Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

СТРУКТУРА T-ИДЕАЛА, ПОРОЖДЕННОГО ТОЖДЕСТВОМ ХОЛЛА ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ II

РУСАЛИН СТ. НИКОЛАЕВ

Изучается структура фактор-модулей $\Gamma_n \cap T(\mathfrak{M})/\Gamma_n \cap T(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{M} = \mathrm{var}\, M_2$, а $\mathfrak{A}$ — многообрази ассоциативных алгебр без единицы, определенное собственными полилинейными тождествами пятой степени матричной алгебры M_2. Доказывается сформулированная в первой части работы теорема о шпехтовости многообразия ассоциативных алгебр без единицы, определенного тождеством Холла $[[x_1, x_2]^2, x_3]=0$.

Будем пользоваться предварительными сведениями и обозначениями из первой части работы. Так K — поле характеристики 0; $\mathfrak{M} = \mathrm{var}\, M_2$, а $\mathscr{H}$ и $\mathfrak{A}$ — многообразия ассоциативных алгебр без единицы, определенные соответственно тождеством Холла $[[x_1, x_2]^2, x_3]=0$ и собственными полилинейными тождествами пятой степени матричной алгебры M_2 над полем K; P — пространство полилинейных, P_n (соотв. Γ_n) — пространства полилинейных (соотв. собственных полилинейных) многочленов степени n из свободной ассоциативной алгебры $K\langle X\rangle$ и т. д.

Структура модулей $U_n = \Gamma_n \cap T(\mathfrak{M})/\Gamma_n \cap T(\mathfrak{A})$

Лемма (А. Попов). *Пусть W_n — подмодуль Γ_n, порожденный произведениями коммутаторов, по меньшей мере один из которых имеет длину $\geqq 3$. Тогда любой многочлен из W_n, кососимметричный относительно не менее четырех букв, принадлежит $T(\mathfrak{A})$.*

Доказательство. Пусть многочлен $f \in W_n$ кососимметричен относительно четырех букв, находящихся в двух коммутаторах. Так как (см. [1]) $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), v] \in T(\mathfrak{A})$ и $[\sigma(1), \sigma(2), u][\sigma(3), \sigma(4)] \in T(\mathfrak{A})$, то после замен $u = u.z$ и $v = z.v$ получаем, что для любого k многочлены $[\sigma(1), \sigma(2)]z^k.[\sigma(3), \sigma(4), v]$ и $[\sigma(1), \sigma(2), u]z^k[\sigma(3), \sigma(4)]$ также лежат в $T(\mathfrak{A})$. С помощью буквы z мы можем теперь сделать длины коммутаторов любыми и переставить, если это нужно, другие коммутаторы, т. е. $f \in T(\mathfrak{A})$.

Все другие случаи сводятся к произведениям $[\sigma(1), \sigma(2), \ldots][\sigma(3), \ldots],[\sigma(4), \ldots],[\sigma(1), \ldots][\sigma(2), \sigma(3), \ldots][\sigma(4), \ldots]$ и $[\sigma(1), \ldots][\sigma(2), \ldots][\sigma(3), \sigma(4), \ldots]$. Чтобы показать, что они тоже из $T(\mathfrak{A})$, достаточно доказать справедливость леммы для $n=7$.

Для $n=5$ и $n=6$ утверждение леммы выполняется согласно доказательствам предложений 1 и 2 из [1]. Для $n=7$ необходимо показать, что все следствия седьмой степени от стандартного многочлена S_6 лежат в $T(\mathfrak{A})$. Эти следствия получаются одним из следующих способов:

1) замены $x_6 = x_6 u (x_6 = u x_6)$;

2) замены $x_6 = x_1^2$;

3) замены $x_6 = [u, v]$.

В первом случае получаются линейные комбинации произведений коммутаторов $[\sigma(1), \sigma(2)]$, $[\sigma(3), \sigma(4)]$ и $[\sigma(5), \sigma(6), u]$, которые из $T(\mathfrak{A})$, так как получаются из $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), u]$ и $[\sigma(1), \sigma(2), u][\sigma(3), \sigma(4)]$ умножением на двойной коммутатор.

