Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ТОЖДЕСТВА ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ В АЛГЕБРЕ ЛИ $sl(2, K)$ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

РУСАЛИН СТ. НИКОЛАЕВ

Доказывается, что все тождества от трех переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ над полем характеристики нуль являются следствиями тождества $[x, y, [x, z], x]=0$.

Ю. А. Бахтурин [1] поставил задачу о нахождении базиса тождеств от двух переменных в лиевой матричной алгебре второго порядка $sl(2, K)$ над полем K характеристики нуль. Эта задача решена автором в [2]. В настоящей работе решается аналогичная задача для тождеств от трех переменных в алгебре $sl(2, K)$. Конечная базируемость тождеств этой алгебры доказана Ю. П. Размысловым [3], а В. Т. Филиппов [4] показал, что все они являются следствиями тождества

$$[y, z, [t, x], x]+[x, y, [x, z], t]=0.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Все тождества от трех переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ над полем характеристики 0 являются следствиями тождества*

$$[x, y, [x, z], x]=0. \tag{1}$$

Это тождество выполнено в алгебре Ли $sl(2, K)$, так как получается из тождества Филиппова при $t=x$.

1. Предварительные сведения и обозначения. Свободную лиеву алгебру от счетного множества образующих $x_1, x_2, \dots$ над полем K обозначим через $L_k\langle X\rangle$; P_n, $n\geqq 2$, будет подпространством полилинейных многочленов алгебры $L_k\langle X\rangle$, записанных на буквах $x_1, \dots, x_n$; P_n превращается в KS_n-модуль, если определить действие симметрической группы S_n на P_n следующим образом: для $\sigma\in S_n$ и $f(x_1, \dots, x_n)\in P_n$ $\sigma f=f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Если $T(\mathfrak{U})$ — T-идеал тождеств многообразия $\mathfrak{U}$, то относительно свободную алгебру $L_k\langle X\rangle/T(\mathfrak{U})$ обозначим через $F(\mathfrak{U})$, а образ P_n при естественном гомоморфизме $L_k\langle X\rangle\to F(\mathfrak{U})$ — через $P_n(\mathfrak{U})$. Любой T-идеал над полем характеристики нуль порождается своими полилинейными элементами, а ввиду полной приводимости KS_n-модулей, изучение $P_n(\mathfrak{U})$ сводится к изучению его неприводимых компонент. Это дает возможность использовать технику диаграмм Юнга, а именно, нам понадобится следующий результат из теории представлений симметрической группы ([5]):

Пусть $\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ — разбиение естественного числа n, $[\lambda]$ — соответствующая ему диаграмма Юнга. Для $\alpha\in S_n$, d_α будет таблицей Юнга, получающейся пополнением клеток диаграммы $[\lambda]$ числами $\alpha(1), \dots, \alpha(n)$ последовательно в столбцах $[\lambda]$. Симметризатор Юнга таблицы α обозначим $l(d)$. Так $l(d)=\Sigma(-1)^\tau\pi\tau$, где π пробегает подстановки в строках, а τ — в столбцах d. Подмодуль P_n, порождаемый элементом $f_d=l(d)f$, $f\in P_n$, обозначим $M(d, f)$. Тогда:

1. Если $f_d\neq 0$, то модуль $M(d, f)$ — неприводим.

2. Любой неприводимый подмодуль P_n имеет вид $M(d, f)$ для подходящих многочлен $f \in P_n$ и таблица d.

3. Таблицам, соответствующим одной и той же диаграмме, соответствуют изоморфные модули, и обратно.

