Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КОРАЗМЕРНОСТИ T-ИДЕАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЖДЕСТВО ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

ЛЮБОВ А. ВЛАДИМИРОВА

Получены оценки для коразмерностей T-идеалов, содержащих коммутаторное тождество четвертой степени.

В последние годы появилось множество работ, изучающих многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики ноль с тождеством третьей степени (см. ссылки на литературу в [2]).

Следующим шагом в этом направлении является исследование многообразий, удовлетворяющих тождеству четвертой степени. Например, в работе В. С. Дренского [5] описана решетка многообразий унитарных алгебр, удовлетворяющих нематричному тождеству четвертой степени. В работах А. Р. Кемера [7] и В. С. Дренского [4] исследуются многообразия ассоциативных алгебр со стандартным тождеством четвертой степени.

Настоящая работа посвящена изучению многообразий алгебр без единицы, в которых выполняется тождество четвертой степени. В этом случае нельзя надеятся получить полное описание всех таких многообразий. Поэтому мы исследуем поведение важнейшей числовой характеристики соответствующих T-идеалов. При этом мы ограничиваемся случаем, когда многообразие удовлетворяет собственному (или коммутаторному) тождеству четвертой степени. Когда T-идеал порождается одним таким тождеством, известны точные формулы их коразмерностей [7, 11]. Если T_0 есть T-идеал, в котором содержится коммутаторное тождество четвертой степени, наша задача состоит в нахождении оценки для коразмерностей T_0.

Известно, что если f содержится во множестве собственных тождеств Γ_4, то f эквивалентен некоторым из следующих тождеств:

(1) $[x, y, x, x]=0$,

(2) $[x, y]^2=0$,

(3) $[[x, y], [z, t]]=0$,

(4) $S_4(x, y, z, t)=0$.

Линеаризация каждого из этих полиномов порождает неприводимый KS_4-подмодуль в Γ_4, изоморфный соответственно $M(3, 1)$, $M(2^2)$, $M(2, 1^2)$, $M(1^4)$.

Оказывается, что удобнее сначала рассмотреть многообразие, определенное тождеством

(5) $[x, y][z, t]=0$,

а потом перейти к случаям (1)—(4). Если элементом (5) породим KS_4-модуль, то он является суммой трех неприводимых подмодулей, изоморфных соответственно $M(2^2)$, $M(2, 1^2)$ и $M(1^4)$.

Последовательность наших рассуждений в каждом из четырех случаев будет следующей: используя результаты в [5, 7, 11] о модульной структуре полилинейных

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 14, 1988, с. 82—94.

констант, мы получаем описание относительно свободной алгебры соответствующего многообразия. Потом добавляем к T-идеалу новое тождество и пытаемся найти достаточно много элементов в нем, чтобы суметь оценить коразмерности полученного подмногообразия.

1. Обозначения и предварительные сведения. Будем придерживаться к обозначениям, принятым в [5]. Все необходимые сведения и определения можно найти, например, в [1, 4, 8].

Будем рассматривать ассоциативные алгебры без единицы, над полем K характеристики ноль. Для каждого многообразия $\mathfrak{M}$ будем обозначать через $F_m(\mathfrak{M})$ и $F_m^{(n)}(\mathfrak{M})$ его свободную алгебру с образующими $x_1, \ldots, x_m$ и ее однородную компоненту степени n. Множество полилинейных многочленов в $F_n^{(n)}(\mathfrak{M})$ будем обозначать через $P_n(\mathfrak{M})$ и через $B_m^{(n)}(\mathfrak{M})$ — линейное подпространство в $F_m^{(n)}(\mathfrak{M})$, натянутое на произведение коммутаторов $[x_{i_1}, \ldots] \ldots [\ldots, x_{i_n}]$. Через $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ будем обозначать множество собственных многочленов в $P_n(\mathfrak{M})$, т. е. $\Gamma_n(\mathfrak{M}) = P_n(\mathfrak{M}) \cap B_n^{(n)}(\mathfrak{M})$ — подпространство в $P_n(\mathfrak{M})$, натянутое на коммутаторы [16]. Последовательность коразмерностей определяется равенством $c_n = c_n(\mathfrak{M}) = \dim P_n(\mathfrak{M})$.

Множество $P_n(\mathfrak{M})$ обладает структурой левого KS_n-модуля, а $F_m^{(n)}(\mathfrak{M})$ является GL_m-модулем, где S_n-симметрическая группа, действующая на множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, а GL_m — полная линейная группа. Неприводимые KS_n—(соответственно GL_m—) подмодули в $P_n(\mathfrak{M})$ (соответственно в $F_m^{(n)}(\mathfrak{M})$) описываются с помощью диаграмм Юнга [8]. Если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ — разбиение числа n, т. е. $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_s$, $\Sigma\, \lambda_i = n$, то через $M(\lambda)$ обозначим неприводимый KS_n-модуль, отвечающий разбиению λ, а через $N_s(\lambda)$ — GL_s модуль, соответствующий этому разбиению

Нам придется использовать формулу крюков для размерности $M(\lambda)$ [3]:

$$\dim M(\lambda) = n!\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j + j - i)\ [\prod_{i=1}^{s}(\lambda_i + s - i)!]^{-1}. \tag{6}$$

Обозначим через $K[x_1, \ldots, x_m]$ — коммутативную алгебру многочленов. Ее однородные компоненты являются GL_m-модулями, изоморфными $N_m(n)$.

