Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ДВОЙНЫХ ЛАКУНАРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

МУХАРЕМ БЕРИША

Введение. Зависимость коэффициентов Фурье от поведения модулей непрерывности для функций одной переменной исследовалась в работах Конюшкова [1], Алянчина и Томича [8].

В работе [4] также приводятся оценки снизу и сверху модуля гладкости через коэффициенты Фурье.

Для функций двух переменных некоторые оценки коэффициентов Фурье приведены в работах [2, 3 и 5].

В настоящей работе приводятся оценки снизу и сверху модуля гладкости через коэффициенты Фурье двойных лакунарных тригонометрических рядов и в качестве примера на применение этих оценок находятся необходимые и достаточные условия в терминах коэффициентов Фурье для того, чтобы функция $f(x, y)$ принадлежала классу Никольского, типа $S^0H_p^{r_1r_2}$.

1. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, 2π-периодическая по каждой переменной. Будем говорить, что $f(x, y)\in L_{\vec{p}}$, $1\leqq p<\infty$, если $f(x, y)$ измеримая функция и

$$\|f(x, y)\|_{\vec{p}}\leqq C<\infty,$$

где
$$\|f(x, y)\|_{\vec{p}}=\{\int_0^{2\pi}[\int_0^{2\pi}|f(x, y)|^{p_1}dx]^{p_2/p_1}dy\}^{1/p_2},$$

$$\vec{p}=\{p_1, p_2\},\ 1\leqq p_i<\infty,\quad i=1, 2.$$

Функция $f(x, y)\in L_{\vec{p}}^0$, если

1. $f(x, y)\in L_{\vec{p}}$;

2. $\int_0^{2\pi}f(x, y)\,dx=0$, для почти всех y и $\int_0^{2\pi}f(x, y)\,dy=0$, для почти всех x.

Через $\omega_{k_1k_2}(f, t_1, t_2)_{\vec{p}}$ обозначим смешаный модуль гладкости (в метрике $L_{\vec{p}}$) порядка k_1 по x и k_2 по y функции $f(x, y)\in L_{\vec{p}}$, т. е.

$$\omega_{k_1k_2}(f, t_1, t_2)_{\vec{p}}=\sup_{\substack{|h_1|\leqq t_1\\ |h_2|\leqq t_2}}\|\Delta_{h_1h_2}^{k_1k_2}f(x, y)\|_{\vec{p}},$$

где

$$\Delta_{h_1h_2}^{k_1k_2}f(x, y)=\sum_{\nu=0}^{k_1}\sum_{\mu=0}^{k_2}(-1)^{k_1+k_2-\nu-\mu}\binom{k_1}{\nu}\binom{k_2}{\mu}f(x+\nu h_1, y+\mu h_2).$$

Через $\omega_{k_2}(f, t_2)_{\vec{p}}$ обозначим модуль гладкости (в метрике $L_{\vec{p}}$) порядка k_2 по y функции $f(x, y) \in L_{\vec{p}}$, т. е.

$$\omega_{k_2}(f, t_2)_{\vec{p}} = \sup_{|h_2| \leq t_2} \| \Delta_{h_2}^{k_2} f(x, y) \|_{\vec{p}},$$

где

$$\Delta_{h_2}^{k_2} f(x, y) = \sum_{\mu=0}^{k_2} (-1)^{k_2-\mu} \binom{k_2}{\mu} f(x, y+\mu h_2).$$

Через $Y_{nm}(f)_{\vec{p}}$ обозначим наилучшее приближение углом (в метрике $L_{\vec{p}}$ функции $f(x, y) \in L_{\vec{p}}$, т. е. приближение при помощи сумм тригонометрических полиномов $T_{n\infty}(x, y)$ порядка n по x и тригонометрических полиномов $T_{\infty m}(x, y)$ порядка m по y:

$$Y_{nm}(f)_{\vec{p}} = \inf_{\substack{T_{n\infty} \\ T_{\infty m}}} \| f(x, y) - [T_{n\infty}(x, y) + T_{\infty m}(x, y)] \|_{\vec{p}},$$

где

$$T_{n\infty}(x, y) = \sum_{l_1=0}^{n} [a_{l_1}(y) \cos l_1 x + b_{l_1}(y) \sin l_1 x],$$

$$T_{\infty m}(x, y) = \sum_{l_2=0}^{m} [c_{l_2}(x) \cos l_2 y + d_{l_2}(x) \sin l_2 y],$$

причем $T_{n\infty}(x, y) \in L_{\vec{p}}$ и $T_{\infty m}(x, y) \in L_{\vec{p}}$.