В. С. Дренски [6] получил следующее описание модульной структуры относительно свободной алгебры $F(\mathfrak{L})$ многообразия $\mathfrak{L} = \operatorname{var} \mathrm{sl}(2, K)$: любой диаграмме, число строк которой больше трех, соответствует нулевой подмодуль; если $\lambda = (p+q+r, p+q, p)$, $p+q>0$, диаграмме $[\lambda]$ соответствует ровно один неприводимый подмодуль, ненулевой во всех случаях, кроме когда числа q и r одновременно четные. Пусть $\mathfrak{L}'$ — многообразие лиевых алгебр, определенное тождеством (1). Для многообразий $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$ существуют естественный гомоморфизм алгебр $F(\mathfrak{U}_2) \to F(\mathfrak{U}_1)$ и гомоморфизмы линейных пространств $P_n(\mathfrak{U}_2) \to P_n(\mathfrak{U}_1)$, которые являются также модульными гомоморфизмами. Так как $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}'$, то теорема будет доказана, если покажем, что любой диаграмме с тремя строками соответствует только один неприводимый подмодуль $P_n(\mathfrak{L}')$, порождаемый многочленом, не являющимся тождеством алгебры $sl(2, K)$, кроме в упомянутом выше случае, когда соответствующий подмодуль — нулевой. Будем рассматривать только диаграммы с тремя строками в силу следующего очень важного для упрощения вычислений замечания [6]): вместо с полилинейными многочленами, можно работать с их полными симметризациями, получающимися заменой всех букв x_i, индексы i которых лежат в одной строке таблицы d, одной и той же буквы.

Правонормированный коммутатор $[x, y, z, \dots, z]$ длины $k+2$ будем обозначать короче $[x, y, z^{(k)}]$. Многочлен $\Sigma(-1)^{\sigma} \dots (-1)^{\tau} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\tau(1)}, \dots,)$ будем обозначать $f(\sigma(1), \dots, \tau(1) \dots)$. Если в многочлене $f(\sigma(1), \dots, \sigma(k+1), y_2, \dots, y_l, \dots)$, $l \leqq k$, положим $x_{k+1} = y_1$, после кососимметризации по $y_1, y_2, \dots, y_l$ и замены $y_i = x_i$ $i = 1, \dots, l$, получится нуль. Эту процедуру обозначаем как в [7]

$$\operatorname{Assym}(f(\sigma(1), \dots, \sigma(k+1), y_2, \dots, y_l, \dots)) = 0.$$

2. Доказательство теоремы. Сперва докажем следующую лемму:

Лемма. *Пространство $P_n(\mathfrak{L}')$, $n \geqq 7$, порождается линеаризациями элементов вида $[u_1, u_2, \dots, u_k]$, где u_i, $i \geqq 2$, коммутаторы длины 2, а u_1 — коммутатор произвольной длины вида $[*, x^{(k)}, y^{(l)}, z^{(m)}]$.*

Доказательство. Коммутаторы указанного вида будем называть правильными и сравнения вида $\varphi(x, y, z) \equiv 0$ будут по модулю правильных коммутаторов. Если $\deg_x f = k$, то при линеаризации f по x новые переменные будем обозначать $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Из линеаризации тождества (1) по x при $x_1 = y$, $x_2 = x_3 = x$ следует

$$[x, y, [x, z], y] + [x, y, [y, z], x] = 0, \tag{2}$$

а при $x_1 = [x, y]$, $x_2 = x_3 = x$ — сравнение

$$[x, y, x, [x, y, z]] + [x, y, y, [x, z, x]] \equiv 0. \tag{3}$$

В линеаризации тождества (2) по y положим $y_1 = [y, z]$, $y_2 = y$:

$$[x, y, x, [y, z, z]] \equiv [x, y, [y, z, z], x] = [y, z, x, [y, z], x]$$
$$-[x, y, [x, z], [y, z]] + [y, z, x, [x, z], y] \equiv -[x, y, z, [x, z, y]].$$

Аналогично

$$[x, y, y, [x, z, z]] + [x, y, z, [x, z, y]] \equiv 0.$$

Покажем, что любое лиево произведение тройного и четвертного коммутаторов сравнимо с нулем. Линеаризуем (3) по y и положим $y_1 = y$, $y_2 = [y, z]$. Учитывая тождество (1), получаем $[x, y, z, [x, y, z, x]]=0$. Из тождества (1) следуют $[x, y, x, [x, z, x^{(2)}]]=[x, y, x, [x, y, x, z]]=[x, z, x, [x, y, x, y]]=0$, а также

$$[x, y, x, [x, y, z, x]]=0. \tag{4}$$

Из сравнений (3) и (4) следует $[x, y, z, [x, y, x^{(2)}]]=[x, z, y, [x, y, x^{(2)}]]=0$. Аналогично доказываются и остальные случаи.