Из [11] известно, что GL_m-модуль $F_m^{(n)}(\mathfrak{M})$ и GL_m-модуль $\Sigma_{k=0}^{n}(K[x_1, \ldots, x_m]^{(n-k)} \oplus_K B_m^{(k)}(\mathfrak{M}))$ изоморфны. Если переформулируем этот факт на язык представлений симметрической группы S_n, получим, что

$$P_n(\mathfrak{M}) \cong \sum_{k=0}^{n} [(M(n-k) \otimes \Gamma_k(\mathfrak{M})) \uparrow S_n], \tag{7}$$

где из $(S_{n-k} \times S_k)$ — модуля $M(n-k) \otimes \Gamma_k(\mathfrak{M})$ индуцируется KS_n-модуль при каноническом вложении $S_{n-k} \times S_k$ в S_n.

2. Разложение относительно свободной алгебры в сумму неприводимых модулей. Обозначим через $\mathfrak{A}$ — многообразие, определенное тождеством (5), а через $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$ — многообразия, определенные соответственно тождествами (1), (2), (3), (4).

Предложение 2.1. *Множества полилинейных элементов относительно свободных алгебр многообразий $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$ имеют соответственно следующее разложение в сумму неприводимых KS_n-подмодулей:*

а) $P_n(\mathfrak{A}) = M(n) \oplus \sum_{k=1}^{[n/2]} (n-2k+1)\, M(n-k, k) \oplus \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} (n-2k)\, M(n-k-1, k, 1)$.

б) $P_n(\mathfrak{M}_1) = M(n) \oplus 2\,M(n-1, 1) \oplus 2\,M(n-2, 2) \oplus 3\,M(n-2, 1^2)$

$$\oplus 3M(n-3, 2, 1) \oplus M(n-4, 2^2) \oplus 3M(n-3, 1^3) \oplus 2M(n-4, 2, 1^2)$$

$$\oplus 2M(n-4, 1^4) \oplus M(n-5, 2, 1^3) \oplus \sum_{k=5}^{n-1} M(n-k, 1^k).$$

в) $$P_n(\mathfrak{M}_2) = M(n) \oplus \sum_{k=1}^{[n/2]} (n-2k+1) M(n-k, k) \oplus (n-1) M(n-2, 1^2)$$

$$\oplus (n-3) M(n-3, 2, 1) \oplus \sum_{k=3}^{[(n-1)/2]} (n-2k) M(n-k-1, k, 1) \oplus 3M(n-3, 1^3)$$

$$\oplus 2M(n-4, 2, 1^2) \oplus 2M(n-4, 1^4) \oplus M(n-5, 2, 1^3) \oplus \sum_{k=5}^{n-1} M(n-k, 1^k).$$

г) $$P_n(\mathfrak{M}_3) = M(n) \oplus (n-1) M(n-1, 1) \oplus (n-2) M(n-2, 2)$$

$$\oplus \sum_{k=3}^{[n/2]} (n-2k+1) M(n-k, k) \oplus (n-2) M(n-2, 1^2) \oplus (n-3) M(n-3, 2, 1)$$

$$\oplus \sum_{k=3}^{[(n-1)/2]} (n-2k) M(n-k-1, k, 1) \oplus M(n-4, 2^2) \oplus \sum_{k=3}^{n-1} M(n-k, 1^k).$$

д) *Обозначим через* $\mathfrak{B}$ *многообразие, порожденное алгеброй матриц второго порядка. Тогда имеем*

$$P_n(\mathfrak{M}_4) = P_n(\mathfrak{B}) \oplus M(n-2, 2) \oplus 2M(n-3, 3) \oplus M(n-3, 2, 1)$$

$$\oplus 2M(n-4, 3, 1) \oplus M(n-4, 2^2) \oplus 2M(n-5, 3, 2) \oplus M(n-6, 3^2).$$

Доказательство. а) Так как из [5] известна модульная структура $\Gamma_k(\mathfrak{A})$, то с помощью правила Литтлвуда — Ричардсона [3], мы можем получить разложение KS_n-модуля $(\Gamma_k(\mathfrak{A}) \otimes M(n-k)) \uparrow S_n$ в сумму неприводимых KS_n-подмодулей. А потом, используя (7), мы получаем требуемое утверждение.

Используя результаты из [5] и [7], мы рассматриваем аналогично и случаи, б, в, г и д.

3. Многообразие $\mathfrak{A}$. Известно [6], что все собственные подмногообразия многообразия $\mathfrak{A}$, определенного тождеством $[x, y]\ [z, t] = 0$, имеют степенной рост коразмерностей. Наша цель — найти конкретную оценку этого роста.

Положим $f_k(x, y, u) = f_k(u) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x^{k-i} y^i u x^i y^{k-i}$. Если вместо u в $f_k(u)$ подставляем $S_2(x, y) = [x, y]$ или $S_3(x, y, z) = x[y, z] + y[z, x] + z[x, y]$, мы будем записывать это короче через $f_k(S_2)$ и $f_k(S_3)$, соответственно.