Через $E_{\infty m}(f)_{\vec{p}}$ обозначим наилучшее приближение (в метрике $L_{\vec{p}}$) функции $f(x, y) \in L_{\vec{p}}$ при помощи тригонометрических полиномов порядка m по x: $E_{\infty m}(f)_{\vec{p}} = \inf_{T_{\infty m}} \| f(x, y) - T_{\infty m}(x, y) \|_{\vec{p}}$, где $T_{\infty m} \in L_{\vec{p}}$. Пусть $f(x, y) \in L_{\vec{p}}$ для фиксированных p_i $(i=1, 2)$ из промежутка $1 < p_i < \infty$ и

$$f(x, y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y,$$

где $c_{\nu\mu} = a_{l_1 l_2}$, если $\nu = 2^{l_1}$ и $\mu = 2^{l_2}$, $c_{\nu\mu} = 0$, если или $\nu \neq 2^{l_1}$ или $\mu \neq 2^{l_2}$ (l_1 и l_2 целые неотрицательные числа).

Через $s_{n\infty}(f)$ обозначим частную сумму порядка n по x ряда Фурье функции $f(x, y)$, т. е.

$$s_{n\infty}(f) \sim \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y.$$

Аналогично

$$s_{\infty m}(f) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y, \quad s_{nm}(f) \sim \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y.$$

Если обозначим $\varphi_{nm}(x, y) = f(x, y) - s_{n\infty}(f) - s_{\infty m}(f) + s_{nm}(f)$, то

$$\varphi_{nm}(x, y) \sim \sum_{\nu > n}^{\infty} \sum_{\mu > m}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y$$

Будем говорить, что $f(x, y) \in S^0 H_{\vec{p}}^{r_1 r_2}$, если

1. $f(x, y) \in L_{\vec{p}}$;

2. $\omega_{k_1 k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{\vec{p}} \leq c \delta_1^{r_1} \delta_2^{r_2}$,

где $k_1 > r_1$ и $k_2 > r_2$.

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. [6] *Если* $\frac{n_{l_1+1}}{n_{l_1}} \geq \lambda_1 > 1$ *и* $\frac{n_{l_2+1}}{n_{l_2}} \geq \lambda_2 > 1$ *и ряд*

$$M = \left(\sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} a_{l_1 l_2}^2\right)^{1/2}$$

сходится, то ряд

$$\sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} (a_{l_1 l_2} \cos n_{l_1} x \cos n_{l_2} y)$$

есть ряд Фурье функции $f(x, y)$, *принадлежащей всем классам* $L_{\vec{p}}$, $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$, $1 \leq p_i < \infty$, $(i = 1, 2)$ *и* $A_1(p_1, p_2, \lambda_1, \lambda_2) M \leq \|f(x, y)\|_{\vec{p}} \leq A_2(p_1, p_2, \lambda_1, \lambda_2) M$, *где константы* A_1 *и* A_2 *зависят только от* p_1, p_2, λ_1 *и* λ_2.

Лемма 2. [6]. *Если* $f(x, y) \in L_{\vec{p}}$ *и*

$$f(x, y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y,$$

где $c_{\nu\mu} = a_{l_1 l_2}$, *если* $\nu = 2^{l_1}$ *и* $\mu = 2^{l_2}$, $c_{\nu\mu} = 0$, *если или* $\nu \neq 2^{l_1}$ *или* $\mu \neq 2^{l_2}$, *то справедливы неравенства* $\|f(x, y) - s_{\infty m}(f)\|_{\vec{p}} \leq A_3 E_{\infty [\frac{m}{2}]}(f)_{\vec{p}}$ *и* $\|\varphi_{nm}(x, y)\|_{\vec{p}} \leq A_4 Y_{[\frac{n}{2}][\frac{m}{2}]}(f)_{\vec{p}}$,

где константы A_3 *и* A_4 *не зависят от* $f(x, y)$, n *и* m.