Индукцией по n докажем, что любое лиево произведение тройного коммутатора на коммутатор длины $n\geq 4$ представимо через правильные. Для $n=4$ это уже показано. Пусть $n>4$. Возможны следующие случаи:

а) В записи тройного коммутатора участвуют две буквы. Запишем длинный коммутатор в виде $[u, *, *]$, где u — коммутатор длины $n-1$. В силу тождества (1) $[u, *, x, [x, y, x]]=-[u, *, x^{(2)}, [x, y]]$, а, согласно индукционному предположению $[u, x, y, [x, y, x]]=[u, [x, y], [x, y, x]]-[u, y, x^{(2)}, [x, y]]=0$. Из тождества (2) $[z, y, [x, y], x]=-[z, x, [x, y], y]$ при $z=[u, y]$ следует $[u, y, y, [x, y], x]=-[u, y, x, [x, y], y]=[u, [x, y], [x, y], y]=0$. Следовательно $[u, y, y, [x, y, x]]=-[u, y, y, x, [x, y]]+[u, y, y, [x, y], x]=0$.

Длинный коммутатор нельзя представить как выше только когда он один из следующих коммутаторов: $[z, x, z^{(n-1)}]$, $[z, y, z^{(n-1)}]$, $[z, y, y, z^{(n-2)}]$, $[x, y, z^{(n-1)}]$. В линеаризации тождества (1) по x положим $x_1=[x, y, z^{(n-2)}]$, $x_2=x_3=x$: $[x, y, z^{(n-1)}, [x, y], x]=[x, y, z^{(n-2)}, y, [x, z], x]+[x, y, [x, z], [x, y, z^{(n-2)}]]=[x, z, z^{(n-3)}, y, y, [x, z], x]+[z, y, z^{(n-3)}, x, y [x, z], x]=0$ согласно рассмотренным случаям. Аналогично, из сравнений $[x, y, z^{(n-2)}, [x, y, x]]=0, [z, y, z^{(n-1)}, [x, z, x]]=0$, $[z, y, z^{(n-1)}, [x, y, x]]=0$ получаем $[z, x, z^{(n-1)}, [x, y, x]]=0$, $[z, y, z^{(n-1)}, [x, y, x]]=0$, $[z, y, y, z^{(n-2)}, [x, y, x]]=0$.

б) Коммутаторы вида $[u, *, *, [x, y, z]]$. В линеаризации сравнения $[u, *, * [x, y, x]]=0$ по x положим $x_1=z$, $x_i=x$, $i\geq 2$:

$$[u, *, *, [x, y, z]]+[u, *, *, [z, y, x]]=-[[u, *, *]/x_1=z, [x, y, x]]=0.$$

Аналогично из сравнения $[u, *, *, [x, y, y]]=0$ следует $[u, *, *, [x, y, z]]=-[u, *, *, [x, z, y]]$. Из этих сравнений и тождества Якоби получаем $[u, *, *, [x, y, z]]=0$.

Индукцией по длине второго множителя уже легко показать, что любое произведение двух длинных коммутаторов представимо через правильные, так как упорядочить буквы в длинном коммутаторе всегда возможно за счет выделения двойных коммутаторов. Это доказывает лемму.

В дальнейшем будет удобнее использовать буквы x_1, x_2 и x_3 на месте букв x, y и z. Тогда тождество (1) имеет вид $[\sigma(1), \sigma(2), x_1, [\sigma(3), x_1]]=0$. Покажем, что все тождества от трех переменных шестой степени, выполненных в алгебре $sl(2, K)$, следуют из тождества (1). В. С. Д р е н с к и [7] доказал, что диаграммам шестой степени с тремя строками [3, 2, 1] и $[4, 1^2]$ соответствуют подмодули S_6-модуля P_6, порождаемые линеаризациями многочленов $a_1=[x_2, x_1^{(2)}, \sigma(1), [\sigma(2), \sigma(3)]]$, $a_2=[\sigma(1), x_1, [x_2, x_1], [\sigma(2), \sigma(3)]]$, $a_3=[\sigma(1), \sigma(2), x_1, [\sigma(3), x_1^{(2)}]]$ для диаграммы [3, 2, 1], $b_1=[\sigma(1), x_1^{(3)}, [\sigma(2), \sigma(3)]]$ и $b_2=[\sigma(1), \sigma(2), x_1, [\sigma(3), x_1^{(2)}]]$ для диаграммы $[4, 1^2]$, а диаграмме $[2^3]$ соответствует нулевый подмодуль. Следствия из тождества (1), соответствующие диаграмме [3, 2, 1], получаются после линеаризации по x_1 (новые буквы — x_1, u и v) и замены