Кроме того, обозначим через $U_{p,q}$ линейное подпространство в $F_2(\mathfrak{A})$ (а, следовательно, и в $F(\mathfrak{A}) = F_\infty(\mathfrak{A})$), порожденное стандартными порождающими неприводимых GL_2-модулей, изоморфных $N_2(p+q, q)$, т. е. $U_{p,q}$ есть однородная компонента в $N_2^s(p+q, q)$ состава $(p+q, q)$, где s кратность $N_2(p+q, q)$ в $F_2(\mathfrak{A})$.

Аналогично, обозначим через $V_{p,q}$ линейное подпространство $F_3(\mathfrak{A})$, порожденное стандартными порождающими неприводимых GL_3-модулей, изоморфных $N_3(p+q-1, q, 1)$.

Все дальнейшие рассмотрения будут проводиться в $F(\mathfrak{A})$.

Предложение 3.1. *Для базиса линейных подпространств* $U_{p,q}$ *и* $V_{p,q}$ *в* $F(\mathfrak{A})$ *можем выбрать соответственно элементы*

(8) $$x^p f_{q-1}(S_2),\ x^{p-1} f_{q-1}(S_2)\, x, \ldots, x f_{q-1}(S_2)\, x^{p-1}, f_{q-1}(S_2)\, x^p;$$

(9) $$x^{p-1} f_{q-1}(S_3),\ x^{p-2} f_{q-1}(S_3)\, x, \ldots, f_{q-1}(S_3)\, x^{p-1}.$$

Доказательство. Очевидно, что число элементов из (8) и (9) равно кратности неприводимых подмодулей $M(p+q,q)$ и $M(p+q-1, q, 1)$, соответственно. Поэтому, чтобы доказать это, достаточно убедиться, что 1) эти элементы порождают неприводимые модули, изоморфные $N_2(p+q, q)$ и $N_3(p+q-1, q, 1)$, соответственно, и 2) они линейно независимы в относительно свободной алгебре многообразия.

Последовательно будем доказывать 1) и 2) соответственно для элементов (8) и (9).

1) Легко убедиться, что выполняется равенство $f_k(S_2)=xf_{k-1}(S_2)\,y-y\,f_{k-1}(S_2)\,x$. (Отметим, что благодаря тождеству $[x, y]\,[z, t]=0$ мы можем произвольно переставлять буквы слева и справа $S_2(x, y)$). Это равенство дает нам, что число кососимметрических пар (x, y) в $f_k(S_2)$ на единицу больше, чем их число в $f_{k-1}(S_2)$. Если начнем из $f_0(S_2)=[x, y]$, то мы получим, что в $f_{q-1}(S_2)$ есть точно q кососимметрических пар (x, y), т. е. столько, сколько их должно быть в выражении для порождающего модуля $N_2(p+q, q)$.

2) Зафиксируем m и n и рассмотрим следующее множество элементов: $\Phi=\{x^\alpha y^\beta\,[x, y]\,x^{m-\alpha}\,y^{n-\beta},\ m\geqq\alpha\geqq 0,\ n\geqq\beta\geqq 0\}$.
Пусть $\varphi(x, y)=\Sigma_{ij}\,a_{ij}\,x^{\alpha_i}\,y^{\beta_j}[x, y]\,x^{m-\alpha_i}\,y^{n-\beta_j}$ есть произвольная линейная комбинация этих элементов. (Считаем, что записаны только ненулевые коэффициенты a_{ij}.)

Из [10] известно, что $x^\gamma y^\delta$, $x^\lambda y^\mu\,[x, y, x, \ldots, x, y, \ldots, y]$ образуют базис $F_2(\mathfrak{A})$. Тогда можем выразить $\varphi(x, y)$ как их линейную комбинацию.

$$\varphi(x, y)=a_{11}\,x^{\alpha_1}\,y^{\beta_1}\,[x, y, \underbrace{x, \ldots, x}_{m-\alpha_1}, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-\beta_1}]$$

$$+\Sigma\,b_{ij}\,x^{\gamma_i}\,y^{\delta_j}\,[x, y, \underbrace{x, \ldots, x}_{m-\gamma_i}, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-\delta_j}].$$

Если среди пар (α_i, β_j) введем порядок $(\alpha_i, \beta_j)>(\alpha_k, \beta_l)$, когда $\alpha_i>\alpha_k$, а когда $\alpha_i=\alpha_k$ $\beta_j>\beta_l$, то $(\alpha_i\ \beta_j)>(\alpha_i, \beta_l)$ без ограничения общности можем считать, что (α_1, β_1) минимальный элемент в этом порядке. Допустим, что $\varphi(x, y)=0$ для некоторых a_{ij}. Слагаемое с коэффициентом a_{11} единственное с таким „длинным" коммутатором. Отсюда следует $a_{11}=0$, что противоречит нашему предположению. Поэтому элементы из Φ тоже линейно независимы в $F_2(\mathfrak{A})$.

