Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ETUDE D'UN ESTIMATEUR DE LA FONCTION DE REGRESSION POUR UN PROCESSUS PONCTUEL A VALEURS DANS $R_+^s \times R$ ($s \geqq 1$)

GALAYE DIA

Nous étudions dans cet article l'estimateur de la fonction de régression d'un processus ponctuel sur $R_+^s \times R$ ($s \geqq 1$). L'estimateur utilisé est le régressogramme à pas fixe noté $\psi_{n,K}$, introduit par J. Tukey en 1961 [6], puis étudié par P. Major [5] et J. Geffroy [4]. Nous examinons les conditions nécessaires et suffisantes de convergence uniforme de $\psi_{n,K}$ vers ψ et aussi la vitesse de convergence.

I. Notations et définitions. On considère n processus ponctuels $f_i^{\cdot}$ $i=1, \dots, n$ à valeurs dans $R_+^s \times R$, indépendants et de même loi qu'un processus $f_0^{\cdot}$. On suppose que le support de $f_0^{\cdot}$ est $R_+^s \times R$ et que pour tout $i=0, \dots, n$ $N(f_i^{\cdot}, R_+^s \times R)$ est fini presque sûrement.

Soit $f_{(n)}^{\cdot}=\sum_{i=1}^{n} f_i^{\cdot}$ la superposition des n processus. On pose $m=\sum_{i=1}^{n} N(f_i^{\cdot}, R_+^s \times R)$ et on désigne par $f_{1,i}^{\cdot}$ $i=0, 1, \dots, n$ la projection de $f_i^{\cdot}$ sur R_+^s.

Posons

$$f_{1,(n)}^{\cdot}=\sum_{i=1}^{n} f_{1,i}^{\cdot}.$$

Si $m \geqq 1$, soit $((U_i^1, \dots, U_i^s), Y_i)$ $i \geqq 1$ la suite des variables statistiques associées à $f_0^{\cdot}$ et ordonnées suivant l'ordre lexicographique.

On pose $X_i=(U_i^1, \dots, U_i^s)$ $i \geqq 1$. Les v. s. associées à $f_{(n)}^{\cdot}$ seront désignées par $(X_i^{(n)}, Y_i^{(n)})$ et celles associées à $f_{1,(n)}^{\cdot}$ par $X_i^{(n)}$, $i \geqq 1$ où $X_i^{(n)}=(U_i^{1,n}, \dots, U_i^{s,n})$.

Si $m=0$ on pose $(X_0^{(n)}, Y_0^{(n)})=(0, 0)$ l'origine de $R_+^s \times R$.

II. Estimation de la fonction de régression. Description de la méthode. Lorsque l'effectif de $f_0^{\cdot}$ est $e_0 \geqq 1$ posons $X=(X_1, \dots, X_{e_0})$ et $Y=(Y_1, \dots, Y_{e_0})$.

Pour tout j, $1 \leqq j \leqq e_0$ on veut estimer la fonction de régression $\psi_j(x_j)=E(Y_j/X_j=x_j)$. On suppose que cette fonction est indépendante de j et de e_0 et on la désigne par $\psi(x)$.

Pour alléger les notations on suppose que $\Delta=[0, 1[^s$.

Désignons par μ la mesure moyenne de $f_{1,0}^{\cdot}$ et posons $x=(x_1, \dots, x_s)$, $\mu(x_1, \dots, x_s)=E(N(f_{1,0}^{\cdot}, [0, x_1[X \dots X[0, x_s[))$

$$\|\mu\|=E(N(f_{1,0}^{\cdot}, R_+^s)). \text{ On suppose } \|\mu\|<+\infty.$$

La fonction F définie sur R_+^s par $F(x)=\begin{cases} \dfrac{\mu(x)}{\|\mu\|} & \text{si } x \in R_+^s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une fonction de répartition. On suppose qu'elle est absolument continue de densité f continue.

On fait les hypothèses fondamentales suivantes, valables dans toute la suite de cette ètude.

i) $E(Y_j)$ existe pour tout $j \geq 0$

ii) $\psi(.)$ est uniformément continue sur Δ

iii) Il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour tout pavé Π inclus dans Δ on ait

$$\mu[\Pi] \geq \rho |\Pi|^*$$

où on a posé $|.|^*$ comme étant la mesure de Lebesgue et $\mu[.] = E(N(f^{\cdot}_{1,0}, .))$.

iv) Pour tout pavé Π inclus dans Δ et de mesure de Lebesgue tendant vers 0 on a $\mu[\Pi] = (1 + \varepsilon(|\Pi|^*)) P(N(f^{\cdot}_{1,0}, \Pi) > 0)$ où $\varepsilon(|\Pi|^*)$ tend vers 0 avec $|\Pi|^*$.

Soit K un entier supérieur ou égal à 2 et dépendant de n. En utilisant des droites parallèles aux axes partitionnons Δ en K^s cellules cubiques de côté $1/K$ et désignons par $\Delta_{K,r}(r = 1, 2, \ldots, K^s)$ ces cellules.

Si $i \geq 1$ désignons par $\nu_{n,r}$ le nombre d'indices $i \geq 1$ tels que $X_i^{(n)}$ appartient à $\Delta_{K,r}$ et $\zeta_{n,r}$ l'ensemble aléatoire de tels indices. Posons

$$\overline{Y}_{n,r} = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu_{n,r}} \sum\limits_{i \in \zeta_{n,r}} Y_i^{(n)} & \text{si } \nu_{n,r} \geq 1 \\ 0 & \text{si } \nu_{n,r} = 0. \end{cases}$$

On définit l'estimateur $\psi_{n,K}$ de la régression par la méthode du régressogramme à pas fixe par

$$(\forall r \in \{1, 2, \ldots, K^s\}), \quad (\forall x \in \Delta_{K,r}) \ \psi_{n,K}(x) = \overline{Y}_{n,r}$$

et on pose

$$d(\psi, \psi_{n,K}) = \sup_{x \in \Delta} |\psi(x) - \psi_{n,K}(x)|.$$

III. Conditions nécessaires de convergence uniforme en probabilité de $\psi_{n,K}$

Théorème 1. III. *Sous les hypothèses générales i), ii), la convergence uniforme en probabilité de $\psi_{n,K}$ vers ψ ne peut avoir lieu que sous les conditions*

i) $K(n) = \infty(1)$

ii) $K^s(n) = o\left(\dfrac{n}{\operatorname{Log} n}\right)$.