а) u на $[u, v]$, кососимметризации по x_1, x_2, x_3 и по u, v и замены u на x_1, v на x_2. Учитывая равенство $[\sigma(1), \sigma(2), [x_2, x_1], [\sigma(3), x_1]]=-a_2$, получающееся из тождества $[\sigma(1), \sigma(2), [x_2, x_1], [\sigma(3), \sigma(4)]]|_{x_4=x_1}=0$, имеем

$$2a_1-5a_2-3a_3=0.$$

б) x_3 на $[x_3, v]$ и кососимметризации как в предыдущем случае. Из $\mathrm{Assym}\,[\sigma(1), \sigma(2), y_2, [\sigma(3), \sigma(4), x_1]] = 0$ следует $[\sigma(1), \sigma(2), \tau(1), [\tau(2), \sigma(3), x_1]] = a_3$. Аналогично $[\sigma(1), \sigma(2), \tau(1), x_1, [\sigma(3), \tau(2)]] = a_1$, $[\sigma(1), \tau(1), x_1, \sigma(2), [\sigma(3), \tau(2)]] = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Следовательно, $2a_1 - 5a_2 - 10a_3 = 0$. Таким образом диаграмме $[3, 2, 1]$ соответствует только один ненулевой неприводимый подмодуль $P_6(\mathfrak{L}')$.

Следствие из тождества (1), соответствующее диаграмме $[4, 1^2]$, получается только следующим образом: линеаризуем (1) как выше, заменяем x_3 на $[x_3, w]$, кососимметризуем по x_1, x_2, x_3 и заменяем u, v и w на x_1. Получаем $5b_1 - 4b_2 = 0$, т. е. диаграмме $[4, 1^2]$ также соответствует только один ненулевой неприводимый подмодуль $P_6(\mathfrak{L}')$.

Пусть $n \geqq 7$. А. П. Попов [8] доказал, что для любой диаграммы $[\lambda]$ достаточно рассматривать толко модули, порождаемые произведениями следующего вида (в ассоциативном случае): $[x_1, x_2] \ldots [x_{2t-1}, x_{2t}] u_1 \ldots u_p$, где $u_1, \ldots, u_p$ — коммутаторы произвольной длины, а буквы в двойных коммутаторах удовлетворяют условиям

1. Индексы букв одного коммутатора находятся в одном столбце рассматриваемой таблицы.
2. Если пара $(2i-1, 2i)$ находится в столбце с номером k, то для любого $s < k$ хотя бы одна пара $(2j_s - 1, 2j_s)$ находится в столбце с номером s, $1 \leqq j_s \leqq t$.

Перенося этот результат в лиевый случай и учитывая доказанную лемму, получаем, что достаточно рассмотреть действие симметризаторов Юнга, соответствующие диаграммам $[\lambda]$, $\lambda = (p+q+v, p+q, p)$, только на элементы вида $[u, [\,,\,], \ldots, [\,,\,]]$; здесь u — коммутатор произвольной длины, и если в некотором двойном коммутаторе находятся две буквы из одного столбца длины 2, то все коммутаторы длины 2, в которых есть буквы из одного столбца длины три, находятся правее. Действие симметризаторов Юнга в нашем случае выражается кососимметризацией p раз по всем тройкам x_1, x_2, x_3 и q раз по произвольным парам x_1, x_2.

Кососимметризация по трем буквам из длинного коммутатора очевидно ведет к выделению двойных коммутаторов в качестве новых множителей. То же самое получается, если две из трех букв, по которым кососимметризуем, находятся в длинном коммутаторе (кроме того случая, когда они занимают в нем первые два места).

