Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

РАЗДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ В СИСТЕМЕ ПОЛИНОМИАЛЬНО-НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МАТРИЧНОЙ ЛИНЕАРАЗАЦИИ

Х. И. СЕМЕРДЖИЕВ, Р. М. ЯМАЛЕЕВ

Показано, что технику метода Гаусса исключения неизвестных в системе линейных алгебраических уравнений можно использовать и для решения систем полиномиально-нелинейных алгебраических уравнений. С этой целью предлагается использовать матричную линеаризацию полиномиальных уравнений как по одной, так и по всем переменным. Метод позволяет конструировать решения системы в виде матриц, зависящих только от коэффициентов системы. Представленный метод редукции от многомерной структуры к одномерной обладает, аналогично методу Гаусса, как прямым, так и обратным ходом. Прямой ход метода приводит к одномерному полиномиальному уравнению более высокой степени нелинейности.

Введение. Система полиномиально-нелинейных алгебраических уравнений (СПНАУ) обладает той замечательной особенностью, что для ее решения можно использовать технику, применяемую при решении системы линейных алгебраических уравнений. Как известно, линейная система $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ становится решенной, как только найдена обратная матрица A^{-1}. Тогда решение системы записывается в виде $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$. В настоящее время, среди неитерационных методов определения обратной матрицы, самым эффективным является известный метод Гаусса [1, 2]. Его прямой ход равносилен методу приведения матрицы к треугольному виду (метод исключения), а обратный ход есть процесс последовательного нахождения решений (или элементов обратной матрицы). Цель настоящей работы — показать, что подобная техника решения систем линейных уравнений применима и для СПНАУ. Если, в случае системы линейных уравнений, метод исключения неизвестных путем образования соответствующих линейных комбинаций между строками (уравнениями) сводит матричное уравнение $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ к числовому $ax=b$, то в случае СПНАУ в результате треуголизации системы исходная многомерная задача сведется к одномерному уравнению более высокой степени нелинейности. В работе будет показано, что метод редукции от многомерной структуры к одномерной обладает, аналогично методу Гаусса, как прямым, так и обратным ходом. Поскольку корни одномерного полинома могут быть найдены исчерпывающим образом [3—6], то для СПНАУ мы также можем построить метод „исчерпывания корней“ системы. Поиск корней в многомерном пространстве, если неизвестна априорная информация об области локализации корней, является процессом весьма трудоемким, осуществимым только в избранных случаях.

В настоящее время известно несколько методов исключения неизвестных для СПНАУ. Впервые такой метод был предложен Эйлером и далее развит Сильвестром и Кронекером [7—9]. Метод состоит в составлении общих результантов, равенство нулю которых дает новое уравнение, несодержащее одной из неизвестных. Из современных методов отметим работу [10], использующую базис Гробнера и теорию идеалов от полиномов, и метод спинорной линеаризации [11] (см. также [12]). Ниже мы изложим метод, выгодно отличающийся от вышеперечисленных исключительной эффективностью и простотой при реализации на ЭВМ.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 272—280.

1. Сопровождающая матрица (СМ) для СПНАУ. Если $f(x)$ — приведенный одномерный многочлен на F (F — заданное числовое поле)

$$f(x)=x^m+\alpha_1 x^{m-1}+\cdots+\alpha_m,$$

то СМ L для $f(x)$ определяется равенством

$$L(f):=\left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_m & -\alpha_{m-1} & -\alpha_{m-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{array}\right\|. \tag{1.1}$$

СМ обладает следующими свойствами [13, 14]: а) характеристический многочлен $L(f)$ равен f; б) минимальный многочлен для $L(f)$ равен f; в) инвариантные многочлены для $I\lambda-L(f)$ равны 1, 1, . . . , 1, f.