P r e u v e: Supposons que $f^{\cdot}_{1,0}$ soit le processus ponctuel d'effectif total certain égal à 1 associé à une v. a. X de la manière suivante

$$\forall B \in \mathscr{B}(R^s_+), \ N(f^{\cdot}_{1,0}, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in B \\ 0 & \text{si } X \notin B \end{cases}$$

où $\mathscr{B}(R^s_+)$ désigne l'ensemble des Boréliens de R^s_+. On retrouve alors le théorème établi par J. G e f f r o y [4].

IV. Conditions suffisantes de convergence uniforme de $\psi_{n,K}$. Nous conservons les hypothèses i), ii), iii), iv) du paragraphe II. Désignons par $\widetilde{N}_{n,r}$ la v. a égale au nombre d'indices i $(i = 1, \ldots, n)$ tels que $N(f^{\cdot}_{1,i}, \Delta_{K,r}) \geq 1$.

On aura besoin des lemmes suivants:

L e m m e 1. IV. *Soit* ρ *un nombre positif satisfaisant à la condition iii) et soit* $\rho' \in]0, \rho/2[$. *Posons*

$$\widetilde{H}_n = \bigcap_{r=1}^{K^s} \{\widetilde{N}_{n,r} \geqq nK^{-s} \rho'\}.$$

Si K satisfait la condition $K^s = 0\left(\frac{n}{\operatorname{Log} n}\right)$ *alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\overline{\widetilde{H}}_n) < +\infty.$$

P r e u v e: $\widetilde{N}_{n,r}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p_{K,r} = P(N(f_{1,0}^{\cdot}, \Delta_{K,r}) \geqq 1)$ on a $E(\widetilde{N}_{n,r}) = np_{K,r}$ et $np_{K,r} = n(1+\varepsilon(\frac{1}{K})), \mu[\Delta_{K,r}] \geqq \frac{n}{K^s}(1+\varepsilon(\frac{1}{K}))\,\rho$. Comme $\varepsilon(\frac{1}{K}) \to 0$ avec $\frac{1}{n}$ on a pour n suffisamment grand

$$np_{K,r} > \frac{n}{K^s}\rho' ;$$

ce qui prouve que $E(\widetilde{N}_{n,r}) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

En posant $m = [\frac{n}{K^s}\rho']$ on a d'après une inégalité de W. F e l l e r [3]

$$P(\widetilde{N}_{n,r} \leqq m) < C_n^m \, p_{K,r}^{m+1} \, q_{K,r}^{n-m} \frac{n-m+1}{(n+1)p_{K,r}-m}.$$

Désignons par β_n le second membre de cette inégalité, on a alors, en utilisant le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 1 de J. G e f f r o y [4]

$$\beta_n < \frac{1}{\rho'} \left(\frac{\operatorname{Log} n}{\varepsilon_n}\right)^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{\delta}{2\varepsilon_n}},$$

où δ est un nombre strictement positif et $\frac{n}{K^s} = \frac{\operatorname{Log} n}{\varepsilon_n}$.

D'où

$$P(\overline{\widetilde{H}}_n) = P(\bigcup_{r=1}^{K^s} (\widetilde{N}_{n,r} \leqq m)) \leqq K^s \beta_n ;$$

la série de terme général $K^s \beta_n$ est convergente.

L e m m e 2. IV. *Soit* ρ *le nombre positif du lemme 1 et soit* $\rho' \in]0, \frac{\rho}{2}[$. Posons

$$H_n = \bigcap_{r=1}^{K^s} \{\nu_{n,r} \geqq nK^{-s} \rho'\}.$$

Si K satisfait à la condition $K^s = 0\left(\frac{n}{\operatorname{Log} n}\right)$ *on a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\overline{H}_n) < +\infty.$$

P r e u v e: Elle résulte immédiatement du lemme 1 car on a

$$\widetilde{H}_n \subset H_n.$$

Nous aurons besoin d'une fonction intermédiaire $\widetilde{\psi}_{n,K}(x)$ que nous allons définir et étudier.

Si $N(f^{\cdot}_{1,i}, \Delta_{K,r})\geqq 1$ soit $(\widetilde{X}_i, \widetilde{Y}_i)$ la plus grande valeur du ième nuage projeté suivant l'ordre lexicographique dans R^s_+.

On pose

$$\overline{\widetilde{Y}}_{n,r}=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{i\in\widetilde{\mathscr{J}}_{n,r}}\widetilde{Y}_i}{\widetilde{N}_{n,r}} & \text{si}\quad \widetilde{N}_{n,r}\geqq 1\\ 0 & \text{si}\quad \widetilde{N}_{n,r}=0\end{cases}$$

où $\widetilde{\mathscr{J}}_{n,r}$ est l'ensemble aléatoire des indices i tels que $N(f^{\cdot}_{1,i}, \Delta_{K,r})\geqq 1$.

On définit alors $\widetilde{\psi}_{n,K}$ par

$$\forall_r\in\{1,\ 2,\dots,\ K^s\},\quad (\forall x\in\Delta_{K,r})\quad \widetilde{\psi}_{n,K}(x)=\overline{\widetilde{Y}}_{n,r}.$$

On a le lemme suivant:

L e m m e 3. IV. *Sous les hypotèses générales du paragraphe II on peut écrire pour toute réalisation* $m=m_0$, $m_0\geqq 1$

$$E(\overline{\widetilde{Y}}_{n,r}/\widetilde{H}_n\cap(x^{(n)}_1,\dots,X^{(n)}_{m_0}))=\psi(\xi_{K,r})+\lambda_K\,\tau^{\cdot}_{n,r}(X^{(n)}_1,\dots,X^{(n)}_{m_0})$$

où $\xi_{K,r}$ *est un point arbitraire dans* $\Delta_{K,r}$, λ_K *tend vers 0 avec* $1/K$ *et* $\tau^{\cdot}_{n,r}$ *est bornée par 1.*