Покажем, что если действуем на трех буквах из двух двойных коммутаторов, то можем считать, что они соседние. Действительно, из $\mathrm{Assym}\,[[*, y_2], \ldots, [*, y_3], \ldots, [\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), \sigma(4)]] = 0$ получаем $[[*, \tau(1)], \ldots, [*, \tau(2)], \ldots, [\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), \tau(3)]] + [[*, \tau(1)], \ldots, [*, \tau(2)], \ldots, [\sigma(1), \tau(1)], [\sigma(2), [\sigma(3)]] = 0$. Аналогично

$$2[[*, \tau(1)], \ldots, [*, \sigma(1)], \ldots, [\sigma(2), \tau(2)], [\sigma(3), \tau(3)]] - [[*, \tau(1)], \ldots, [*, \sigma(1), \ldots, \tau(2), \tau(3)], [\sigma(2), \sigma(3)]] - [[*, \tau(1)], \ldots, [*, \tau(2)], \ldots, [\sigma(1), \tau(3)], [\sigma(2), \sigma(3)]] = 0,$$

$$[[*, \tau(1)], \ldots, [*, \sigma(1)], \ldots, [\sigma(2), \sigma(3)], [\tau(2), \tau(3)]] - 2[[*, \tau(1)], \ldots, [*, \sigma(1)], \ldots, [\sigma(2), \tau(2)], [\sigma(3), \tau(3)]] + [[*, \tau(1)], \ldots, [*, \tau(2)], \ldots, [\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), [\tau(3)]] = 0,$$

$$2[[*, \sigma(1)], \ldots, [*, \sigma(2)], \ldots, [\sigma(3), \tau(1)], [\tau(2), \tau(3)]] - [[*, \sigma(1)], \ldots, [*, \tau(1)], \ldots, [\sigma(2), \sigma(3)], [\tau(2), \tau(3)]] + [[*, \tau(1)], \ldots, [*, \sigma(1)], \ldots, [\sigma(2), \sigma(3)], [\tau(2), \tau(3)]] = 0.$$

Следовательно, все участвующие в этих равенствах произведения пропорциональны.

Рассмотрим возможные случаи для значений чисел p, q и r.

I) $p = q = 0$. Если r четное, диаграмме $[\lambda]$ соответствует многочлен $[[\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), \tau(1)], [[\tau(2), \tau(3)], \ldots] = 0$, а если r нечетное — многочлен $[\mu(1), \mu(2), \nu(1), [\nu(2),$

$\nu(3)]$, $[\mu(3), \rho(1)]$, $[\rho(2), \rho(3)]$, $[\sigma(1), \sigma(2)]$, $[\sigma(3), \tau(1)]$, $[\tau(2), \tau(3)], \ldots]$, для которого непосредственно проверяется, что тоже равен нулю.

II) $r=0$, $q\neq 0$. Согласно результатам работы [2], диаграмме соответствует только подмодуль, порожденный линеаризацией многочлена

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = [x_2, x_1^{(q-2)}, x_2^{(q-2)}, [x_2, x_1^{(2)}], [\mu(1), \mu(2), \nu(1)], [\nu(2), \nu(3)], [\mu(3), \rho(1)],$$

$$[\rho(2), \rho(3)], ([\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), \tau(1)], [\tau(2), \tau(3)])^{(\frac{p-3}{2})}];$$

если q и p нечетные; если q нечетное, а p четное, то подмодуль порождается линеаризацией

$$g_2(x_1, x_2, x_3)=[x_2, x_1^{(q-2)}, x_2^{(q-2)}, [x_2, x_1^{(2)}], ([\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), \tau(1)], [\tau(2), \tau(3)]^{(\frac{p}{2})}.$$

Если q четное, соответный подмодуль нулевой.