Итак, если СМ найдена, то неизвестная может быть вычислена как собственное значение матрицы L:

$$Ex\psi=L\psi, \quad \psi^2=1. \tag{1.2}$$

Более того, мы имеем возможность представить формально неизвестную в виде

$$x=(\psi,\ L\psi). \tag{1.3}$$

Возможно ли найти СМ и представление типа (1. 2) в случае СПНАУ ? Для ответа на этот вопрос рассмотрим систему M-мерных приведенных многочленов N-й степени каждый, заданных в кольце $K[x_1,\ x_2, \ldots,\ x_M]$:

$$f_m:=f_m(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_M), \quad m=\overline{1,\ M}. \tag{1.4}$$

Введем следующую систему переобозначений

$$\alpha_{k,i-1}-\alpha_{ki}x_k=0, \quad k=\overline{1,\ M}, \quad i=\overline{2,\ N}, \quad \alpha_{kN}=1. \tag{1.5а}$$

Присоединяя систему (1.5а) к каждому из уравнений

$$f_m=0, \quad m=\overline{1,\ M}, \tag{1.6}$$

заменим все неизвестные полиномы f_m k-й степени билинейным соотношением $x_r^k \to x_r\alpha_{r,N-k-1}$. Для полной билинеаризации системы N-й степени требуется еще ввести Σ_{MN} дополнительных соотношаний вида

$$\beta_{p,l-1}-\alpha_{pl}x_p=0, \quad l=\overline{1,\ \Sigma_{MN}}, \quad p=\overline{1,\ M}, \tag{1.5б}$$

где Σ_{MN} — число смешанных произведений

$$x_{r_1}^{p_1}\, x_{r_2}^{p_2} \cdots x_{r_j}^{p_j}, \quad p_1+p_2+\cdots+p_j \leq N, \quad j\leq M.$$

Полное число смешанных произведений, входящих в систему (1.6), в общем случае трудно определить: оно зависит от числа заданных коэффициентов в каждом конкретном случае.

Далее, будем предполагать Σ_{MN} известным, а число уравнений в системе (1.5) равным $p=L-1$, $L=L(N,\ M)$.

Так как кольцо многочленов $K[x]$ евклидово, то модуль $\mathfrak{M}$ является прямой суммой циклических $K[x]$-модулей $(\gamma_1), \ldots, (\gamma_L)$, аннулирующие идеалы которых порождаются заданной системой многочленов. Величины

$$\gamma,\ \alpha_{11}\gamma,\ \alpha_{12}\gamma, \dots, \alpha_{ij}\gamma, \dots, \beta_{kl}\gamma, \dots, \beta_L\gamma$$

линейно независимы над K и поэтому могут использоваться для построения K-базиса в циклическом $K[x]$-модуле [7]. Вводя столбец (или строку) вида

$$\psi_i := (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{ij}, \dots, \beta_{kl}, \dots, \beta_L, 1)\,.\gamma, \tag{1.7}$$

запишем каждое m-е уравнение системы (1.6) с присоединенными к нему $L-1$ уравнениями (1.5) как одно матричное уравнение, линейное по неизвестным x_k:

$$[\sum_{k=1}^{M} x_k A_{km} + A_{m0}]\,\psi = 0, \quad m = \overline{1, M}. \tag{1.8}$$

Здесь A_{km} и A_{m0} — квадратные $(L+1)\times(L+1)$ — матрицы из $F_{(L+1)\times(L+1)}$, состоящие из единиц, нулей и коэффициентов СПНАУ (1.6). Способ перевода полинома f_m в линейное по неизвестным выражение описанным выше путем, будем называть матричной линеаризацией СПНАУ. Известно [15], что в этом случае

$$\det[\sum_{k=1}^{M} x_k A_{km} + A_{m0}] = f_m. \tag{1.9}$$

Столбец ψ по определению (1.7) может быть нормирован условием $\psi^2 = 1$. Поэтому из (1.8) и (1.9) следует, что $f_m = 0$. Таким образом, решения (1.8) являются решениями (1.6), и обратное тоже верно. Поскольку матрицы

$$A_m := [\sum_{k=1}^{M} x_k F_{km} + A_{m0}] \tag{1.10}$$

при различных m не коммутируют друг с другом, то ψ, вообще говоря, есть функция от m. Для всех уравнений системы (1.8) получим один общий столбец ψ, если уравнения (1.8) приведем к совместному виду. С этой целью проделаем следующую процедуру. Умножим по правилу прямого произведения матрицу A_1 слева, а остальные $M-1$ матрицы — справа на единичную матрицу: $\bar{A}_1 = E_L \otimes A_1$ $\bar{A}_i = A_i \otimes E_L$, $i = \overline{2, M}$, E_L — единичная матрица порядка L. При этом

$$\det(A_m \otimes E_L) = \det(E_L \oplus A_m) = (\det A_m)^L = f_m^L = 0. \tag{1.11}$$