Если рассмотрим элементы (8), то нетрудно увидеть, что они линейные комбинации элементов из Φ. Перечислим их в следующем порядке: $x^{p+q-1}\,[x, y]\,y^{q-1}$, $x^{p+q-2}\,y\,[x, y]\,xy^{q-2}, \ldots, x^p\,y^{q-1}\,[x, y]\,x^{q-1}$, $x^{p+q-2}\,[x, y]\,xy^{q-1}$, $x^{p+q-3}\,y\,[x, y]\,x^2\,y^{q-1}, \ldots, x^{p-1}\,y^{q-1}\,[x, y]\,x^q, \ldots$ Матрица коэффициентов перед ними — верхнетреугольная, откуда следует их линейная независимость.

1) В этом случае доказательство буквально повторяет 1) для элементов (8).

2) Сначала рассмотрим элементы $x^\alpha y^\beta z$, $x^\gamma y^\delta z$ $[x, y, x, \ldots, x, y, \ldots, y]$, $x^\lambda y^\mu$ $[x, z, x, \ldots, x, y, \ldots, y]$, $x^\nu y^\eta\,[y, z, x, \ldots, x, y, \ldots, y]$. Условимся, что $z<y<x$. Тогда эти элементы составляют часть базиса $F_3(\mathfrak{A})$, описанного в [10], т. е. они линейно независимы в $F(\mathfrak{A})$. Потом, как в случае 2) для элементов (8), при фиксированных m и n, элементы множества

$$\Phi_1=\{x^{\alpha-1}\,y^\beta\,z\,[x, y]\,x^{m-\alpha}\,y^{n-\beta},\ x^{\gamma-1}\,y^{\delta+1}\,[x, z]\,x^{m-\gamma}\,y^{n-\delta},$$
$$x^\lambda\,y^\mu\,[y, z]\,x^{m-\lambda}\,y^{n-\mu};\ m\geqq\alpha,\ \gamma,\ \lambda\geqq 0,\ n\geqq\beta,\ \delta,\ \mu\geqq 0\}$$

выражаются посредством элементов базиса и являются линейно независимыми. Теперь отметим, что элементы (9) есть линейные комбинации элементов из Φ_1 и, кроме того, ранг матрицы коэффициентов при этой записи равен числу этих элементов. Утверждение доказано.

Рассмотрим подробнее подмногообразия многообразия $\mathfrak{A}$. Для этого нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 3.2. *Многочлен $f_k(S_3)$ следует как тождество из многочлена $f_k(S_2)$.*

Доказательство. В многочлене $f_k(x, y, S_2)$ линеаризируем частично по y и подставляем z, т. е. в $f_k(x, y+z, S_2)$ берем линейную часть по z. Эти действия будем обозначать через $f_k(x; y, z; S_2)$. Таким образом мы получаем следствие

$$f_k(x; y, z; S_2) = k(x f_{k-1}(S_2) z - z f_{k-1}(S_2) x) + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x^{k-i} y^i [x, z] x^i y^{k-i}.$$

Аналогично получаем следствие

$$f_k(x, z; y; S_2) = k(z f_{k-1}(S_2) y - y f_{k-1}(S_2) z) + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x^{k-i} y^i [z, y] y^{k-i} x^i.$$

Используя эти два равенства, получаем

$$-(k-1) f_k(S_2) z - f_k(x; y, z; S_2) y - f_k(x, z; y; S_2) x = f_k(S_3),$$

т. е. $f_k(S_3)$ следует из $f_k(S_2)$.

Лемма 3.3. *Из $f_k(S_2)$ получаем как следствие*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n+i} f_{k-n}(S_2) x^{2n-i} = 0, \quad 0 \leq n \leq k. \tag{10}$$

Доказательство. Нетрудно увидеть, что $f_k(x; y, x^2; S_2) = x f_{k-1}(S_2) x^2 - x^2 f_{k-1}(S_2) x$. Если снова линеаризируем по y и подставим x^2, мы получим (10) для $n=2$, так что индукцией по числу n можно доказать:

$$f_k(x; y, \underbrace{x^2, \ldots, x^2}_{n \text{ раз}}; S_2) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n+i} f_{k-n}(S_2) x^{2n-i}.$$

Лемма 3.4. *Из тождества $f_k(S_3)$ следует тождество*

$$\Sigma (-1)^i \binom{n}{i} x^{n+i-1} f_{k-n+1}(S_3) x^{2n-i-1}, \quad k+1 \geqq n \geqq 2. \tag{11}$$

Доказательство. Сначала докажем, что из $f_k(S_3) = 0$ следует

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n+i} f_{k-n+1}([z, x]) x^{2n-i} = 0. \tag{12}$$

Будем проводить индукцию по числу n. Сначала рассмотрим случай $n=1$.

$$f_k(x; y, x^2; S_3) = k(x f_{k-1}(S_3) x^2 - x^2 f_{k-1}(S_3) x) + x f_k([z, x]) x, \tag{13}$$

$$f_k(x; y, [z, x]; S_3) = x f_k([z, x]) z - z f_k([z, x]) x. \tag{14}$$

В (14) линеаризируем по z и, подставляя x^2, получаем

$$x f_k([z, x]) x^2 - x^2 f_k([z, x]) x = 0. \tag{15}$$

Как видно (15) есть (12) для $n=1$. Допустим, что (12) выполняется для n. Тогда линеаризируем в нем по y, подставляем x^2 и получаем тождество

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^{n+i}(k-n+1)\left(xf_{k-1}([z,x])x^2-x^2f_{k-n}([z,x])x\right)x^{2n-i}$$

$$=(k-n+1)\ x^{n+1}\ \left\{\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\left[\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right]x^{i+1}f_{k-n}([z,x])\,x^{n-i+1}\right\}x^n$$

$$=(k-n+1)\,x^{n+1}\left\{\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}x^if_{k-n}([z,x])\,x^{n-i+1}\right\}x^{n+1},$$

что есть (12) при $n+1$.