Обозначим

$$B(c_{\nu\mu}, k_1, k_2, n, m) = \frac{1}{n^{k_1} m^{k_2}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1} \mu^{2k_2}\right)^{1/2} + \frac{1}{n^{k_1}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2 \nu^{2k_1}\right)^{1/2}$$

$$+ \frac{1}{m^{k_2}} \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2 \mu^{2k_2}\right)^{1/2} + \left(\sum_{\nu>n} \sum_{\mu>m} c_{\nu\mu}^2\right)^{1/2}.$$

2. Теорема 1. *Пусть* $f(x, y) \in L_{\vec{p}}$ *для фиксированных* p_i $(i = 1, 2)$ *из промежутка* $1 \leq p_i < \infty$ *и*

$$f(x, y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu} \cos \nu x \cos \mu y,$$

где $c_{\nu\mu} = a_{l_1 l_2}$, *если* $\nu = 2^{l_1}$ *и* $\mu = 2^{l_2}$, $c_{\nu\mu} = 0$, *если или* $\nu \neq 2^{l_1}$ *или* $\mu \neq 2^{l_2}$ (l_1 *и* l_2 — *целые неотрицательные числа*), *тогда*

$$A_5 B(c_{\nu\mu}, k_1, k_2, n, m) \leq \omega_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)_{\vec{p}} \leq A_6 B(c_{\nu\mu}, k_1, k_2, n, m),$$

где константы A_5 *и* A_6 *не зависят от* $f(x, y)$, n *и* m.

Доказательство. Применяя к функции $\Delta^{k_1k_2}_{h_1h_2}f$ лемму 1, имеем:

$$\|\Delta^{k_1k_2}_{h_1h_2}f\|_{\vec{p}}\leqq A_7\,[\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}c^2_{\nu\mu}(2\sin\frac{\nu h_1}{2})^{2k_1}(2\sin\frac{\mu h_2}{2})^{2k_2}]^{1/2}.$$

Теперь, так как $\sin x\leqq x$ для $x>0$, то

$$\sin\frac{\nu|h_1|}{2}\leqq\frac{\nu|h_1|}{2}\quad\text{и}\quad\sin\frac{\mu|h_2|}{2}\leqq\frac{\nu|h_2|}{2}.$$

Поэтому, учитывая еще, что $|\sin x|\leqq 1$, имеем:

$$\|\Delta^{k_1k_2}_{h_1h_2}f\|_{\vec{p}}\leqq A_8\{[\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}c^2_{\nu\mu}(2\sin\frac{\nu|h_1|}{2})^{2k_1}(2\sin\frac{\mu|h_2|}{2})^{2k_2}]^{1/2}$$

$$+[\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m}c^2_{\nu\mu}(2\sin\frac{\nu|h_2|}{2})^{2k_1}(2\sin\frac{\mu|h_2|}{2})^{2k_2}]^{1/2}$$

$$+[\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}c^2_{\nu\mu}(2\sin\frac{\nu|h_1|}{2})^{2k}(2\sin\frac{\mu|h_2|}{2})^{2k_2}]^{1/2}$$

$$+[\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}c^2_{\nu\mu}(2\sin\frac{\nu|h_1|}{2})^{2k_1}(2\sin\frac{\mu|h_2|}{2})^{2k_2}]^{1/2}\}$$

$$\leqq A_9\{|h_1|^{k_1}|h_2|^{k_2}(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}c^2_{\nu\mu}\nu^{rk_1}\mu^{2k_2})^{1/2}$$

$$+|h_1|^{k_1}(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}c^2_{\nu\mu}\nu^{2k_1})^{1/2}+|h_2|^{k_2}(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m}c^2_{\nu\mu}\mu^{2k_2})^{1/2}+(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}c^2_{\nu\mu})^{1/2}.$$

Поскольку

$$\omega_{k_1k_2}(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m})_{\vec{p}}=\sup_{\substack{|h_1|\leqq 1/n\\|h_2|\leqq 1/m}}\|\Delta^{k_1k_2}_{h_1h_2}f\|_{\vec{p}},$$

