда. Теперь проверим, что $\{u_0, u_1, u_2, \Omega\}$ образуют $T_+^0(\Omega)$ систему. Имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & Q-x_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & Q-x_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & Q-x_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & Q-x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \infty$$

и, следовательно, $F^*(x) = \arg\{\max R(Q, F):\ F(x) \in \Omega(\mu_1, \mu_2)\}$ есть канонический закон распределения, т. е. эту функцию можем записать в виде:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{для} \quad 0 \leq x < a; \\ p, & \text{для} \quad a \leq x < b; \\ 1, & \text{для} \quad x \geq b. \end{cases} \tag{4}$$

Если подставить $R(Q, F^*) = R(Q, a, b, p)$, задача сводится к определению

$$Q^* = \arg \min_{Q \geq 0} \{\max R(Q, a, b, p):\ 0 \leq a < b,\ p \in (0, 1)\}$$

при ограничительных условиях

$$\begin{cases} \mu_1 = a\,p + b\,(1-p); \\ \mu_2 = a^2 p + b^2 (1-p), \end{cases} \tag{5}$$

которые являются следствием из (1).

Для каждого выбранного значения Q существуют только три возможности, соответственно

$$0 \leq Q < a,\ a \leq Q < b,\ Q \geq b.$$

Из (2) следует, что

$$R(Q, a, b, p) = \begin{cases} R_1(Q, a, b, p), & \text{если} \quad 0 \leq Q < a; \\ R_2(Q, a, b, p), & \text{если} \quad a \leq Q < b; \\ R_3(Q, a, b, p), & \text{если} \quad Q \geq b, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$R_1(Q, a, b, p) = \pi(\mu_1 - Q);$$

$$R_2(Q, a, b, p) = [(C-D)+\pi]\,p(Q-a) + \pi(\mu_1 - Q);$$

$$R_3(Q, a, b, p) = [(C-D)+\pi]\,(Q-\mu_1) + \pi(\mu_1 - Q).$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Для выбранного значения Q, распределение $F^*(a^*, b^*, p^*)$, для которого $R_2(Q, a, b, p)$ достигает максимума, определяется выражениями*

$$b^* = Q + \sqrt{Q^2 + \mu_2 - 2Q\mu_1}; \quad a^* = \frac{\mu_2 - \mu_1 b^*}{\mu_1 - b^*}; \quad p^* = \frac{(\mu_1 - b^*)^2}{\mu_2 - 2\mu_1 b^* + b^{*2}}.$$

Доказательство. Отметим, что, используя (5), можем определить один из параметров, например, b как свободный, а все остальные — как его функции. Тогда задача сводится к решению следующего уравнения

$$\frac{\partial R_2(Q, a, b, p)}{\partial b} = \frac{\partial R_2(Q, a, b, p)}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial b} + \frac{\partial R_2(Q, a, b, p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial b} = 0. \tag{7}$$

Из (5) получаем

$$a=\frac{\mu_2-\mu_1 b}{\mu_1-b} \tag{7}$$

и

$$p=\frac{(\mu_1-b)^2}{\mu_2-2\mu_1 b+b^2}. \tag{8}$$

Теперь можно определить производные для a и p по параметру b:

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{\mu_2-\mu_1^2}{(\mu_1-b)^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial b}=\frac{2(b-\mu_1)(\mu_2-\mu_1^2)}{(\mu_2-2\mu_1 b+b^2)^2}.$$

Тогда из (7) следует

$$\frac{\partial R_2(Q,\, a,\, b,\, p)}{\partial b}=-[(C-D)+\pi]\,(\mu_2-\mu_1^2)\,\frac{b^2-2Qb+2Q\mu_1-\mu_2}{(\mu_2-2\mu_1 b+b^2)^2}. \tag{9}$$

Поскольку $-[(C-D)+\pi]\,(\mu_2-\mu_1^2)<0$

и

$$\mu_2-2\mu_1 b+b^2=\sigma^2+(\mu_1-b)^2>0,$$

то решения уравнения

$$\frac{\partial R_2(Q,\, a,\, b,\, p)}{\partial b}=0$$

совпадают с решениями уравнения

$$b^2-2Qb+2Q\mu_1-\mu_2=0,$$

которые равны

$$b=Q\pm\sqrt{Q^2+\mu_2-2Q\mu_1}.$$

Выражение $Q^2-\mu_2-2Q\mu_1$ под знаком корня равняется $\sigma^2+(Q-\mu_1)^2>0$. Из (9) легко видеть, что $b^*=Q+\sqrt{Q^2+\mu_2-2Q\mu_1}$. Из (7) и (8) следуют остальные равенства теоремы. В то же время выполнены условия

$$a^*\leqq Q<b.$$

Теорема 2. *Для произвольно выбранного значения Q, $F^*(a^*, b^*, p^*)$ есть наихудшее распределение, т. е. для этого распределения $R(Q, F)$ достигает своего самого большего значения:*

$$R(Q,\, F^*)=\max\{R(Q,\, F):\ F(x)\in\Omega(\mu_1,\, \mu_2)\}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что выполнены неравенства

$$R_2(Q,\, a^*,\, b^*,\, p^*)\geqq R_1(Q,\, a,\, b,\, p), \quad \text{при} \quad Q<\mu_1 \tag{10}$$