При замене $x_6 = x_1^2$ получаются линейные комбинации произведений вида $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)][\sigma(5), x_1^{(2)}]$, $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1][\sigma(4), \sigma(5), x_1]$ и $[\sigma(1), x_1], [\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4)$ $\sigma(5), x_1]$, как и произведений, в которых тройной коммутатор является первым или вторым сомножителем. Из тождества $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)]. [\sigma(5), \sigma(6), x_1]|_{x_6=x_1} = 0$ следует, что достаточно рассмотреть только произведения первых двух видов.

Из $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1^{(2)}] - [\sigma(1), x_1^{(2)}][\sigma(2), \sigma(3)] \in T(\mathfrak{A})$ (см. [1]), после умножения на двойной коммутатор, получаем

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)][\sigma(5), x_1^{(2)}] - [\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1^{(2)}][\sigma(4), \sigma(5)] \in T(\mathfrak{A});$$

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1^{(2)}][\sigma(4), \sigma(5)] - [\sigma(1), x_1^{(2)}][\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5)] \in T(\mathfrak{A}).$$

Из выполненных в многообразии $\mathfrak{A}$ тождеств $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), x_1] = 0$ и $[\sigma(1), \sigma(2), x_1][\sigma(3), \sigma(4)] = 0$ (см. [1]) заменой x_4 на x_1 и умножением как выше следуе

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)][\sigma(5), x_1^{(2)}] - [\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1]]\sigma(4), \sigma(5), x_1] \in T(\mathfrak{A});$$

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1^{(2)}][\sigma(4), \sigma(5)] + [\sigma(1), x_1][\sigma(2), \sigma(3), x_1][\sigma(4), \sigma(5)] \in T(\mathfrak{A});$$

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), x_1][\sigma(5), x_1] + [\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1^{(2)}][\sigma(4), \sigma(5)] \in T(\mathfrak{A});$$

$$[\sigma(1), \sigma(2), x_1][\sigma(3), x_1][\sigma(4), \sigma(5)] + [\sigma(1), x_1^{(2)}][\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5)] \in T(\mathfrak{A}).$$

Следовательно, рассмотренные произведения лежат в $T(\mathfrak{A})$.

В многочлене $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), v] \in T(\mathfrak{A})$ положим $x_4 = x_4 u$:

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)][u, v] - [\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), v][\sigma(4), u] \in T(\mathfrak{A}).$$

Отсюда, заменяя x_4 на $[x_4, x_5]$, получаем

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), v][\sigma(5), u] - [\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), v][\sigma(4), \sigma(5), u] \in T(\mathfrak{A}),$$

а коммутируя с x_5,

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), (4\sigma)][u, v, \sigma(5)] \in T(\mathfrak{A}).$$

Аналогично показывается, что $[\sigma(1), \sigma(2)][u, v, \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5)] \in T(\mathfrak{A})$ и $[u, v, \sigma(1)][\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5)] \in T(\mathfrak{A})$, откуда следует, что после замены x_6 на $[u, v]$ в стандартном многочлене S_6, получаем многочлен из $T(\mathfrak{A})$. Тем самым мы показали справедливость леммы для $n = 7$. Следовательно, в $T(\mathfrak{A})$ лежит и многочлен $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), u][\sigma(4), v, w]$. Тогда, как в первом из рассмотренных случаев, получаем, что произведения вида $[\sigma(1), \sigma(2)]z^{k_1}[\sigma(3), u]t^{k_2}[\sigma(4), v, w]$ тоже из $T(\mathfrak{A})$. И в этом случае с помощью букв z и t можем сделать длины участвующих коммутаторов любыми, что доказывает лемму.