Чтобы доказать (11), снова воспользуемся индукцией по n. Умножаем (13) на x сначала слева, потом справа и вычитаем полученные равенства. Имея в виду (15), выводим, что

$$x^3f_{k-1}(S_3)\,x-2x^2f_{k-1}(S_3)\,x^2+xf_{k-1}(S_3)\,x^3=0.$$

Это тождество является (11) для $n=2$. Предположим, что (11) выполнено для n. Линеаризируем по y и подставляем x^2. Получаем тождество

$$(k-n+1)\ \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^{n+i-1}\left(xf_{k-n}(S_3)\,x^2-x^2f_{k-n}(S_3)\,x\right)x^{2n-i-1}$$

$$+\ \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^{n+i-1}\left(xf_{k-n+1}([z,x])\,x\right)x^{2n-i-1}$$

$$=(k-n+1)\,x^n\left[\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}x^i\,f_{k-n}(S_3)\,x^{n+1-i}\right]x^n$$

$$+\ \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^{n+i}f_{k-n+1}([z,x])\,x^{2n-i}.$$

По модулю тождества (12) мы получаем (11) для $n+1$. Этим лемма доказана.

Лемма 3.5. *Из тождества* $x^rf_p(S_3)\,x^q$ *следуют* $x^{r+1}f_p(S_2)\,x^{q+1}$ *и* $x^r\ f_{p+1}(S_2)\ x^q$.

Доказательство. Если в $x^rf_p(S_3)\,x^q$ вместо z подставим x^2, то получим $x^{r+1}f_p(S_2)\,x^{q+1}$, а второе из двух тождеств получится, если вместо z подставим $[x,\ y]$.

Лемма 3.6. *Если хотя бы одно из* α_i *не равно* 0, *то из*

$$g_1=\sum_{i=0}^{m-2k}\alpha_i\,x^if_{k-1}(S_2)x^{m-2k-i}=0\ \text{следует}\ f_{m-k-1}(S_2)=0,\ 1\leq k\leq[m/2].$$

Доказательство. Линеаризируя g_1 по x и подставляя y, получаем

$$\sum_{i=1}^{m-2k}(i\alpha_i)\,x^{i-1}\ yf_{k-1}(S_2)\ x^{m-2k-i}+\ \sum_{i=0}^{m-2k-1}(m-2k-i)\,\alpha_i\,x^if_{k-1}(S_2)\,x^{m-2k-i-1}\ y$$

$$=\sum_{i=1}^{m-2k-1}(i\alpha_i)\left[x^i\,y\,f_{k-1}(S_2)\,x^{m-2k-i}-x^if_{k-1}(S_2)\,x^{m-2k-i-1}\,y\right]$$

$$+\ (m-2k)\,\alpha_{m-2k}\ x^{m-2k-1}\ y\,f_{k-1}(S_2)+\ \sum_{i=0}^{m-2k-1}(m-2k)\ \alpha_i\,x^if_{k-1}(S_2)\,x^{m-2k-i-1}\ y=0.$$

Теперь умножаем справа на x, а затем добавляем и вычитаем

$$(m-2k)\,\alpha_{m-2k}\,x^{m-2k} f_{k-1}(S_2)\,y$$

$$\sum_{i=1}^{m-2k-1} (i\alpha_i)\,x^{i-1} f_k(S_2)\,x^{m-2k-i} + (m-2k)\,\alpha_{m-2k}\,x^{m-2k-1} f_k(S_2)$$

$$+\sum_{i=0}^{m-2k} (m-2k)\,\alpha_i\,x^i f_{k-1}(S_2)\,x^{m-2k-i}\,y=0.$$

Имея в виду, что последнее слагаемое есть g_1, мы получаем следствие

$$\sum_{i=1}^{m-2k} (i\alpha_i)\,x^{i-1} f_k(S_2)\,x^{m-2k-i}=0.$$

Обозначим через i_0 наибольшее i, для которого $\alpha_i \neq 0$. Тогда через i_0 шагов, подобных тому, которому мы только что сделали, можем вывести следующее тождество $(i_0)!\ \alpha_{i_0} f_{k+i_0-1}(S_2)\,x^{m-2k-i_0}=0$.