P r e u v e: Résulte du lemme 2 de J. G e f f r o y [4]. $\psi(x)$ étant uniformément continue sur $[0,\ 1]^s$ il existe une fonction $\lambda(u)$, $(\mu\geqq 0)$ décroissante telle que

$$(\forall(x,\ x')\in[0,\ 1[^s\times[0,\ 1[^s),\quad |\psi(x)-\psi(x')|\leqq\lambda(\|x-x'\|);$$

on a alors si $\xi_{K,r}$ est un point arbitraire dans $\Delta_{K,r}$

$$(\forall_x\in\Delta_{K,r}),\ |\psi(x)-\psi(\xi_{K,r})|\leqq\lambda\left(\frac{\sqrt{s}}{K}\right)=\lambda_K.$$

On a le théorème suivant:

T h é o r è m e 1. IV. *Supposons que le processus* $f^{\cdot}_{1,(n)}$ *satisfasse aux conditions suivantes*:

a) $(\forall x\in[0,\ 1[^s), (\forall m_0,\ m_0\geqq 1), (\forall k,\ k\in N^*), \forall i\in\{1,\dots,m_0\},\ |E((Y^{(n)}_i)^k/x)|<+\infty,$

b) $(\exists V>0),\quad (\forall x\in[0,\ 1[^s), (\forall i\in\{1,\dots,m_0\})\ \mathrm{Var}(Y^{(n)}_i/x)\leqq V;$

c) $(\exists M>0), (\forall x\in[0,\ 1[^s), (\forall m_0, m_0\geqq 1), (\forall i\in\{1,\dots,m_0\}) (\forall k\geqq 2),\ |E([Y^{(n)}_i -E(Y^{(n)}_{i/x})]^k/x)|\leqq\frac{k!}{2}M^{k-2}\mathrm{Var}(Y^{(n)}_{i/x}),$

alors la relation $K^s=\mathrm{o}\left(\frac{n}{\mathrm{Log}\,n}\right)$ *implique la convergence uniforme presque complète de* $\widetilde{\psi}_{n,K}$ *vers* ψ

i. e $d(\widetilde{\psi}_{n,K},\ \psi)\to 0\,(\text{p. co.})$ *où* $d(\widetilde{\psi}_{n,K},\ \psi)=\sup\limits_{x\in[0,1[^s}|\psi(x)-\widetilde{\psi}_{n,K}(x)|.$

P r e u v e: Si Card $(\widetilde{\mathscr{J}}_{n,r})\geqq 2$ les v. s $(\widetilde{Y}_i)_{i\in\widetilde{\mathscr{J}}_{n,r}}$ sont indépendentes. Soit σ^2 la variance de $\sum\limits_{i\in\widetilde{\mathscr{J}}_{n,r}}\widetilde{Y}_i$ conditionnée par $(\widetilde{X}^{(n)}_1,\dots,\widetilde{X}^{(n)}_{m_0})$, $(m_0\geqq 1)$.

D'après l'inégalité de Bernstein on a:

(1) $(\forall c,\ c>0)$, $(\forall \alpha,\ 0<\alpha M \leq 1/2)$ alors

$$(2)\quad P(|\,\overline{\overline{Y}}_{n,r} - E(\overline{\overline{Y}}_{n,r}/\widetilde{H}_n \cap (X_1^{(n)}, \ldots, X_{m_0}^{(n)}))\,| > \frac{c}{\alpha \widetilde{N}_{n,r}} + \frac{\alpha \sigma^2}{\widetilde{N}_{n,r}} / \widetilde{H}_n \cap (X_1^{(n)}, \ldots, X_{m_0}^{(n)})) \leq 2e^{-c}.$$

On a d'après b)

$$\sigma^2 \leq \widetilde{N}_{n,r} V$$

et si $\widetilde{H}_n$ est réalisé on a $\widetilde{N}_{n,r} \geq nK^{-s}\rho'$, d'où (2) implique

$$(3)\quad P(|\,\overline{\overline{Y}}_{n,r} - E(\overline{\overline{Y}}_{n,r}/\widetilde{H}_n \cap (X_1^{(n)}, \ldots, X_{m_0}^{(n)}))\,| > \frac{cK^s}{\alpha n \rho'} + \alpha V / \widetilde{H}_n \cap (X_1^{(n)}, \ldots, X_{m_0}^{(n)})) \leq 2e^{-c}.$$

Soit $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\frac{V}{2M}$; on choisit alors α vérifiant $\alpha V = \frac{\varepsilon}{2}$ ce qui implique que la condition (1) est satisfaite.

Choisissons ensuite c tel que

$$\frac{cK^s}{\alpha n \rho'} = \frac{\varepsilon}{2}$$

c'est-à-dire $c = \frac{\varepsilon^2 \rho'}{4V} \frac{\operatorname{Log} n}{\varepsilon_n}$.

(3) implique alors

$$(4)\quad P(|\,\overline{\overline{Y}}_{n,r} - E(\overline{\overline{Y}}_{n,r}/\widetilde{H}_n \cap (X_1^{(n)}, \ldots, X_{m_0}^{(n)}))\,| > \varepsilon / \widetilde{H}_n \cap (X_1^{(n)}, \ldots, X_{m_0}^{(n)})) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 \rho' \operatorname{Log} n}{4V\varepsilon_n}}.$$

On utilise le lemme 3 pour montrer comme dans la démonstration du théorème 2 de J. Geffroy [4]

$$P(\{d(\widetilde{\psi}_{n,K}, \psi) > 2\varepsilon\} \cap \widetilde{H}_n) \leq 2K^s n^{-\frac{\varepsilon^2\rho'}{4V\varepsilon_n}} \leq 2\frac{\varepsilon_n}{\operatorname{Log} n}\, n^{1-\frac{\varepsilon^2\rho'}{4V\varepsilon_n}}.$$

La série dont le terme général est le second membre de (4) est convergente. Comme

$$P(\{d(\widetilde{\psi}_{n,K}, \psi) > 2\varepsilon\}) \leq \frac{2\varepsilon_n}{\operatorname{Log} n}\, n^{1-\frac{\varepsilon^2\rho'}{4V\varepsilon_n}} + P(\overline{\widetilde{H}}_n),$$

on a $d(\widetilde{\psi}_{n,K}, \psi) \to 0$ (p. co.).