Следовательно, решения (1.11) есть решения (1.8) и (1.6). Затем по тому же правилу умножим $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ слева, а остальные $M-2$ матриц справа на E_L. Далее, продолжая этот процесс $M-1$ раз, получим матрицы AE_m, $m = \overline{1, M}$, соответствующие матрицам A_m по формулам:

$$AE_1 = E_L^{M-1} \otimes A_1,\ AE_2 = E_L^{M-2} \otimes A_2 \otimes E_L, \dots, AE_M = A_M \otimes E_L^{M-1},$$

где $E_L^k = \underbrace{E_L \otimes E_L \otimes \cdots \otimes E_L}_{k}$.

Лемма 1. *Матрицы AE_m, $m = \overline{1, M}$ взаимно коммутируют.*

Доказательство. Докажем это утверждение, используя метод математической индукции. Рассмотрим сначала систему из трех матриц A_1, A_2 и A_3 порядка L. Применяя вышеописанную процедуру, приведем их к виду

$$AE_1 = E^2 \otimes A, \quad AE_2 = E \otimes A_2 \otimes E, \quad AE_3 = A_3 \otimes E^2.$$

Согласно известной формуле [9]: $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, имеем $AE_1 AE_2 = (E \otimes E \otimes A_1)(A_3 \otimes E \otimes E) = (EA_3) \otimes ((E \otimes A_1)E^2) = A_3 \otimes E \otimes A_1$. С другой стороны,

$$AE_2 AE_1 = (A_3 \otimes E \otimes E)(E \otimes E \otimes A_1) = (A_3 E) \otimes (E^2(EA_1)) = A_3 \otimes E \otimes A_1.$$

Таким образом, AE_1 и AE_2 коммутируют. Тем же путем легко показать, что AE_3 коммутирует с AE_1 и AE_2. Итак, утверждение для $M=3$ доказано. Теперь переходим к доказательству случая M матриц, предполагая, что для $M-1$ матриц утверждение леммы справедливо. Из случая $M-1$ имеем $M-1$ взаимнокоммутирующих матриц AE_{M-1} порядка $L(M-1)$. При прямом произведении этих матриц на E_L с одной стороны (например, слева), результирующие матрицы также будут коммутирующими. Действительно,

$$(E\otimes AE_k)\ (E\otimes AE_p)=E\otimes(AE_kAE_p)=E\otimes(AE_p\ AE_k).$$

Умножая прямым способом из $M-1$ взаимно коммутирующих матриц слева, получим матрицы $AE_1, \ldots, AE_{M-1}$, а умножая справа — матрицы $AE_2, \ldots, AE_M$. Таким образом, остается доказать коммутативность матриц AE_1 и AE_M. Это можно сделать непосредственно:

$$AE_1\ AE_M=(E\otimes E\otimes A_1)\ (A_M\otimes E^{M-1})=(A_M\otimes E^{M-2}\otimes A_1),$$
$$AE_MAE_1=(A_M\otimes E^{M-1})(E\otimes E^{M-2}\otimes A_1)=(A_M\otimes E^{M-2}\otimes A_1).$$

Лемма 1 полностью доказана.