Так как $\alpha_{i_0} \neq 0$, получаем

$$f_{k+i_0-1}(S_2)\,x^{m-2k-i_0}=0. \tag{16}$$

Снова линеаризируем по x и подставляем y. Легко следует, что $(m-2k-i_0) f_{k+i_0-1}(S_2)\,x^{m-2k-i_0-1}\,y=0$. Умножаем справа на x и вычитаем очевидное тождество $(m-2k-i_0)\,y\,f_{k+i_0-1}(S_2)\,x^{m-2k-i_0}=0$. Отсюда получаем $(m-2k-i_0)\,f_{k+i_0}(S_2)\,x^{m-2k-i_0-1}=0$. После конечного числа таких шагов мы выводим тождество $(m-2k-i_0)!\,f_{m-k-1}(S_2)=0$. Если $(m-2k-i_0)\neq 0$, то следует $f_{m-k-1}(S_2)=0$. Когда $i_0=m-2k$ из (16) снова получаем тождество $f_{m-k-1}(S_2)=0$. Если $i_0=0$, т. е. $g_1=\alpha_0 f_{k-1}(S_2)\,x^{m-2k}$, то аналогично выводим, что $\alpha_0\,(m-2k)!\,f_{m-k-1}(S_2)=0$. Таким образом лемма доказана.

Лемма 3.7. *Если обозначим*

$$g_2=\sum_{i=0}^{m-2k-1} \beta_i\,x^i f_{k-1}(S_3)\,x^{m-2k-1-i},$$

то из $g_2=0$ *следует* $f_{m-k-2}(S_3)=0$, $1\leq k\leq[(m-1)/2]$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 3.6.

Обозначим через $\mathfrak{A}(f_k(S_2))$ подмногообразие многообразия $\mathfrak{A}$, определенное тождеством $f_k(S_2)=0$. Сейчас будем рассматривать как меняются кратности неприводимых KS_n-подмодулей $P_n(\mathfrak{A})$ в $P_n(\mathfrak{A}(f_k(S_2)))$.

Многочлены $x^r f_p(S_2)\,x^q$ и $x^a f_b(S_3)\,y^c$ являются для $p,\ b\geq k$, $r, q, a, c\geq 0$ следствиями из $f_k(S_2)$. Поэтому в $P_n(\mathfrak{A}(f_k(S_2)))$ аннулируются все неприводимые KS_n-подмодули у которых вторая строчка соответствующей диаграммы Юнга имеет длину $\geq k$.

Лемма 3.8. *Кратность неприводимого* KS_n*-подмодуля* $M(m-r, r)$ *в* $P_m(\mathfrak{A}(f_k(S_2)))$ *не превосходит* $3(k-r+1)$ *для* $m\geq 3k+2$, $1\leq r<k$.

Доказательство. Известно, что для любого многообразия $\mathfrak{M}$ кратность KS_n-модуля $N(\lambda)$, $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, в $P_n(\mathfrak{M})$ равна кратности GL_s-модуля $N_s(\lambda)$ в $F_s(\mathfrak{M})$. Поэтому, когда определяем кратности подмодулей, без ограничения общности, мы будем работать с GL_s-модулями.

По предложению 2.1 кратность $M(m-r, r)$ в $P_m(\mathfrak{A})$ равна $m-2r+1$.

Тождество (10) из леммы 3.3., записанное в виде

$$\sum_{i=0}^{k-r+1} (-1)^i \binom{k-r+1}{i} x^{k-r+1+i} f_{r-1}(S_2)\,x^{2k-2r+2-i},\quad 1\leq r<k, \tag{17}$$

задает линейную зависимость между порождающими неприводимых GL_2-подмодулей, изоморфных $N_2(3k-2r+3, r)$. Тогда кратность $N_2(3k-2r+3, r)$ в $F_2(\mathfrak{A}(f_k(S_2)))$ на

1 меньше кратности этого модуля в $F_2(\mathfrak{A})$ и, следовательно, не превосходит $3(k-r+1)$. Отметим, что кратность $M_2(m+1-r, r)$ в $F_2(\mathfrak{A})$ на 1 больше кратности $M_2(m-r, r)$ в $F_2(\mathfrak{A})$. Кроме того, из тождества (17) следуют не менее двух линейно независимых следствий степени на 1 больше, чем степень (17). (Они получаются умножением (17) на x слева и справа, соответственно.) Следовательно, кратность $N_2((3k-2r+3)+1, r)$ в $F_2(\mathfrak{A}(f_k(S_2)))$ равна кратности $N_2(3k-2r+3, r)$ в $F_2(\mathfrak{A}(f_k(S_2)))$. Аналогично кратность $N_2((3k-2r+3)+2, r)$ не превосходит кратности $N_2((3k-2r+3)+1, r)$ и т. д. Таким образом мы получаем утверждение леммы.

Лемма 3.9. *Кратность $M(m-r-1, r, 1)$ в $P_m(\mathfrak{A}(f_k(S_2)))$ не превосходит $3(k-r+1)+1$ для $m\geq 3k+4$, $1\leq r<k$.*

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 3.8, только вместо тождества (10) надо рассматривать тождество (11).