Pour démontrer la convergence uniforme presque complète de $\psi_{n,K}$ vers ψ sous les conditions du théorème 1 nous aurons besoin de la condition suivante:

d) $(\exists A_0>0)$, $(\forall m_0,\ m_0 \geq 1)$, $(\forall i \in \{1, \ldots, m_0\})$, $|Y_i^{(n)}| \leq A_0$;

et des lemmes suivants:

Lemme 4.IV. *Sous l'hypothèse* iv), *paragraphe II, on a*

$$\lim_{K\to+\infty} K^s(\mu[\Delta_{K,r}] - p_{K,r}) = 0.$$

Preuve: D'après iv) on a $\mu[\Delta_{K,r}]=\{1+\varepsilon(\frac{1}{K})\}\, p_{K,r}$, $\varepsilon(\frac{1}{K})\to 0$, $K\to+\infty$.

Comme $p_{K,r}\leq\mu[\Delta_{K,r}]$ on a $\mu[\Delta_{K,r}]-p_{K,r}=\varepsilon(\frac{1}{K})\,p_{K,r}\leq\varepsilon(\frac{1}{K})\;\mu[\Delta_{K,r}]$. Ecrivons $\mu[\Delta_{K,r}]$ $=\frac{1}{K^s}f(\xi_{K,r})\,\|\mu\|$, $\xi_{K,r}\in\Delta_{K,r}$;

on a alors

$$\mu[\Delta_{K,r}]-p_{K,r}<\varepsilon(\frac{1}{K})\;\frac{1}{K^s}\,\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha=\sup_{x\in[0,\,1]^s} f(x)\,\|\mu\|;$$

d'où $K^s(\mu[\Delta_{K,r}]-p_{K,r})<\varepsilon(\frac{1}{K})\;\alpha\to 0$, $K\to+\infty$.

Lemme 5. IV. *Sous les hypothèses iii) et iv) du pavagraphe II, la série de terme gènèral U_n défini par*

$$(\forall\varepsilon>0)\;\; U_n=P(\bigcup_{r=1}^{K^s}(|\tilde{N}_{n,r}-np_{K,r}|>n\rho' K^{-s}\varepsilon)) \text{ est convergente.}$$

Preuve: D'après l'inégalité de Bernstein on a

$$(0)\;\; P(|\tilde{N}_{n,r}-np_{K,r}|>t\;\sqrt{np_{K,r}q_{K,r}})\leq 2e^{-\frac{t^2}{4}}$$

$$q_{K,r}=1-p_{K,r} \quad \text{et (1)} \quad 0<t<3\sqrt{np_{K,r}\,q_{K,r}}.$$

Prenons $t=2\sqrt{\operatorname{Log} n^3}$; alors t satisfait à (1). En effet:

$$(2)\qquad \frac{2\sqrt{\operatorname{Log} n^3}}{3\sqrt{np_{K,r}q_{K,r}}}\sim\frac{2\sqrt{\operatorname{Log} n^3}}{3\sqrt{n\mu[\Delta_{K,r}]}} \quad \text{car } p_{K,r}\leq\mu[\Delta_{K,r}]\to 0,\; K\to\infty,$$

$$\frac{2\sqrt{\operatorname{Log} n^3}}{3\sqrt{n\mu[\Delta_{K,r}]}}\leq\frac{2\sqrt{\operatorname{Log} n^3}}{3\sqrt{nK^{-s}}}=\frac{2\sqrt{3}\;\sqrt{\varepsilon_n}}{3\sqrt{\rho}}\to 0 \quad \text{lorsque } n\to+\infty.$$

Montrons maintenant que $\varepsilon\frac{n\rho'}{K^{-s}}>t\sqrt{np_{K,r}\,q_{K,r}}$ dès que n est suffisamment grand, $t=2\sqrt{\operatorname{Log} n^3}$.

On a $t\sqrt{np_{K,r}\;\;q_{K,r}}<t\sqrt{nK^{-s}}\alpha$ avec $\alpha=\sup\limits_{x\in[0,\,1]^s} f(x)$.

$$(3)\qquad \frac{t\sqrt{nK^{-s}\alpha}}{\varepsilon nK^{-s}\rho'}=\frac{2\sqrt{3\alpha}\;\sqrt{\operatorname{Log} n}}{\varepsilon\rho'\sqrt{\operatorname{Log} n/\varepsilon_n}}=\frac{2\sqrt{3\alpha}\,\sqrt{\varepsilon_n}}{\varepsilon\rho'}\to 0,\quad n\to+\infty;$$

d'où $t\sqrt{nK^{-s}}\,\alpha<\varepsilon nK^{-s}\rho'$ pour n suffisamment grand. On déduit alors de l'inégalité (0) que

$$P(|\;\tilde{N}_{n,r}-np_{K,r}|>\varepsilon n\,K^{-s}\,\rho')\leq 2e^{-\operatorname{Log} n^3}=\frac{2}{n^3}$$

pour n suffisamment grand. La série de terme général K^s/n^3 est convergente; d'où $\{U_n\}$ est convergente.

Supposons que le processus $f_{1,0}^{\cdot}$ satisfasse aux hypothèses suivantes:

$$H_0^*(N(f_{1,0}^{\cdot},\,[0,\,1]^s) \text{ admet des moments de tous les ordres}$$

H_1^*) $[\exists B>0)$, $(\forall C \in \mathscr{B}([0,\ 1]^s))$, $(\forall k \geqq 2)$

$$|E(N(f_{1,0}^{\cdot},\ C)-\mu[C])^k| \leqq \frac{1}{2} B^{k-2} k!\ \ \mathrm{Var}(N(f_{1,0}^{\cdot},\ C))$$

H_2^* $(\exists A>0)$, $(\forall C \in \mathscr{B}([0,\ 1]^s))$, $\mathrm{Var}(N(f_{1,0}^{\cdot},\ C))<A|C|^*$.

$\mathscr{B})(0,\ 1]^s)$ désignant l'ensemble des boréliens de $[0,\ 1]^s$.

Lemme 6. IV. *Sous les hypothèses* H_i^*, $i=0,\ 1,\ 2$ *et l'hypothèse iii) du paragraphe II, la série de terme général* ω_n *défini par*

$$(\forall \varepsilon>0)\quad \omega_n=P(\bigcup_{r=1}^{K^s}(|\nu_{n,r}-n\mu[\Delta_{K,r}]|>\varepsilon\rho' nK^{-s}))$$

est convergente.

Preuve: H_0^* et H_1^* impliquent d'après l'inégalité de Bernstein [2]

$$(0)\qquad P(|\nu_{n,r}-n\mu[\Delta_{K,r}]|>\frac{C_r}{\alpha_r}+\alpha_r\,\mathrm{Var}(\nu_{n,r}))<2\,e^{-C_r}$$

si $\alpha_r>0$, $B\alpha_r \leqq \frac{1}{2}$, $C_r>0$ quelconque.