и

$$R_2(Q,\, a^*,\, b^*,\, p^*)\geqq R_3(Q,\, a,\, b,\, p), \quad \text{при} \quad Q\geqq\mu_1. \tag{11}$$

Из (6) получаем

$$R_2(Q,\, a^*,\, b^*,\, p^*)=\frac{[(C-D)+\pi]}{2}\,(Q+\sqrt{Q^2+\mu_2-2Q\mu_1}-\mu_1)+\pi(\mu_1-Q). \tag{12}$$

Равенство (10) очевидно, поскольку

$$R_1(Q,\ a,\ b,\ p)=\pi(\mu_1-Q).$$

Имея ввиду (6), равенство (11) следует из того, что при $Q\geqq\mu_1$

$$\frac{[(C-D)+\pi]}{2}\,(Q+\sqrt{Q^2+\mu_2-2Q\mu_1}-\mu_1)>[(C-D)+\pi]\,(Q-\mu_1).$$

Таким образом теорема доказана.

4. Вычисление $Q^*=\arg\min\{R(Q,\ F^*):\ \ Q\geqq 0\}$. Будем предполагать, что $\pi-(C-D)>0$.

Теорема 3. *Для самого худшего распределения F^* оптимальным значением для Q является*

$$Q^*=\mu_1+\sigma\sqrt{\frac{k}{1-k}}\,,$$

где

$$k=\left[\frac{\pi-(C-D)}{\pi+(C-D)}\right]^2$$

и

$$R(Q^*,\ F^*)=\sigma\sqrt{\pi(C-D)}.$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что

$$Q^*=\arg\min\{R_2(Q,\ a^*,\ b^*,\ p^*):\ \ Q\geqq 0\}.$$

Ясно, что нужно искать Q среди решений уравнения

(13) $$\frac{\partial R_2(Q,\ F^*)}{\partial Q}=0.$$

Из (12) следует:

$$\frac{\partial R_2(Q,\ F^*)}{\partial Q}=\frac{[(C-D)+\pi)}{2}\left(1+\frac{Q-\mu_1}{\sqrt{Q^2+\mu_2-2Q\mu_1}}\right)-\pi.$$

Следовательно, решение уравнения (13) принимает вид

$$Q=\begin{cases}\mu_1+\sigma\sqrt{\dfrac{k}{1-k}}\,, & \text{если } \pi-(C-D)>0\,;\\[2ex] \mu_1-\sigma\sqrt{\dfrac{k}{1-k}}\,, & \text{если } \pi-(C-D)\leqq 0.\end{cases}$$

Поскольку по предположению $\pi-(C-D)>0$, следует

(14) $$Q^*=\mu_1+\sigma\sqrt{\frac{k}{1-k}}\,,$$

Элементарно проверить, что

$$\frac{\partial R_2(Q,\ F^*)}{\partial Q}<0,\ \text{когда}\ \ Q<Q^*$$

и

$$\frac{\partial R_2(Q,\ F^*)}{\partial Q}>0,\ \text{когда}\ \ Q>Q^*,$$

т. е. действительно при $Q=Q^*$ функция $R_2(Q, F^*)$ (или то же самое $R(Q, F^*)$) достигает своего минимума.

Имея ввиду (12) и (14), после несложных подсчетов получаем

$$R_2(Q^*, F^*) = -\frac{[(C-D)+\pi[}{2}(\mu_1 - Q - \sqrt{Q^2+\mu_2-2Q\mu_1}) + \pi(\mu_1 - Q)$$

и

$$\sqrt{Q^2+\mu_2-2Q\mu_1} = \sigma\sqrt{\frac{1}{1-k}}\,.$$

Следовательно,

$$R_2(Q^*, F^*) = \frac{\sigma}{\sqrt{1-k}} \cdot \frac{2\pi(C-D)}{\pi+(C-D)}\,.$$

Поскольку

$$\sqrt{1-k} = \frac{2}{\pi+(C-D)} \cdot \sqrt{\pi(C-D)},$$

нетрудно подсчитать

$$R_2(Q^*, F^*) = \sigma\sqrt{\pi(C-D)},$$

или то же самое, что

$$R(Q^*, F^*) = \sigma\sqrt{\pi(C-D)}.$$

Теорема доказана.

Отметим также, что при

$$Q^* = \mu_1 + \sigma\sqrt{\frac{k}{1-k}}$$

после несложных подсчетов можно определить: $b^* = \mu_1 + \sigma\sqrt{\frac{\pi}{C-D}}$; $a^* = \mu_1 - \sigma\sqrt{\frac{C-D}{\pi}}$; $p^* = \frac{\pi}{(C-D)+\pi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Димитров. Научно управление на запасите. С., 1984.
2. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.
3. В. А. Каштанов. Оптимальные задачи технического обслуживания. М., 1981.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. К. 373

Поступила 18. 12. 1985