В результате описанной выше процедуры вместо (1.8) получим другую, но равносильную матричную систему

$$[\sum_{k=1}^{M} x_kAE_{km}+AE_{m0}]\ \psi=0,\quad m=\overline{1, m}. \tag{1.12}$$

Введем M-мерные вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{AEO}$:

$$\mathbf{x}:=(x_1, x_2, \ldots, x_M),\ \mathbf{AEO}:=(AE_{10}, \ldots, AE_{m0}). \tag{1.13}$$

Используя эти определения, систему матричных уравнений можно переписать как одно матричное уравнение с матрицей блочного типа

$$AEX(\mathbf{x}\otimes\psi)=-(\mathbf{AEO}\otimes\psi), \tag{1.14}$$
$$AEX:=\begin{Vmatrix} AE_{11} & \cdots & AE_{1M} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ AE_{M1} & \cdots & AE_{MM} \end{Vmatrix}.$$

До сих пор мы умалчивали о структуре матриц A_{ik}. Из формы соотношений (1.5) следует, что A_{ik} содержат нулевые строки или столбцы. Действительно, в системе (1.5а), присоединенной к k-му уравнению (1.6), только $N-1$ строки содержат x_k, а остальные строки x_k не содержат. Следовательно, у матрицы A_{kk} некоторые строки будут состоять из одних нулей. Таким образом, матрицы A_{ki} не имеют обратных. Не имеют обратных и AE_{ki}, что следует из (1.11). В силу коммутативности матричных строк у блочной матрицы AEX, нетрудно показать, что AEX тоже не имеет обратной AEX^{-1}. Тем самым мы доказали, что таким путем нельзя найти СМ для СПНАУ.

2. Матричная линеаризация по одной неизвестной и приведение системы к треугольному виду. Рассмотрим, какие существуют пути обойти трудности получения СМ для СПНАУ. Первый самый простой путь — это линеаризация СПНАУ только по одной неизвестной.

С целью демонстрации метода, примем для приведенных полиномов (1.4) следующую форму:

$$f_m:=x_m^N+\alpha_{1m}x_m^{N-1}+\cdots+\alpha_{N-1,m}x_m+\alpha_{Nm},\quad m=\overline{1, M}. \tag{2,1}$$

Для простоты изложения мы ограничиваемся случаем, когда все полиномы имеют одинаковые степени при ведущих элементах. Ясно, что в (2.1) коэффициенты a_{km}, $k=\overline{1, N}$, $m=\overline{1, M}$ есть функции:

$$a_{km}=a_{km}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_M). \tag{2.2}$$

Для m-го уравнения системы (2.1) с ведущим элементом может быть определена СМ:

$$x_m\psi=\widehat{X}_m\psi, \tag{2.3}$$

где $\widehat{X}_m$ имеет вид (1.1). Таким образом, $\widehat{X}_m$ не зависит от неизвестной x_m, что является основным достоинством СМ-представления.

Лемма 2. *Система* (1.6) *равносильна системе вида*

$$\begin{aligned} &f_1=0,\\ &F_2: \det[f_2(\widehat{X}_1, x_2, \ldots, x_M)]=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_M: =\det[f_M(\widehat{X}_1, x_2, \ldots, x_M)]=0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Содержание леммы 2 основано на известной теореме алгебры [2, 13]: „если $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ — собственные значения некоторой $N\times N$-матрицы A и $R(x)$ — скалярный многочлен, то собственными значениями матрицы $R(A)$ будут $R(\mu_1)$ $R(\mu_2), \ldots, R(\mu_N)$“. Из этой теоремы следует, что собственными значениями матриц $\widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \ldots, \widehat{f}_M$ являются многочлены $f_2, f_3, \ldots, f_M$. Следовательно, если $f_m=0$, $m=\overline{2, M}$ то в силу нетривиальности ψ, из $\widehat{f}_m\psi=f_m\psi$ получим $\det[\widehat{f}_m]=0$, $m=\overline{2, M}$. Но, с другой стороны,

$$\det[\widehat{f}_m[=\det[f_m\otimes E_N]=(f_m)^N. \tag{2.5}$$

Поэтому верно и обратное, т. е. если x_m, $m=\overline{1, M}$ являются решениями (2.4), то они являются и решениями (1.6).