Choisissons C_r et α_r vérifiant

$$(1)\qquad C_r \geqq \alpha_r^2\ \mathrm{Var}(\nu_{n,r})\quad \text{et}\quad (2)\quad \frac{C_r}{\alpha_r}+\alpha_r\,\mathrm{Var}(\nu_{n,r}) \leqq \varepsilon\rho' nK^{-s}.$$

On en déduit les inégalités

$$(2)\qquad 2\alpha_r\,\mathrm{Var}(\nu_{n,r}) \leqq \frac{C_r}{\alpha_r}+\alpha_r\,\mathrm{Var}(\nu_{n,r}) \leqq n\varepsilon\rho' K^{-s}.$$

(3) implique

$$(4)\qquad \alpha_r \leqq \frac{n\varepsilon\rho' K^{-s}}{2\,\mathrm{Var}(\nu_{n,r})}=\frac{\varepsilon\rho' K^{-s}}{2\mathrm{Var}\,N(f_{1,0}^{\cdot},\ \Delta_{K,r})};$$

d'après l'hypothèse H_2^* on a

$$(5)\qquad \frac{\varepsilon\rho' K^{-s}}{2\,\mathrm{Var}\,N(f_{1,0}^{\cdot},\ \Delta_{K,r})} \geqq \frac{\varepsilon\rho'}{2A}.$$

Prenons $\alpha_r=\frac{\varepsilon\rho'}{2A}$.

Pour ε assez petit on a l'inégalité $B\alpha_r<\frac{1}{2}$ satisfaite.

En considérant l'inégalité (1) on a

$$\alpha_r^2\,\mathrm{Var}(\nu_{n,r}) \leqq \frac{n(\varepsilon\rho')^2}{4A^2}\cdot\frac{A}{K^s}.$$

On prendra

$$C_r=\frac{(\varepsilon\rho')^2 n}{4AK^s}.$$

Avec ces choix de C_r et α_r on a

$$\frac{C_r}{\alpha_r}+\alpha_r \operatorname{Var}(\nu_{n,r})\leq n\,\varepsilon\rho' K^{-s}.$$

L'inégalité (0) entraîne

$$P(|\nu_{n,r}-n\mu[\Delta_{K,r}]|>\varepsilon\rho' nK^{-s})<2e^{-\frac{(\varepsilon\rho')^2 n}{4AK^s}};$$

d'où

$$\omega_n\leq 2K^s e^{-\frac{(\varepsilon\rho')^2 n}{4AK^s}}; \tag{6}$$

et la série dont le terme général est le second membre de (6) est convergente.

Théorème 2. IV. *Soit Λ_n la v. a définie par*

$$\Lambda_n=\sup_{r=1,\dots,K^s}\left(1-\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}\right).$$

Sous les hypothèses des lemmes 4, 5, 6.IV la v. a Λ_n tend presque complètement vers 0 lorsque $n\to+\infty$.

Preuve: Observons d'abord que $\widetilde{N}_{n,r}\leq\nu_{n,r}$. Soit $\varepsilon>0$.

$$P\{\bigcup_{r=1}^{K^s}[1-\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}>\varepsilon\,]/H_n\}=P\{\bigcup_{r=1}^{K^s}[(\nu_{n,r}-\widetilde{N}_{n,r})>\varepsilon\nu_{n,r}]/H_n\}.$$

Si H_n est réalisé, $\nu_{n,r}>nK^{-s}\rho'$ d'où

$$P\{\bigcup_{r=1}^{K^s}[(\nu_{n,r}-\widetilde{N}_{n,r})>\varepsilon\nu_{n,r}]/H_n\}\leq P\{\bigcup_{r=1}^{K^s}[(\nu_{n,r}-N_{n,r})>\varepsilon nK^{-s}\rho']/H_n\};$$

$$P\{\bigcup_{r=1}^{K^s}[(\nu_{n,r}-\widetilde{N}_{n,r})>\varepsilon nK^{-s}\rho']/H_n\}\leq P\{\bigcup_{r=1}^{K^s}[|\nu_{n,r}-n\mu[\Delta_{K,r}]|>\frac{\varepsilon}{3}nK^{-s}\rho']/H_n\}$$

$$+P(\bigcup_{r=1}^{K^s}[|n\mu[\Delta_{K,r}]-np_{K,r}|>\frac{\varepsilon}{3}nK^{-s}\rho']/H_n) \tag{1}$$

$$+P\{\bigcup_{r=1}^{K^s}[|\widetilde{N}_{n,r}-np_{K,r}|>\frac{\varepsilon n}{3}K^{-s}\rho']/H_n\}.$$

Pour n suffisamment grand, le deuxième terme du second membre de l'inégalité (1) est nul d'après le lemme 4. IV.

(1) implique pour n suffisamment grand

$$P\{(\bigcup_{r=1}^{K^s}[(\nu_{n,r}-\widetilde{N}_{n,r})>\varepsilon\nu_{n,r}])\cap H_n\}\leq P\{(\bigcup_{r=1}^{K^s}[|\nu_{n,r}-n\mu[\Delta_{K,r}]|>\frac{\varepsilon}{3}nK^{-s}\rho'])\cap H_n\}$$

$$+P\{(\bigcup_{r=1}^{K^s}[|\widetilde{N}_{n,r}-np_{K,r}|>\frac{\varepsilon}{3}nK^{-s}\rho'])\cap H_n\};$$

d'où d'après les lemmes 5 et 6.IV

$$P\{(\bigcup_{r=1}^{K^s}[(\nu_{n,r}-\widetilde{N}_{n,r})>\varepsilon\nu_{n,r}])\}\leq U_n+\omega_n+P(\overline{H}_n)$$

i. e $P(\Lambda_n>\varepsilon)\leq U_n+\omega_n+P(\overline{H}_n)$.

La convergence des séries de terme général U_n, ω_n et $P(\overline{H}_n)$ implique celle de la série $P(\Lambda_n>\varepsilon)$.

Théorème 3. IV. *Sous les hypothèses générales du paragraphe II et celles des théorèmes 2 et 1, la relation* $K^s=0\left(\frac{n}{\operatorname{Log} n}\right)$ *implique la convergence uniforme presque complète de* $\psi_{n,K}$ *vers* ψ.