то из доказанного следует неравенство

(1) $$\omega_{k_1k_2}(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m})_{\vec{p}}\leqq A_9B(c_{\nu\mu},k_1,k_2,n,m).$$

Теперь докажем обратное неравенство. Применяя лемму 1 и лемму 2, а затем оценку (*) (см. ниже) и свойства модуля гладкости, имеем:

(2) $$(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}c^2_{\nu\mu})^{1/2}\leqq A_{10}\|\varphi_{nm}(x,y)\|_{\vec{p}}\leqq A_{11}Y_{[\frac{n}{2}]\,[\frac{m}{2}]}(f)_{\vec{p}}\leqq A_{12}\omega_{k_1k_2}(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m})_{\vec{p}}.$$

Так как $\frac{2}{\pi}x\leqq\sin x$ для $0\leqq x\leqq\pi/2$, то

$$\frac{1}{n^{k_1}m^{k_2}}(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}c^2_{\nu\mu}\nu^{2k_1}\mu^{2k_2})^{1/2}\leqq A_{13}[\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}c^2_{\nu\mu}(2\sin\frac{\nu}{2n})^{2k_1}(2\sin\frac{\mu}{2m})^{2k_2}]^{1/2},$$

тогда из леммы 1 и определения модуля гладкости следует

(3) $$\frac{1}{n^{k_1}m^{k_2}}(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}c^2_{\nu\mu}\nu^{2k_1}\mu^{2k_2})^{1/2}\leqq A_{14}\|\Delta^{k_1k_2}_{1/n\,1/m}f\|_{\vec{p}}\leqq A_{15}\omega_{k_1k_2}(f,\frac{1}{n},\frac{1}{m})_{\vec{p}}.$$

Учитывая оценку $\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$, для $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, и применяя лемму 2, имеем:

$$I = \frac{1}{n^{k_1}}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\Big)^{1/2} \leqq A_{16}\Big[\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}^2\Big(2\sin\frac{\nu}{2n}\Big)^{2k_1}\Big]^{1/2}$$

$$\leqq A_{17}\,\|\,\Delta_{1/n}^{k_1}[f - s_{\infty m}(f)]\,\|_{\vec{p}},$$

где

$$f - s_{\infty m}(f) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} c_{\nu\mu}\cos\nu x\cos\mu y.$$

Если обозначим $F(x, y) = \Delta_{1/n}^{k_1} f(x, y)$, то $\Delta_{1/n}^{k_1} s_{\infty m}(f) = s_{\infty m}(F)$. Тогда $I \leqq A_{18}\,\|F - s_{\infty m}(F)\|_{\vec{p}}$. Теперь, применяя лемму 2, а затем неравенства (см. [7] с. 184):

$$(*) \qquad Y_{nm}(f)_{\vec{p}} \leqq C\omega_{k_1k_2}\Big(f,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\Big)_{\vec{p}},$$

$$E_{\infty m}(f)_{\vec{p}} \leqq C\omega_{k_2}\Big(f,\ \frac{1}{m}\Big)_{\vec{p}},$$

где константа C не зависит от $f(x, y)$, n и m, получим

$$(4) \qquad I \leqq A_{18}\,E_{\infty[\frac{m}{2}]}(F)_{\vec{p}} \leqq \omega_{k_2}\Big(F,\ \frac{1}{m}\Big)_{\vec{p}} \leqq A_{19}\,\omega_{k_1k_2}\Big(f,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\Big)_{\vec{p}}.$$

Аналогично получим, что

$$(5) \qquad \frac{1}{n^{k_2}}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m} c_{\nu\mu}^2\,\mu^{2k_2}\Big)^{1/2} \leqq A_{20}\,\omega_{k_1k_2}\Big(f,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\Big)_{\vec{p}}.$$

Из справедливости неравенств (2), (3), (4) и (5) вытекает неравенство

$$(6) \qquad A_{21}B(c_{\nu\mu},\ k_1,\ k_2,\ n,\ m) \leqq \omega_{k_1k_2}\Big(f,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\Big)_{\vec{p}},$$