Процесс исключения неизвестных, применяя представление (2.3), можно продолжить до тех пор, пока не приведем систему к треугольному виду. На нижнем углу треугольника получим одномерное полиномиальное уравнение

$$F_M(x_m)=0. \tag{2.6}$$

Решая это уравнение, поднимаясь по треугольной лестнице путем подстановки полученных решений в уравнения с большим числом неизвестных, получим все решения СПНАУ (предполагается, что система имеет конечное число решений). Пользуясь методом математической индукции, можно показать, что степень уравнения 2.6) равна $N_M=N^{2^{N-1}}$ Как показано в [15], число решений такой системы есть

$$Y=N_M\cdot\prod_{j=1}^{M-1}N_j=N^{M\cdot 2^{M-1}}. \tag{2.7}$$

Как следует из теоремы Безу [16], число корней многочленов из $K[x_1, x_2, \ldots, x_M]$ степени $N_1, N_2, \ldots, N_M$, соответственно либо бесконечно, либо равно $N_1, N_2 \ldots N_M$, при этом корни засчитываются с надлежащей кратностью и включаются бесконечно удаленные точки. Поскольку в процессе треуголизации преобразованное уравнение строго соответствует исходному, то лишние корни не появляются. Однако из (2.5) следует, что при этом с ростом степени уравнения растет и число вырождения (или кратности) корней. Таким образом, степень 2^{M-1} над числом решений уравнений есть общая степень вырождения, которую мы зарабатываем как „плату“ за разделение переменных в СПНАУ в рамках изложенного метода.

3. Метод исключения неизвестных в системе однородных нелинейных уравнений. Метод, описанный выше, — приведение системы к треугольному виду путем матричной линеаризации по одной (ведущей) переменной дает те же результаты, что и метод Эйлера. Основное его достоинство — простота алгоритмизациии при реализации на языке аналитического программирования. В настоящем пункте мы изложим метод, который с полным правом можно называть применением методи блочного исключения Гаусса—Жордана для СПНАУ. Метод применим только к однородным уравнениям. Также, как и метод Гаусса—Жордана, он обладает прямым и обратным ходом. В отличие от указанных методов, алгоритм метода сравнительно легко может быть реализован в виде программы для ЭВМ, например, на языке Фортран.

Как мы убедились в пункте 1, метод матричной линеаризации приводит к особым матрицам, не имеющим обратных. Эту трудность можно обойти путем превращения исходного СПНАУ в систему однородных уравнений

$$f_m \to x^{\lambda} f_m = 0. \tag{3.1}$$

Степень однородности (3.1) зависит от N и M: $\lambda = \lambda(N, M)$. Пусть x_k является ведущим элементом в процедуре исключения неизвестных, начиная с k-го уравнения. Для того, чтобы матрица A_{kk} при x_k имела обратную, необходимо, чтобы во всех уравнениях системы переобозначений присутствовала неизвестная x_k, причем так, что она должна быть при всех членах идеала ψ. Этого можно достигнуть путем умножения системы (1.5), несодержащих $N-1$ уравнений (1.5) на x_k. Получим

$$x_k(\alpha_{n,i-1} - \alpha_{ni} x_n) \Rightarrow x_k \alpha_{n-1} - \alpha_{ni} x_k x_n \Rightarrow x_k \alpha_{n,i-1} - \bar{\alpha}_{nki} x_n = 0, \quad n \neq k, \tag{3.2}$$

где

$$\bar{\alpha}_{nki} - \alpha_{ni} x_k = 0 \tag{3.3}$$

— одно из соотношений в системе (1.5), необходимое для билинеаризации смешанных произведений. Таким образом, умножения на x_k в $L-N$ уравнениях системы (1.5) не приводит к появлению новых соотношений, а, следовательно, и новых элементов у идеала ψ. Это означает, что форма ψ инвариантна относительно операции умножения системы (1.5б) на x_k. Благодаря такому замечательному свойству процедуры матричной линеаризации СПНАУ с помощью замены (1.5) $\overset{\otimes x_k}{\Rightarrow}$ (3.2), получим матричную систему

$$\left[\sum_{m=1}^{M} B_{mk} x_m + B_{k0}\right]\psi = 0, \quad k = \overline{1, M} \tag{3.4}$$

с неособыми матрицами B_{kk} при ведущих элементах x_k блочной матрицы, $[B_{mk} x_k]$ k, $m = \overline{1, M}$.