Предложение 3.10. *Пусть $\mathfrak{A}(f_k(S_2))$-подмногообразие многообразия $\mathfrak{A}$, порожденное тождеством $f_k(S_2)=0$. Тогда для коразмерностей этого подмногообразия выполняется неравенство*

$$c_n(\mathfrak{A}(f_k(S_2))<k(3k+1)\,n^{k+1}+3k^2\,n^k,\quad n>3k+1. \tag{18}$$

Доказательство. Используя формулу (6), можем найти размерности модулей $M(n-r, r)$ и $M(n-r-1, r, 1)$:

$$\dim M(n-r, r)=\binom{n}{r-1}(n-2r+1)\,[r(r+1)]^{-1},$$

$$\dim M(n-r-1, r, 1)=\binom{n}{r-1}(n-r)(n-2r)(r+1)^{-1}.$$

Ввиду лемм 3.8 и 3.9 мы получаем оценку для коразмерностей

$$c_n(\mathfrak{A}(f_k(S_2)))<1+\sum_{r=1}^{k}[3(k-r+1)\binom{n}{r-1}\frac{n-2r+1}{r(r+1)}+(3k-3r+4)\binom{n}{r-1}\frac{(n-r)(n-2r)}{r+1}$$

$$<\sum_{r=1}^{k}[3k\binom{n}{k-1}\frac{n-1}{2}+(3k+1)\binom{n}{k-1}\frac{(n-1)(n-2)}{2}].$$

Чтобы получить оценку (18) осталось отметить только, что $\binom{n}{k}<n^k$.

Следствие 3.11. *Если обозначим через $\mathfrak{A}(f_k(S_3))$ подмногообразие многообразия $\mathfrak{A}$, порожденное тождеством $f_k(S_3)=0$, то для коразмерностей этого подмногообразия имеют место оценки*

$$c_n(\mathfrak{A}(f_k(S_3)))<(k+1)(3k+4)\,n^{k+2}+3(k+1)^2\,n^{k+1} \tag{19}$$

для $n\geq 3k+7$.

Доказательство. Из леммы 3.5 при $r=q=0$ получаем, что из $f_k(S_3)$ следует $f_{k+1}(S_2)$. Утверждение получается применением предложения 3.10.

Следствие 3.12. *Обозначим через $\mathfrak{A}(g_1)$ подмногообразие многообразия $\mathfrak{A}$, определенное тождеством $g_1=0$, где*

$$g_1=\sum_{i=0}^{m-2k}\alpha_i\,x^i f_{k-1}(S_2)\,x^{m-2k-i}.$$

Тогда для $n>3t+3$ выполнено

$$c_n(\mathfrak{A}(g_1))<(t-1)(3t-2)\,n^t+3(t-1)^2\,n^{t-1}$$

где $t=m-k$.

Доказательство. Из леммы 3.6 знаем, что из $g_1=0$ следует $f_{m-k-1}(S_2)=0$. Поэтому оценка для коразмерностей получается из предложения 3.10.

Следствие 3.13. *Обозначим через* $\mathfrak{A}(g_2)$ *подмногообразие* $\mathfrak{A}$, *определенное тождеством* $g_2=0$, *где*

$$g_2=\sum_{i=0}^{m-2k-1}\beta_i\, x^i f_{k-1}(S_3)\, x^{m-2k-1-i}.$$

Тогда для $n>3t+1$ *выполняется следующее неравенство*

$$c_n(\mathfrak{A}(g_2))<(t-1)(3t-2)\,n^t+3(t-1)^2\,n^{t-1},$$

где $t=m-k$.

Доказательство. Из леммы 3.8 известно, что из $g_2=0$ следует $f_{m-k-2}(S_3)=0$. Поэтому требуемая оценка получается из следствия 3.11.

Теорема 3.14. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *многообразие, определенное тождеством* $[x, y]\,[z, t]=0$. *Пусть* g — *ненулевой многочлен степени* m, *в относительно свободной алгебре* $F(\mathfrak{A})$. *Тогда коразмерности подмногообразия* $\mathfrak{A}(g)$ *многообразия* $\mathfrak{A}$, *определенного тождеством* $g=0$, *удовлетворяют неравенству*

$$c_n(\mathfrak{A}(g))\leqq(m-1)(3m-2)\,n^m+3(m-1)^2\,n^{m-1},\ n\geqq 3m+1.$$

В частном случае, когда $g=x^m$, $\mathfrak{A}(g)$ *нильпотентно и класс нильпотентности не превосходит* $2m+1$.

Доказательство. Породим KS_m-модуль полной линеаризацией многочлена g. Порождающие неприводимых KS_m-подмодулей, которые участвуют в его разложении, следуют как тождества из $g=0$. Поэтому мы можем утверждать, что в T-идеале подмногообразия $\mathfrak{A}(g)$ находится по крайней мере один из следующих элементов:

а) $g_0=x^m$;

б) $g_1=\sum_{i=0}^{m-2k}\alpha_i\, x^i f_{k-1}(S_2)\, x^{m-2k-i},\ 1\leqq k\leqq [m/2]$;

в) $g_2=\sum_{i=0}^{m-2k-1}\beta_i\, x^i f_{k-1}(S_3)\, x^{m-2k-1-i},\ 1\leqq k\leqq[(m-1)/2]$.

а) Известно [14], что из $x^m=0$ всегда следует нильпотентность. В данном случае можем оценить класс нильпотентности, поскольку нам известны порождающие неприводимых модулей и можем непосредственно убедиться, что для $n\geqq 2m+1$ все они аннулируются.