а из справедливости неравенств (1) и (6) вытекает справедливость теоремы 1.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(x, y)$, имеющая ряд Фурье*

$$f(x, y) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\nu\mu}\cos\nu x\cos\mu y$$

с коэффициентами Фурье $c_{\nu\mu} = a_{l_1l_2}$, если $\nu = 2^{l_1}$ и $\mu = 2^{l_2}$, $c_{\nu\mu} = 0$, если или $\nu \neq 2^{l_1}$ или $\mu \neq 2^{l_2}$ (l_1 и l_2 целые неотрицательные числа), принадлежала классу $S^0H_{\vec{p}}^{r_1r_2}$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье этой функции удовлетворяли условиям

$$(7) \qquad c_{\nu\mu} = 0\Big(\frac{1}{\nu^{r_1}\mu^{r_2}}\Big).$$

Доказательство. Обозначим

$$I_1 = \frac{1}{2^{nk_1}2^{mk_2}}\Big(\sum_{\nu=1}^{2^n}\sum_{\mu=1}^{2^m} c_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}\Big)^{1/2},$$

$$I_2=\frac{1}{2^{nk_1}}\Big(\sum_{\nu=1}^{2^n}\sum_{\mu=2^m+1}^{\infty}c_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\Big)^{1/2},$$

$$I_3=\frac{1}{2^{mk_2}}\Big(\sum_{\nu=2^n+1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2^m}c_{\nu\mu}^2\,\mu^{2k_2}\Big)^{1/2},$$

$$I_4=\Big(\sum_{\nu=2^n+1}^{\infty}\sum_{\mu=2^m+1}^{\infty}c_{\nu\mu}^2\Big)^{1/2}.$$

Очевидно, что

$$I_1^*=\sum_{\nu=1}^{2^n-1}\sum_{\mu=1}^{2^m-1}c_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}=\sum_{l_1=0}^{n-1}\sum_{\nu=2^{l_1}}^{2^{l_1+1}-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}\sum_{\mu=2^{l_2}}^{2^{l_2+1}-1}c_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}.$$

Пусть $c_{\nu\mu}$ удовлетворяют условию (7), тогда, если использовать лакунарность $c_{\nu\mu}$, то будем иметь:

$$I_1^*\leqq A_{22}\sum_{l_1=0}^{n-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}a_{l_1l_2}^2\,2^{2l_1k_1}\,2^{2l_2k_2}$$

$$\leqq A_{23}\sum_{l_1=0}^{n-1}\sum_{l_2=0}^{m-1}2^{-2l_1r_1+2l_1k_1}\cdot 2^{-2l_2r_2+2l_2k_2}=A_{23}\sum_{l_1=0}^{n-1}2^{2l_1(k_1-r_1)}\sum_{l_2=0}^{m-1}2^{2l_2(k_2-r_2)},$$

т. е. $I_1^*\leqq A_{24}\,2^{2n(k_1-r_1)}\,2^{2m(k_2-r_2)}$.

Значит, $I_1\leqq A_{25}/2^{nr_1}2^{mr_2}$. Заметим, что для любых δ_1 и δ_2, таких, что $0<\delta_i<1$ существуют целые неотрицательные числа n и m, такие, что

$$\frac{1}{2^{n+1}}<\delta_1\leqq\frac{1}{2^n}\quad\text{и}\quad\frac{1}{2^{m+1}}<\delta_2\leqq\frac{1}{2^m}.$$

Тогда для этих n и m имеем:

(8) $$I_1\leqq A_{26}\,\delta_1^{r_1}\,\delta_2^{r_2}.$$

Аналогично

$$I_2^2=\frac{1}{2^{2nk_1}}\sum_{\nu=1}^{2^n-1}\sum_{\mu=2^m+1}^{\infty}c_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}=\frac{1}{2^{nk_1}}\sum_{l_1=0}^{n-1}\sum_{\nu=2^{l_1}}^{2^{l_1+1}-1}\sum_{\mu=2^m+1}^{\infty}c_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}$$

$$\leqq\frac{A_{27}}{2^{nk_1}}\sum_{l_1=0}^{n-1}\sum_{l_2=m+1}^{\infty}a_{l_1l_2}^2\,2^{l_1k_1}\leqq\frac{A_{28}}{2^{nk_1}}\sum_{l_1=0}^{n-1}\sum_{l_2=m+1}^{\infty}2^{-2l_1r_1+2l_1k_1}\cdot 2^{-2l_2r_2}$$

$$=\frac{A_{28}}{2^{nk_1}}\sum_{l_1=0}^{n-1}2^{2l_1(k_1-r_1)}\sum_{l_2=m+1}^{\infty}2^{-2l_2r_2},$$