Preuve: Ecrivons $\psi_{n,K}$ sous la forme

$$\forall x\in\Delta_{K,r}\psi_{n,K}(x)=\frac{1}{\nu_{n,r}}\sum_{i\in\varsigma_{n,r}-\widetilde{\mathscr{J}}_{n,r}}Y_i^{(n)}+\frac{1}{\nu_{n,r}}\sum_{i\in\widetilde{\mathscr{J}}_{n,r}}Y_i^{(n)}$$

$$=\frac{1}{\nu_{nr}}\sum_{i\in\varsigma_{n,r}-\widetilde{\mathscr{J}}_{n,r}}Y_i^{(n)}+\widetilde{\psi}_{n,K}(x)\cdot\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}};$$

d'où

$$|\psi_{n,K}(x)-\psi(x)|\leq\left(1-\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}\right)A_0+\left|\widetilde{\psi}_{n,K}(x)\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}-\psi(x)\right|.$$

Il en résulte que

$$d(\psi_{n,K},\ \psi)\leqq\Lambda_nA_0+\sup_{\substack{x\in[0,1]^s\\ r\in\{1,\ldots,K^s\}}}\left|\widetilde{\psi}_{n,K}(x)\frac{N_{n,r}}{\nu_{n,r}}-\psi(x)\right|.\tag{1}$$

Considérons le second terme dans le second membre de (1). On a:

$$\left|\widetilde{\psi}_{n,K}(x)\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}-\psi(x)\right|\leq\left|\widetilde{\psi}_{n,K}(x)\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}-\psi(x)\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}\right|+\left|\psi(x)\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}-\psi(x)\right|;$$

d'où, en posant $\varphi=\sup_{x\in[0,1]^s}|\psi(x)|$ et comme $\widetilde{N}_{n,r}\leqq\nu_{n,r}$,

$$\sup_{\substack{x\in[0,1]^s\\ r\in\{1,\ldots,K^s\}}}\left|\widetilde{\psi}_{n,K}(x)\frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}-\psi(x)\right|\leqq d(\widetilde{\psi}_{n,K},\psi)+\varphi\Lambda_n.$$

Il en résulte que

$$d(\psi_{n,K},\ \psi)\leqq\Lambda_nA_0+\Lambda_n\varphi+d(\psi_{n,K},\ \psi).\tag{2}$$

Chaque terme du second membre de (2) converge presque complètement vers 0 lorsque $n\to+\infty$. On en déduit que

$$d(\psi_{n,K},\ \psi)\to0\quad\text{p. co.}\quad\text{lorsque } n\to+\infty.$$

Remarque: Si A_0 était une v. a dominant presque sûrement $Y_i^{(n)}$ on aurait alors la convergence uniforme presque sûre de $\psi_{n,K}$ vers ψ.

V. Vitesse de convergence. Considérons les hypothèses suivantes:

e) ψ est différentiable de dérivée bornée (i. e.) $(\exists D>0)$, $\|\operatorname{grad}(\psi)\|\leqq D$

f) $\mu[\Delta_{K,r}]-p_{K,r}=0\left(\frac{1}{K^{2s}}\right)$.

On a le théorème suivant:

Théorème 1.V. *Supposons que les hypothèses du paragraphe II soient satisfaites ainsi que les conditions a, b, c, d, e, f,* H_0^*, H_1^*, H_2^*.

Posons $\varkappa(n) = \dfrac{\operatorname{Min}(\sqrt{n/K^s}), K^s}{(\operatorname{Log} n)^\theta}$

alors pour tout θ, $\theta > \frac{1}{2}$, *la relation* $K^s = 0(\frac{n}{\operatorname{Log} n})$ *implique*

$$P(\lim_{n\to+\infty} \varkappa(n)\, d(\psi, \psi_{n,K}) = 0) = 1.$$

Pour montrer ce théorème on aura besoin des théorèmes et lemmes snivants:

Théorème 2.V. *Sous les hypothèses du théorème 1. IV la v. a.* $\varkappa(n)\, d(\tilde{\psi}_{n,K}, \psi)$ *tend presque complètement vers 0 lorsque* $n \to +\infty$, $K^s = 0(\frac{n}{\operatorname{Log} n})$, $\varkappa(n) = \infty(1)$, $\theta > \frac{1}{2}$

Preuve: On a $\forall (x, x') \in [0, 1[^s \times [0, 1[^s$,

$$\psi(x) - \psi(x') = \langle \operatorname{grad}(\psi)(\xi), x - x' \rangle \text{ avec } \xi \in]x, x']$$
$$\leq |\operatorname{grad}(\psi)(\xi)| \,.\, \| x - x' \|.$$

D'où

$$\forall (x, x') \in \Delta_{K,r} \times \Delta_{K,r}, \ |\psi(x) - \psi(x')| \leq \frac{D\sqrt{s}}{K^s}.$$

Prenons $\lambda_K = \dfrac{D\sqrt{s}}{K^s}$ dans le lemme 3 et considérons l'inégalité (3) dans la démonstration du théorème 1.IV, soit

$$(0) \qquad P(|\bar{\bar{Y}}_{n,r} - E(\bar{\bar{Y}}_{n,r}/\tilde{H}_n \cap (X_1^{(n)}, \ldots, X_{m_0}^{(n)})| > \frac{cK^s}{\alpha n\rho'} + \alpha V/\tilde{H}_n \cap (X_1^n, \ldots, X_{m_0}^{(n)})) \leq 2e^{-c}$$

où dans cette inégalité c est quelconque et α vérifie

$$(1) \qquad 0 < \alpha M \leq \frac{1}{2}.$$

Choisissons α et c vérifiant les conditions

i) $c \geq \dfrac{\alpha^2 n\rho' V}{K^s}$ et ii) $\dfrac{cK^s}{n\alpha\rho'} + \alpha V \leq \dfrac{\varepsilon D}{\varkappa(n)}$;

on en déduit les inégalités suivantes

$$(2) \qquad 2\alpha V \leq \frac{cK^s}{n\alpha\rho'} + \alpha V \leq \frac{\varepsilon D}{\varkappa(n)};$$

d'où

$$(3) \qquad \alpha \leq \frac{\varepsilon D}{2V\varkappa(n)}.$$

Comme $\varkappa(n) < \dfrac{\sqrt{n/K^s}}{(\operatorname{Log} n)^\theta}$ on a $\dfrac{\varepsilon D}{2V\varkappa(n)} > \dfrac{D\varepsilon(\operatorname{Log} n)^\theta}{2V\sqrt{n/K^s}}$