Приведем систему (3.4) к совместному виду, следя вышеописанному алгоритму образования прямых произведений с единичными матрицами порядка L. В результате получим систему

$$\left[\sum_{m=1}^{M} BE_{mk} x_m + BE_{k0}\right]\psi = 0, \tag{3.5}$$

где матрицы $x_m BE_{mk}$, BE_{k0} порядка L^M коммутируют с матрицами $x_l BE_{lm}$, B_{n0} $n \neq k$, $m = \overline{1, M}$, $l = \overline{1, M}$.

Перепишем систему (3.5) в той же форме, что и (1.14). Именно:

$$BEX(\mathbf{x} \otimes \psi) = (\mathbf{BEO} \otimes \psi),$$

$$\mathbf{BEO}:=\mathbf{BEO}(BE_{10}\ BE_{20},\ldots,BE_{M0}),$$

(3.6)
$$BEX:=\left\|\begin{matrix} BE_{11} & BE_{12} & \cdots & BE_{1M} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ BE_{M1} & BE_{M2} & \cdots & BE_{MM}\end{matrix}\right\|.$$

В данной постановке матрица BEX имеет обратную матрицу BEX^{-1}, поэтому (3.6) может быть представлена как задача нахождения собственных значений у блочной матрицы

(3.7)
$$R=BEX^{-1}(\mathbf{BEO}\boxed{\times}E_p),\quad (\mathbf{X}\boxed{\times}E_p)u=uR,$$

где $p=M\,.\,L^M$, $(\mathbf{X}\boxed{\times}E_p)$ — диагональная матрица собственных значений порядка p из M блоков, в каждом блоке которого находится матрица $(x_k\otimes E_L)$, $k=\overline{1,M}$, u— ортогональная матрица, столбцы которой есть собственные вектора.

Таким образом, исходная задача нахождения корней системы M-мерных полиномов N-й степени переформулирована как задача на собственные значения. В равной мере эта задача может быть определена как проблема отыскания корней характеристического полинома (одномерного!) степени p. Матрица R состоит из M строк матриц порядка L^M, имеющих (в силу коммутации) общие собственные вектора Следовательно, из (3.7) получим

(3.8)
$$x_m\psi=\widehat{X}_m\psi,\quad m=\overline{1,\ M},$$

где $\widehat{X}_m=\sum_{k=1}^{M}R_{mk}$ — матрицы порядка L^M. Матрицы $\widehat{X}_m$ зависят только от коэффициентов исходного уравнения. Приведение системы (1.6) к виду (3.8) будем называть прямым ходом процедуры матричной линеаризации. При этом за счет приобретения нулевых решений мы осуществили фактически разделение переменных в нелинейной задаче. Матрицы $\widehat{X}_m$ по существу есть СМ для СПНАУ.

4. Обратный ход в методе исключения неизвестных для однородной СПНАУ. Подобно тому, как метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений обладает как прямым ходом, так и обратным, в методе матричной линеаризации можно реализовать аналог обратного хода. Допустим, что после приведения исходного СПНАУ (3.1) к виду (3.8) задача отыскания собственных значений и собственых векторов $(x_{mn},\ \psi_n)$ матрицы $\widehat{X}_m$ из (3.8) для заданного $m=m_0$ решена. Поскольку ψ по построению является общим собственным вектором для всех матриц $\widehat{X}_m$, $m=\overline{1,M}$, то собственные значения матриц при $m\neq m_0$ можно найти по формуле

(4.1)
$$x_{mn}=(\psi_n,\ \widehat{X}_m\psi_n),\quad m=\overline{1,\ M}.$$

Тот факт, что (4.1) действительно определяет решения (3.1) докажем в виде теоремы:

Теорема. *Формула* (4.1) *определяет спектр координат точек в М-мерном аффинном пространстве, являющееся кортежом решений СПНАУ* (3.1).