Рассмотрим теперь следствия из стандартного многочлена S_{2n} для произвольного n. Следствия степени $2n+1$, очевидно, являются многочленами из пространства W_{2n+1}, кососимметричные относительно не менее четырех букв, т. е. они из $T(\mathfrak{A})$. Следствия степени $2n+2$ отвечают диаграммам $[3, 1^{2n-1}]$, $[2^2, 1^{2n-2}]$ и $[2, 1^{2n}]$. Соответствующие первой из этих диаграмм многочлены из Γ_{2n+2}, очевидно, лежат в подмодуле W_{2n+2}. Для диаграммы $[2, 1^{2n}]$ достаточно рассмотреть произведение

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)] \ldots [\sigma(2n-1), \sigma(2n)][\sigma(2n+1), x_1].$$

По модулю W_{2n+2} оно сравнимо с произведением

$$[\sigma(2), \sigma(3)] \ldots [\sigma(2n), x_1][\sigma(2n+1), x_1] = \frac{1}{2}[\sigma(2), \sigma(3)] \ldots [\sigma(2n), x_1, [\sigma(2n+1), x_1]] \in W_{2n+2}.$$

Для диаграммы $[2^2, 1^{2n-2}]$ необходимо рассмотреть произведение

$$[\sigma(1), \sigma(2)] \dots [\sigma(2n-1), \sigma(2n)][x_2, x_1]. \text{ В } [\sigma(1), \sigma(2)] \dots [\sigma(2n-3), \sigma(2n-2)][\sigma(2n-1), u, w] \in W_{2n+2}$$

положим $u=u.v$. Кососимметризуем по $(x_1, \dots, x_{n-1}, u)$ и по (v, w) и заменим, $u=x_{2n}$, $v=x_1$, $w=x_2$:

$$[\sigma(1), \sigma(2)] \dots [\sigma(2n-1), \sigma(2n)][x_2, x_1]+[\sigma(1), \sigma(2)] \dots [\sigma(2n-1), \tau(1)][\sigma(2n), \tau(2)] \in T(\mathfrak{A}).$$

Из $\mathrm{Assym}[\sigma(1), \sigma(2)] \dots [\sigma(2n-1), \sigma(2n)][\sigma(2n+1), y_2]=0$ получаем, что по модулю W_{2n+2} второе из участвующих выше произведений сравнимо с первым. Тем самым мы доказали

Предложение 5. *S_n-модуль U_n имеет следующую структуру:*

для $n=2$ или $n\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, $U_n=(0)$;

для $n\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, $n\geqq 4$, $U_n=M(D, S_n)$, где $D=[1^n]$, а S_n — стандартное тождество степени n.

Доказательство теоремы: многообразие $\mathscr{H}$ является шпехтовым.

Доказательство проведем с использованием метода Хигмана-Коэна ([2, 3]). Для этого нам нужны некоторые сведения об упорядоченных множествах.

Пусть $(A, \leqq)$ — частично упорядоченное множество. Следующие условия эквивалентны ([2], теорема 2.1).

(i) Любая бесконечная последовательность $a_1, a_2, \dots$ элементов из A содержит монотонно возрастающую подпоследовательность

$$a_{i_1} \leqq a_{i_2} \leqq \dots, \quad i_1 < i_2 < \dots$$

(ii) В любом подмножестве B множества A существует конечное подмножество $B_0 \subseteq B$, имеющее свойство: для любого $b \in B$ существует $b_0 \in B_0$, так что выполняется $b_0 \leqq b$.

Частично упорядоченное множество $(A, \leqq)$, в котором выполняются условия (i)—(ii), называется частично хорошо упорядоченным. Ясно, что и подмножества такого множества являются частично хорошо упорядоченными.

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathscr{T}$ — множество естественных чисел с обычной упорядоченностью;

$\mathscr{T}_0$ — множество целых неотрицательных чисел с обычной упорядоченностью

Φ — множество всех монотонных инъективных отображений $\varphi: \mathscr{T}_0 \to \mathscr{T}_0$, таких; что $\varphi(0)=0$.