III. $q=0$, $r\neq 0$. Если r четное, непосредственно проверяются равенства $[\sigma(1), \sigma(2), x_1^{(r)}, [\sigma(3), \tau(1)], \ldots]=[\sigma(1), x_1^{(r)}, [\sigma(2), \sigma(3)], [\tau(1), \tau(2)], \ldots]=0$. Если r нечетное, диаграмме $[\lambda]$ соответствует толко неприводимый подмодуль, порождаемый при четном p линеаризацией многочлена

$$g_3(x_1, x_2, x_3)=[\nu(1), \nu(2), x_1^{(r)}, [\nu(3), \rho(1)], [\rho(2), \rho(3)], ([\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), \tau(1)], [\tau(2), \tau(3)])^{(\frac{p-2}{2})},$$

а при p — нечетном, линеаризацией многочлена

$$g_4(x_1, x_2, x_3)=[\rho(1), x_1^{(r)}, [\rho(2), \rho(3)], ([\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), \tau(1)], [\tau(2), \tau(3)])^{(\frac{p-1}{2})}].$$

IV. $q.r\neq 0$. Диаграмме $[\lambda]$ соответствует только неприводимый подмодуль, порождаемый линеаризацией многочлена:

$$g_5(x_1, x_2, x_3) = [d_1(x_1, x_2), ([\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), \tau(1)], [\tau(2), \tau(3)])^{(\frac{p}{2})}],$$

если $p\equiv q-1\equiv r\equiv 0 \pmod 2$;

$$g_6(x_1, x_2, x_3) = [d_2(x_1, x_2), ([\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), [\tau(1)], [\tau(2), \tau(3)])^{(\frac{p}{2})}],$$

если $p\equiv q\equiv r-1\equiv 0 \pmod 2$;

$$g_7(x_1, x_2, x_3)=[d_1(x_1, x_2), [\mu(1), \mu(2), \nu(1), [\nu(2), \nu(3)], [\mu(3), \rho(1)], [\rho(2), \rho(3)],$$

$$([\sigma(1), \sigma(2)], [\sigma(3), \tau(1)], [\tau(2), \tau(3)])^{(\frac{p-3}{2})}], \text{ если } p\equiv q\equiv r-1\equiv 1 \pmod 2;$$

$$g_8(x_1, x_2, x_3) = [d_2(x_1, x_2), [\mu(1), \mu(2), \nu(1), [\nu(2), \nu(3)], [\mu(3), \rho(1)], [\rho(2), \rho(3)], ([\sigma(1),$$

$$\sigma(2)], [\sigma(3), \tau(1)], [\tau(2), \tau(3)]^{(\frac{p-3}{2})}],$$ если $p\equiv q-1\equiv r\equiv 1 \pmod 2$. Здесь d_1 и d_2 — порождающие диаграмм с двумя строками из работы [2]:

$$d_1(x_1, x_2)=[x_2, x_1^{(k-1)}, x_2^{(l-1)}, [x_2, x_1^{(2)}]], \quad k\equiv l\equiv 0 \pmod 2;$$

$$d_2(x_1, x_2)\equiv[x_2, x_1^{(k)}, x_2^{(l-1)}, [x_1, x_2]]-[x_1, x_2^{(l)}, x_1^{(k-1)}, [x_1, x_2]], \quad k\equiv l-1 \pmod 2.$$

Если числа q и r одновременно четные, согласно результатам работы [2], диаграмме $[\lambda]$ соответствует только нулевый подмодуль.

То, что многочлены $g_i(x_1, x_2, x_3)$, $i=1, \dots, 8$, не являются тождествами алгебры $sl(2, K)$, легко проверяется на конкретных матрицах. Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Бахтурин. Тождества от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$. *Труды сем. им. И. Г. Петровского,* 1979, вып. 2, 205 — 208.
2. Р. С. Николаев. Тождества от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ над полем характеристики нуль. *Плиска,* **8**, 1986, 65—76.
3. Ю. П. Размыслов. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика,* **12**, 1973, № 1, 83—113.
4. В. Т. Филиппов. О многообразии алгебр Мальцева. *Алгебра и логика,* **20**, 1981, № 3, 300—314.
5. Г. Джеймс. Теория представлений симметрических групп. М., 1982.
6. В. С. Дренски. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр. *Мат. сб.,* **115** (157), 1981, № 1 (5), 98—115.
7. В. С. Дренски. О решетках многообразий ассоциативных алгебр. *Сердика,* **8**, 1982, 20—31.
8. А. П. Попов. Тождества тензорного квадрата алгебры Грассмана. *Алгебра и логика,* **21**, 1984, № 4, 442—471.

Высший машинно-электротехнический институт
Варна — 9010, Болгария

Поступила 25. 2. 1986.