Доказательство: Представим (3.7) как линейную систему неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора $(\mathbf{x}\otimes\psi)$ с правой частью $(\mathbf{BEO}\otimes\psi)$ и неособой матрицей BEX. Поскольку BEX^{-1} существует, то, согласно теории линейной алгебры [9], решение (3.7) существует, оно — единственное и, как мы убедились выше, формально представлено в виде (4.1). Подставляя в (3.7) матричный столбец $\{\widehat{X}_j\Phi_\beta\}$ вместо вектора $\{x_j\Phi_\beta\}$, получим

(4.2)
$$\sum_{j=1}^{M}BE_{ij}^{(\alpha\beta)}\ \{\widehat{X}_j\Phi_\beta\}-BE_{i0}^{(\alpha\beta)}\Phi_\beta=0.$$

В силу условия $\Phi^{\beta}\Phi_{\beta}=1$, имеем

$$\mathrm{Det}\{\sum_{j=1}^{M} BE_{ij}^{(\alpha\beta)}\widehat{X}_j - BE_{io}\} \Rightarrow \widehat{X}_i^{\lambda} f_i(\widehat{X})=0, \tag{4.3}$$

где Det есть определение матричного детерминанта для блочной матрицы с коммутирующими блочными строками [17]. Согласно известной теореме из алгебры, упомянутой в лемме пункта 2, если матрицы $\widehat{X}_m$ удовлетворяют уравнению (4.3), то их собственные значения также удовлетворяют этим уравнениям. Таким образом, из (4.3) следует

$$x_i^{\lambda} f_i(x_1, x_2, \dots, x_M)=0. \tag{4.4}$$

Теорема доказана.

5. Численный пример. В качестве иллюстрации метода приведем решение следующей системы

$$\left| \begin{aligned} & x^3+a_{03}y^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{20}x^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}=0, \\ & y^3+b_{30}x^3+b_{21}x^2y+b_{12}xy^2+b_{11}xy+b_{02}y^2+b_{20}x^2+b_{10}x+b_{01}y+b_{00}=0. \end{aligned} \right. \tag{5.1}$$

Для первого уравнения выберем ψ в следующем виде: $\psi_1=(\alpha_2, \beta_2, \alpha_1, \beta_1, \gamma, 1)$, элементы которого определяются из системы

$$\begin{gathered} x\beta_2-\gamma y=0, \quad x\alpha_1-\alpha_2=0, \quad x\beta_1-\gamma=0, \\ x\gamma-\alpha_2 y=0, \quad x-\alpha_1=0. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Присоединяя систему (5.2) к первому уравнению (5.1), получим матрично-линеаризованное уравнение: $(xE_6+yXY+XO)\psi_1=0$, где E_6 — единичная матрица 6-го порядка.

$$XY:=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{03} & a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad XO:=\begin{vmatrix} a_{20} & a_{02} & a_{10} & a_{01} & 0 & a_{00} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Второе уравнение (5.1) практически удобнее линеаризовать в пространстве вектора $\psi_2=(\beta_2, \alpha_2, \beta_1, \alpha_1, \gamma, 1)$, присоединяя следующую систему переобозначений $\alpha_2 y-\gamma x=0$, $y\beta_1-\beta_2=0$, $y\alpha_1-\gamma=0$, $y\gamma-\beta_2 x=0$, $y-\beta_1=0$. В результате получим матрично-линеаризованное уравнение

$$(xYX+yE_6+YO)\psi_2=0,$$

где матрицы YX и YO получаются из матриц XY и XO, соответственно, путем замен $a\to b$, $x\to y$, $y\to x$.

В качестве численного примера решалась система с коэффициентами: $a_{03}=2$, $a_{21}=-5$, $a_{12}=5$, $a_{11}=1$, $a_{20}=2.5$, $a_{02}=3.5$, $a_{01}=-12$, $a_{10}=-4$, $a_{00}=-82$, $b_{30}=-7$, $b_{21}=5.5$, $b_{12}=3.5$, $b_{11}=1$, $b_{02}=2.5$, $b_{20}=1.5$, $b_{10}=-7$, $b_{01}=2$, $b_{00}=-94$. Мы нашли всего $N^M=3^2=9$ решений, что согласуется с теоремой Безу. Численные решения системы (5.1) приведены в таблице.