Prenons alors

(4) $$\alpha = \frac{D\,\varepsilon(\mathrm{Log}\,n)^{\theta}}{2V\,\sqrt{n/K^s}}; \quad \text{d'où}$$

(i) devient

(5) $$c \geq \frac{D^2\varepsilon^2\,(\mathrm{Log}\,n)^2\,\rho'}{4V}.$$

Prenons $c = \dfrac{D^2\varepsilon^2\,(\mathrm{Log}\,n)^{2\theta}\rho'}{4V}$;

on a

(6) $$\frac{cK^s}{\alpha n\rho'} = \frac{D\,\varepsilon\,(\mathrm{Log}\,n)^{\theta}\sqrt{K^s/n}}{2} = \frac{D\,\varepsilon\,(\mathrm{Log}\,n)^{\theta}}{2\sqrt{n/K^s}} < \frac{D\varepsilon}{2\varkappa(n)};$$

(2) et (6) impliquent qu'on a bien la condition ii).
(1) est vérifié pour n assez grand.
D'après le lemme 3.IV on a

(7) $$\forall x \in \Delta_{K,r}\,|\,E(\tilde{\bar{Y}}_{n,r}/\tilde{H}_n \cap (X_1^{(n)},\ldots,X_{m_0}^{(n)})) - \psi(x)\,| < 2\lambda_K$$

$$\frac{2\lambda_K}{\dfrac{\varepsilon D}{\varkappa(n)}} = \frac{2\sqrt{s}\,\varkappa(n)}{K^s\varepsilon} \leq \frac{2\sqrt{s}\;K^s}{\varepsilon K^s(\mathrm{Log}\,n)^{\theta}}$$

et comme $\dfrac{2\sqrt{s}}{\varepsilon\,(\mathrm{Log}\,n)^{\theta}} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit que pour n suffisamment grand $2\lambda_K < \dfrac{\varepsilon D}{\varkappa(n)}$.

On a d'après le choix de c

(8) $$P(|\tilde{\bar{Y}}_{n,r} - E(\tilde{\bar{Y}}_{n,r}/\tilde{H}_n \cap (X_1^{(n)},\ldots,X_{m_0}^{(n)}))| > \frac{\varepsilon D}{\varkappa(n)}/\tilde{H}_n \cap (X_1^{(n)},\ldots,X_{m_0}^{(n)})) \leq 2e^{-\frac{D^2\varepsilon^2(\mathrm{Log}\,n)^{2\theta}\rho'}{4V}}.$$

(7) et (8) entraînent

$$\forall x \in \Delta_{K,r} P(|\tilde{\psi}_{n,K}(x) - \psi(x)| > \frac{2D\varepsilon}{\varkappa(n)}/\tilde{H}_n \cap (X_1^{(n)},\ldots,X_{m_0}^{(n)})) \leq 2e^{-\frac{D^2\varepsilon^2(\mathrm{Log}\,n)^{2\theta}\rho'}{4V}};$$

d'où

$$P(d(\tilde{\psi}_{n,K},\ \psi) > \frac{2D\varepsilon}{\varkappa(n)}/\tilde{H}_n) \leq 2K^s e^{-\frac{D^2\varepsilon^2(\mathrm{Log}\,n)^{2\theta}\rho'}{4V}};$$

ce qui implique

$$P(\{d(\tilde{\psi}_{n,K},\ \psi) > \frac{2D\varepsilon}{\varkappa(n)}\} \cap \tilde{H}_n) \leq 2K^s e^{-\frac{D^2\varepsilon^2(\mathrm{Log}\,n)^{2\theta}\rho'}{4V}}.$$

Il en résulte que

$$P(d(\widetilde{\psi}_{n,K},\ \psi)>\frac{2D\varepsilon}{\varkappa(n)})\leq 2K^s\, e^{-\frac{D^2\varepsilon^2(\mathrm{Log}\ n)^{2\theta}}{4V}}+P(\overline{\overline{H}}_n).$$

La série $\{2K^s \exp(-\frac{D^2\varepsilon^2(\mathrm{Log}\ n)^{2\theta}}{4V})\}$ est convergente.

En effet, $K^s<n$ pour n assez grand et

$$\mathrm{Log}\, n^3 \exp(-\frac{D^2\varepsilon^2(\mathrm{Log}\, n)^{2\theta}}{4V}) = 3\mathrm{Log}\, n-\frac{D^2\varepsilon^2(\mathrm{Log}\, n)^{2\theta}}{4V}. \tag{8}$$

Le second membre de (8) tend vers $-\infty$ lorsque $n\to+\infty$; d'où la série de terme général $2K^s\exp(-\frac{D^2\varepsilon^2(\mathrm{Log}\ n)^{2\theta}}{4V})$ converge.

Comme la série $\{P(\overline{\overline{H}}_n)\}$ est convergente on a le résultat désiré.

Lemme 1.V. *Sous l'hypothèse f) on a*

$$\lim_{n\to+\infty} K^s\varkappa(n)(\mu[\Delta_{K,r}]-p_{K,r})=0.$$

Preuve:
$$K^s\varkappa(n)(\mu[\Delta_{K,r}]-p_{K,r})\leq\frac{K^{2s}(\mu[\Delta_{K,r}]-p_{K,r})}{(\mathrm{Log}\, n)^{\theta}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Lemme 2.V. *Sous les hypothèses iii) et iv) du paragraphe II, la série de terme général* U_n' *défini par*

$$(\forall\varepsilon'>0)\ U_n'=P(\bigcup_{r=1}^{K^s}(|\widetilde{N}_{n,r}-np_{K,r}|>\frac{n\rho' K^{-s}\varepsilon'}{\varkappa(n)}))\ \textit{est convergente.}$$