т. е. $I_2\leqq A_{29}/2^{nr_1}2^{mr_2}$ или

(9) $$I_2\leqq A_{30}\,\delta_1^{r_1}\,\delta_2^{r_2}.$$

Аналогично доказывается, что

(10) $$I_3\leqq A_{31}\,\delta_1^{r_1}\,\delta_2^{r_2},$$

(11) $$I_4\leqq A_{32}\,\delta_1^{r_1}\,\delta_2^{r_2}.$$

Из справедливости неравенств (8), (9), (10) и (11) и теоремы 1 следует доказательство достаточности.

Теперь докажем необходимость. Так как

$$I_1^2=\frac{1}{2^{2nk_1}2^{2mk_2}}\sum_{\nu=1}^{2^n}\sum_{\mu=1}^{2^m}c_{\nu\mu}^2\,\nu^{2k_1}\mu^{2k_2}$$

$$=\frac{1}{2^{2nk_1}2^{2mk_2}}\sum_{l_1=0}^{n}\sum_{l_2=0}^{m}a_{l_1l_2}^2.2^{2l_1k_1+2l_2k_2}\geqq\frac{1}{2^{2nk_1}2^{2mk_2}}.a_{nm}^2.2^{2nk_1+2mk_2}=a_{nm}^2,$$

то

$$a_{nm}\leqq I_1. \tag{12}$$

Так как $I_1\leqq B(c_{\nu\mu},\ k_1,\ k_2,\ 2^n,\ 2^m)$, а по теореме 1

$$B(c_{\nu\mu},\ k_1,\ k_2,\ 2^n,\ 2^m)\leqq A_{33}\,\omega_{k_1k_2}\Big(f,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^m}\Big)_{\vec{p}},$$

то

$$I_1\leqq A_{34}\,\omega_{k_1k_2}\Big(f,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^m}\Big). \tag{13}$$

Пусть $f(x,\ y)\in S^0H_p^{r_1r_2}$, тогда из неравенств (12) и (13) следует, что

$$a_{nm}\leqq A_{35}/2^{nr_1}2^{mr_2}. \tag{14}$$

Из справедливости неравенства (14) следует доказательство необходимости. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Конюшков. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. *Матем. сбор.*, **44**, 1958, № 1, 58—84.
2. И. Е. Жак. О сопряженных двойных тригонометрических рядах. *Матем. сбор.*, **31**, 1952, № 3, 469—484.
3. Л. Кагадий. Коэффициенты Фурье и модули гладкости функций двух переменных. *Учён. зап., Тартус. ун-та*, **253**, № 9, 229—243.
4. М. К. Потапов, М. Бериша. Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного. *Publ. de l'institut mathematique*, **26**, 40, 215—228.
5. М. Бериша. Коэффициенты Фурье и модули гладкости функций двух переменных. *Mat. vesnik*, **38** (3), 1986.
6. М. Бериша, Р. Кастрати. Модули гладкости и коэффициенты двойных лакунарных тригонометрических рядов. Punime matematike, № 1, Prishtinë, 1986, 29—41.
7. М. Потапов. Теоремы вложения в смешаной метрике, *Труды мат. ин-та АН СССР*, **32**, 1980, гл. 5.
8. S. Aljančić, M. Tomić. Über den Stätigkeit Modul ven Feurier-Reihen mit menetenen Koefizienten. *Math. Z.*, **88**, 1965, 274—284.

Universiteti i KOSOVËS
Fakulteti i shkencave matematike — natyrere
38000 Prishtinë
Jugoslavija.

Поступила 15. 9. 1886 г.
В переработанном виде 20. 6. 1986 г.