№	$R_e x$	$I_m x$	$R_e y$	$I_m y$
1	0.6888499159	—1.405949334	—4.266538699	4.825470544
2	0.6888499159	1.405949334	—4.266538699	—4.825470544
3	—0.1132408741	—1.890967759	—2.042248759	—1.989318662
4	—3.629196866	0.7888031725	—2.791121708	0.8408212517
5	—3.629196866	—0.7888031725	—2.791121708	—0.8408212517
6	—0.6679205951	0.0	4.089157521	0.0
7	1.0	0.0	3.0	0.0
8	2.929738442	0.0	2.865541823	0.0
9	—0.1132408741	1.890967759	—2.042248759	1.989318662

Подстановка этих решений в (5.1) дает невязку $\sim 10^{-10}$.

Заключение. Подход, развитый в настоящей работе, позволяет в принципе найти все корни (исключая бесконечные точки) СПНАУ. В этом достоинство метода. Линеаризация (аналитическая) нелинейных уравнений с целью построения различных итерационных методов нахождения решений является основополагающей процедурой во всех существующих методах решения нелинейных задач [18]. В изложенном выше подходе мы также использовали линеаризацию, но матричную (алгебраическую) линеаризацию. Матричная форма линеаризации позволяет разделить неизвестные, свести многомерную задачу к одномерной или к задаче на собственные значения. В область применения предложенного метода не ограничена только СПНАУ: метод, после соответствующего развития, с успехом может быть применен и для решения неполиномиально-нелинейных, а также дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., 1963.
2. Д. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. М.' 1970.
3. Х. И. Семерджиев. Метод для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения, если заданы их кратности. *Доклады БАН*, 35, 1982, 1057—1060.
4. Х. И. Семерджиев, С. Г. Тамбуров. Об одном методе определения кратностей нулей алгебраических полиномов. *Доклады БАН*, 37, 1984, 1143—1145.
5. П. Г. Акишин, И. В. Пузынин. Реализация метода Ньютона в разностной задаче Штурма—Лиувилля. Сообщение ОИЯИ, 5-10992, Дубна, 1977.
6. А. В. Иванисов, В. К Полищук. Метод нахождения корней полиномов, сходящийся при любом начальном приближении. *Ж. вычисл. мат. и мат. физики*, 25, 1985, № 5, 643—653.
7. Б. Л. ван дер Варден. Алгебра. М., 1979.
8. Н. Обрешков. Висша алгебра. С., 1962.
9. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., 1965.
10. B. Buchberger. An algorithmical criterion for the solvability of algebraic systems of equations. *Aequat. math.*, 4, 1970, 374—383.
11. Н. Г. Кузнецов, С. Б, Пшеничников. Спинорный метод решения систем нелинейных алгебраических уравнений. *Доклады АН СССР*, 238, 1985, 1073—1076.
12. J. Moses. Solution of systems of polynomial equations by elimination. *Comm. ACM*, 9, 1966, 634.
13. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., 1967.
14. П. Ланкастер. Теория матриц. М., 1978.
15. Р. М. Ямалеев. Решение системы полиномиально-нелинейных уравнений методом матричной линеаризации. Сообщение ОИЯИ. Р11-85-815, Дубна, 1985.
16. И. П. Мысовских. Интерполяционые кубатурные формулы. М., 1981.
17. J. Vitoria. A Block-Cayley-Hamilton theorem. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roum.*, 26, (74), 1982, No. 1, 1—5.
18. Е. П. Жидков, Г. И. Макаренко, И. В. Пузынин. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики, *ЭЧАЯ*, 4, 1973, № 1, 127—166.

Пловдивский университет
Математический факультет,
Пловдив-4000, Болгария

Объединенный институт ядерных исследований
СССР—141980, Дубна, ЛВТА, ОВМ

Поступила 28. 3. 1986