Preuve: On va utiliser les résultats du lemme 5. IV en substituant à ε $\varepsilon'/\varkappa(n)$. L'égalité (3) de ce lemme donne pour tout $t=2\sqrt{\mathrm{Log}\, n^3}$

$$\frac{t\sqrt{nK^{-s}\alpha}\varkappa(n)}{\varepsilon' nK^{-s}\rho'}=\frac{2\sqrt{3\alpha}\sqrt{\varepsilon_n}\ \varkappa(n)}{\varepsilon'\rho'}, \tag{1}$$

$$\frac{2\sqrt{3\alpha}\sqrt{\varepsilon_n}\ \varkappa(n)}{\varepsilon'\rho'}\leq\frac{2\sqrt{3\alpha}\sqrt{\varepsilon_n}\sqrt{n/K}}{\varepsilon'\rho'(\mathrm{Log}\, n)^{\theta}}=\frac{2\sqrt{3\alpha}\sqrt{\varepsilon_n}\sqrt{(\mathrm{Log}\, n)/\varepsilon_n}}{\varepsilon'\rho'(\mathrm{Log}\, n)^{\theta}}$$

$$\leq\frac{2\sqrt{3\alpha}}{\varepsilon'\rho'(\mathrm{Log}\, n)^{\theta-1/2}}\to 0\quad\text{lorsque } n\to+\infty;$$

ce qui prouve que pour n suffisamment grand on a

$$t\sqrt{nK^{-s}\alpha}<\frac{\varepsilon' nK^{-s}\rho'}{\varkappa(n)};$$

d'où il résulte que, pour n suffisamment grand

$$P(|\widetilde{N}_{n,r}-np_{K,r}|>\varepsilon' nK^{-s}\rho'/\varkappa(n))\leq 2e^{-\mathrm{Log}\, n^3}=\frac{2}{n^3}.$$

$U'_n \leq 2K^s/n^3$; la série $\{\frac{2K^s}{n^3}\}$ est convergente d'où $\{U'_n\}$ est convergente.

Lemme 3.V. *Sous les hypothèses H_0^*), H_1^*), H_2^*) et l'hypothèse iii) du paragraphe II, la série de terme général ω'_n définie par*

$$(\forall \varepsilon' > 0) \ \omega'_n = P\{\bigcup_{r=1}^{K^s} (|\nu_{n,r} - n\mu[\Delta_{K,r}]| > \varepsilon'\rho' n K^{-s}/\varkappa(n))\} \ \textit{est}$$

convergente.

Preuve: On utilise de même les résultats du lemme 6. IV.

Considérons l'inégalité (5) de ce lemme; on a, en remplaçant ε par $\varepsilon'/\varkappa(n)$:

$$\frac{\varepsilon'\rho' K^{-s}}{2\mathrm{Var}\, N(f'_{1,0}, \Delta_{K,r})} \geq \frac{\varepsilon'\rho'}{2A\varkappa(n)}. \tag{5'}$$

Or
$$\varkappa(n) < \frac{\sqrt{n/K^s}}{(\mathrm{Log}\, n)^\theta}. \quad \text{D'où} \quad \frac{\varepsilon'\rho'}{2A\varkappa(n)} > \frac{\varepsilon'\rho'(\mathrm{Log}\, n)^\theta}{2\sqrt{n/K^s}\, A}.$$

Prenons

$$\alpha_r = \frac{\varepsilon'\rho'(\mathrm{Log}\, n)^\theta}{2A\sqrt{n/K^s}}. \quad \alpha_r^2 \mathrm{Var}(\nu_{n,r}) \leq \frac{n(\varepsilon'\rho')^2(\mathrm{Log}\, n)^{2\theta}}{4A^2 \frac{n}{K^s}} \cdot \frac{A}{K^s}$$

$$\leq \frac{(\varepsilon'\rho')^2(\mathrm{Log}\, n)^{2\theta}}{4A}.$$

Prenons
$$c_r = \frac{(\varepsilon'\rho')^2(\mathrm{Log}\, n)^{2\theta}}{4A};$$

on vérifie alors que pour ces choix de α_r et c_r on a

$$\frac{c_r}{\alpha_r} + \alpha_r \mathrm{Var}(\nu_{n,r}) = n\varepsilon'\rho' K^{-s}/\varkappa(n);$$

donc l'inégalité (0) du lemme 6 implique, lorsqu' on remplace ε par $\varepsilon'/\varkappa(n)$

$$P(|\nu_{n,r} - n\mu[\Delta_{K,r}]| > \varepsilon'\rho' n K^{-s}/\varkappa(n)) \leq 2e^{-\frac{(\varepsilon'\rho')^2(\mathrm{Log}\, n)^{2\theta}}{4A}};$$

d'où

$$\omega'_n \leq 2K^s e^{-\frac{(\varepsilon'\rho')^2(\mathrm{Log}\, n)^{2\theta}}{4A}} \tag{6'}$$

et la série dont le terme général est le second membre de (6') est convergente.

Théorème 3.V. *Soit Λ'_n la v. a définie par*

$$\Lambda^{\bullet}_n = \varkappa(n) \sup_{r=1,\ldots,K^s} \left(1 - \frac{\widetilde{N}_{n,r}}{\nu_{n,r}}\right).$$

Sous les hypothèses des lemmes 1, 2, 3 V, la v. a Λ'_n tend presque complètement vers 0 lorsque $n \to +\infty$, $\theta > \frac{1}{2}$.

Preuve: On utilise le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 2.IV.

Preuve du théorème 1.V: Elle résulte de l'inégalité (2) du théorème 3.IV, soit

$$d(\psi_{n,K}, \psi) \leqq \Lambda_n A_0 + \Lambda_n \varphi + d(\widetilde{\psi}_{n,K}, \psi).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. F. Dabouz. Processus ponctuels, sous-processus et ensemble aléatoire. Thèse de Doctorat de 3ème Cycle, 1984, Paris VI.
2. M. Frechet. Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités. Premier livre (2ème éd.), 1950.
3. W. Feller. An introduction to Probability Theory and its Applications, 1 (2ème éd.), 1964.
4. J. Geffroy. Etude de la convergence du régressogramme' *Publ. Inst. stat. Univ. Paris*, **25**, 1—2, 1980, 41—56.
5. P. Major. On a non parametric estimation of the regression function. *Studia. Sc., Math. Hung.*, **8**, 1973, 347—361.
6. J. W. Tukey. Curves as parameters and touch estimation. *Proc. 4th. Symposium. Math. Statist. Proba.* Berkeley, 1961, 681—694.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Dakar
Dakar, Sénégal

Received 8. 7. 1986
Revised 13. 4. 1987