Пусть $(A, \leqq)$ — частично упорядоченное множество и $k\geqq 0$ — фиксированное, целое число. Через $\widetilde{A}[k]$ обозначим множество всех элементов вида $(i_1, \dots, i_k; a_1, \dots, a_m)$, где $i_s \in \mathscr{T}$ для $s=1, \dots, k$, а $a_1, \dots, a_m$ — произвольная конечная (может и пустая) последовательность элементов из множества A. В множестве $\widetilde{A}[k]$ рассмотрим отношение „$\leqq$", определенное следующим способом: для элементов $s=(i_1, \dots, i_k; a_1, \dots, a_m)$ и $t=(j_1, \dots, j_k: b_1, \dots, b_n)$ из $\widetilde{A}[k]$ будем считать, что $s\leqq t$, если существует отображение $\varphi \in \Phi$, такое, что $\varphi(i_r)=j_r$ для $1\leqq r\leqq k$, $\varphi(m)\leqq n$, и для любого $p=1, 2, \dots, m$ выполняется неравенство $a_p \leqq b_{\varphi(p)}$.

Легко проверить, что это отношение порядка превращает $\widetilde{A}[k]$ в частично упорядоченное множество. При этом выполняется следующее утверждение ([4], лемма 1):

Если $(A, \leqq)$ — частично хорошо упорядоченное множество, то для любого целого числа $k \geq 0$ множество $\widetilde{A}[k]$ тоже частично хорошо упорядоченное.

Учитывая предложение 5, получаем, что базис фактор-модуля $U'_n = P_n \cap T(\mathfrak{M})/P_n \cap T(\mathfrak{A})$ образуют многочлены

$$\varphi_{r,t} = x_{i_1} \dots x_{i_r} S_{2t}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2t}}),$$

где $i_1 < \dots < i_r$ и $r + 2t = n$.

В множестве A элементов вида $(i_1 \dots, i_r; i_1, \dots, j_{2t})$ введем следующее отношение порядка:

$$(i_1, \dots, i_r; j_1, \dots, j_{2t}) \leqq_\Phi (k_1, \dots, k_p; l_1, \dots, l_{2q}),$$

если существует отображение $\varphi \in \Phi$, которые посылает последовательность $(i_1, \dots, i_r)$ в подпоследовательность $(k_1, \dots, k_p)$ (сохраняя порядок), а последовательность $(i_1, \dots, j_{2t})$ — соответственно в подпоследовательность $(l_1, \dots, l_{2q})$. Согласно цитированному выше утверждению, множество $(A, \leqq_\Phi)$ хорошо упорядочено.

Для порождающих элементов φ_r одной и той же степени n введем следующий порядок:

$$x_{i_1} \dots x_{i_s} S_{2p}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2p}}) \leqq x_{i_1} \dots x_{i_r} S_{2t}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2t}}),$$

если выполняется одно из условий:

1) $s < r$;
2) $s = r$ и слово $x_{i_1} \dots x_{i_s}$ меньше слова $x_{i_1} \dots x_{i_r}$ лексикографически.

Дальше будем следовать идею работы А. Попова [5]. Для многочлена $f \in U'_n$ ведущим мономом $\mathrm{lm}(f)$ будем называть самый большой относительно порядка $\leqq$ из участвующих в составе f мономов. Ясно, что после умножения многочлена $f \in U'_n$ слева на букву, ведущим мономом будет тот, который получается из $\mathrm{lm}(f)$ вписыванием этой буквы на ее место в „хвосте" $x_{i_1} \dots x_{i_r}$, а при умножении справа на двойной коммутатор просто увеличивается число букв, а хвосты сохраняются (в нашем случае рассматривать другие произведения ненужно). Следовательно, выполняется следующее утверждение ([5], лемма 4.2):

Если для многочленов f и g из U'_n выполнено $\mathrm{lm}(g) \leqq_\Phi \mathrm{lm}(f)$, то существует элемент h из T-идеала $\{g\}^T$, порожденного многочленом g, для которого $\mathrm{lm}(h) = \mathrm{lm}(f)$.

Пусть теперь R — произвольный T-идеал в $U' = P \cap T(\mathfrak{M})/P \cap T(\mathfrak{A})$. Положим $M = \{\mathrm{lm}(f) : f \in R\}$. Как подмножество хорошо упорядоченного множества, $(M, \leqq_\Phi)$ тоже хорошо упорядочено. Следовательно, существует конечное число многочленов $a_1, \dots, a_m \in M$, таких, что для любого $a \in M$ имеется a_i, $1 \leqq i \leqq m$, для которого $a_i \leqq_\Phi a$. Пусть $\{f_i\}$, $i = 1, \dots, m$ — произвольная фиксированная система ненулевых многочленов из R, таких, что $\mathrm{lm}(f_i) \leqq_\Phi a_i$, $i = 1, \dots, m$. Покажем, что $R = \{f_i\}^T$. База индукции — нулевый многочлен. Пусть уже доказано, что любой элемент из R, ведущий моном которого удовлетворяет неравенству $\leqq_\Phi a$, лежит в $\{f_i\}^T$. Если многочлен $f \in R$ и $\mathrm{lm}(f) = a$, то для некоторого a_i, $1 \leqq i \leqq m$, выполняется $a_i \leqq_\Phi a$. Следовательно, $\mathrm{lm}(f_i) \leqq_\Phi a = \mathrm{lm}(f)$ и, согласно сказанному выше, существует многочлен $h \in \{f_i\}^T$, для которого $\mathrm{lm}(h) = a$. Тогда $h - f \in \{f_i\}^T$, так как $\mathrm{lm}(h - f) \leqq_\Phi a$, и значит $f \in \{f_i\}^T$.

Следовательно, любой T-идеал из U', т. е. любой T-идеал R, такой, что $T(\mathfrak{A}) \subseteq R \subseteq T(\mathfrak{M})$ конечно порожден. Так как $T(\mathfrak{M})$ шпехтов, а $T(\mathfrak{A})$ тоже конечно порожден, то $T(\mathfrak{A})$ — шпехтов.

Аналогичным образом докажем и шпехтовость $T(\mathscr{H})$. Учитывая предложения 1—4, получаем, что для фактор-модулей $V'_n = P_n \cap T(\mathfrak{A})/P_n \cap T(\mathscr{H})$ порождающими являются многочлены вида

$$x_{i_1} \dots x_{i_{n-s}} h_i^{(j)}(x_{i_{n-s+1}}, \dots, x_{i_n}), \quad i_1 < \dots < i_{n-s},$$

где через $h_i^{(j)}$ обозначены разные линеаризации многочленов $\bar{f}_1 - \bar{f}_8$: для любого из них их столько, сколько размерность j соответствующего его диаграмме модуля. В множестве элементов вида $(i_{n-s+1}, \dots, i_n; i_1, \dots i_{n-s})$ введем порядок;

$$(i_{n-s+1}, \dots, i_n; i_1, \dots, i_{n-s}) \leqq_\Phi (j_{n-t+1}, \dots, j_n; j_1, \dots, j_{n-t}),$$

если существует отображение $\varphi \in \Phi$, для которого $(i_{n-s+1}, \dots, i_n) \xrightarrow{\varphi} (j_{n-t+1}, \dots, j_{n-t+s})$, а $(i_1 \dots, i_{n-s})$ отображается в подпоследовательность $(j_1, \dots, j_{n-t})$. Порядок $\leqq$ определяем так: $h_i^{(j)} < h_k^{(l)}$, если $\deg h_i > \deg h_k$; если эти степени совпадают, упорядочиваем по j. Дальше доказательство идет так же, как для многообразия $\mathfrak{A}$.

Анонс двух частей работы был опубликован в Докладах БАН [6].

Автор выражает свою благодарность А. Попову, в тесном сотрудничестве с которым работал над этой проблемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. С. Николаев. Структура T-идеала, порожденного тождеством Холла от трех переменных I. *Сердика*, **13**, 1987, 58—65.
2. G. Hygman. Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London Math. Soc.*, **2**, 1952, 326—336.
3. D. E. Cohen. On the laws of metabelian variety. *J. Algebra*, 5, 1967, 267—273.
4. M. R. Vanghan-Lee. Abelian bynilpontent varieties. *Quart. J. Math.*, **21**, 1970, 193—202.
5. А. П. Попов. Някои шпехтови многообразия от пръстени. Математика и мат. образование, 79. С., 1979, 460—470.
6. Р. С. Николаев. О структуре T-идеала, порожденного тождеством Холла от трех переменных. *Доклады БАН*, **39**, № 3, 1986, 9—13.

Высший машинно-электротехнический институт
Варна — 9010, Болгария

Поступила 25. 2. 1986