Имея в виду, что $m-k<m$, мы получаем условия б) и в) из следствий 3.12 и 3.13.

4. Оценки для коразмерностей подмногообразий данного многообразия. Пусть $\mathfrak{B}$ — многообразие ассоциативных алгебр с T-идеалом $T=T(\mathfrak{B})$. Пусть T_1 и T_2 — T-идеалы в свободной ассоциативной алгебре, а $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — многообразия с T-идеалами T_1 и T_2, соответственно. Пусть, кроме того, $T\subset T_1\cap T_2$. Тогда, если $P(\mathfrak{B}_1)\cong\sum a(\lambda)\,M(\lambda)$, а $f_1(\lambda),\dots,f_{a(\lambda)}(\lambda)$ — порождающие неприводимых подмодулей $P_n(\mathfrak{B}_1)$, изоморфных $M(\lambda)$, то $f_1(\lambda),\dots,f_{a(\lambda)}(\lambda)$ — ненулевые порождающие и в $P_n(\mathfrak{B})$ неприводимых KS_n-модулей, изоморфных $M(\lambda)$, т. к. $T\subset T_1$. Следовательно, кратность $M(\lambda)$ в $P_n(\mathfrak{B}_1)$ не превосходит кратности $M(\lambda)$ в $P_n(\mathfrak{B})$, $\lambda\in\Phi_1$. Аналогично, кратность $M(\mu)$ в $P_n(\mathfrak{B}_2)$ не превосходит кратности $M(\mu)$ в $P_n(\mathfrak{B})$, $\mu\in\Phi_2$. Отсюда $P_n(\mathfrak{B})\cong\sum_{\gamma\in\Phi_1\cup\Phi_2}c(\gamma)\,M(\gamma)\oplus(\bar{T}_1\cap\bar{T}_2\cap P_n(\mathfrak{B}))$, где $c(\gamma)=a(\gamma)$ для $\gamma\in\Phi_1\setminus\Phi_2$, $c(\gamma)=b(\gamma)$, для $\gamma\in\Phi_2\setminus\Phi_1$ и $c(\gamma)=\max(a(\gamma), b(\gamma))$, для $\gamma\in\Phi_1\cap\Phi_2$, а $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ — гомоморфные образы T-идеалов T_1, T_2 в фактор-алгебре $K\langle X\rangle/T$. Из этого изоморфизма выводим, что $c_n(\mathfrak{B})\leqq c_n(\mathfrak{B}_1)+c_n(\mathfrak{B}_2)+\dim\ (\overline{T}_1\cap\overline{T}_2\cap P_n(\mathfrak{B}))$.

Пусть $f\in F(\mathfrak{B})$ — ненулевой многочлен. Обозначим через $\mathfrak{B}(f)$, $\mathfrak{B}_1(f)$, $\mathfrak{B}_2(f)$, соответственно, подмногообразия $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, определенные тождеством $f=0$.

Лемма 4.1. *В зависимости от полинома f выполняется одно из следующих условий*:

а) *Если* $f\in T_1\cap T_2$, *то* $c_n(\mathfrak{B}(f))\leqq c_n(\mathfrak{B}_1)+c_n(\mathfrak{B}_2)+\dim\ (\overline{T}_1\cap\overline{T}_2\cap P_n(\mathfrak{B}(f)))$.

б) *Если* $f\notin T_1$ *и* $f\in T_2$ *(аналогично* $f\in T_1$ *и* $f\notin T_2$*), то* $c_n(\mathfrak{B}(f))\leqq c_n(\mathfrak{B}_1(f))+c_n(\mathfrak{B}_2)+\dim\ (\overline{T}_1\cap\overline{T}_2\cap P_n(\mathfrak{B}(f)))$.

в) *Если* $f\notin T_1$ и $f\notin T_2$, *то выполняется неравенство* $c_n(\mathfrak{B}(f))\leqq c_n(\mathfrak{B}_1(f))+c_n(\mathfrak{B}_2(f))+\dim\ (\overline{T}_1\cap\overline{T}_2\cap P_n(\mathfrak{B}(f)))$.

Доказательство. а) Известно, что T — идеалы замкнуты относительно релации „следование", т. е., если $f\in T_1$ и T_2, то из f нельзя получить следствий, которые вне T_1 и T_2. Так что в данном случае кратности неприводимых модулей, которые участвуют в $P_n(\mathfrak{B}_1)$ и $P_n(\mathfrak{B}_2)$, сохраняются в $P_n(\mathfrak{B}(f))$.

Случаи б) и в) доказываются аналогично.

Замечание 4.2. Отметим, что когда T, T_1, T_2 определяются своими собственными тождествами, то мы можем найти модульное строение $P_n(\mathfrak{B})\cap\overline{T}_1\cap\overline{T}_2$, если нам известно разложение $\Gamma_k(\mathfrak{B})\cap\overline{T}_1\cap\overline{T}_2$, потому что $P_n(\mathfrak{B})\cap\overline{T}_1\cap\overline{T}_2\cong\Sigma_{k=0}^{n}\ \{[(\Gamma_k(\mathfrak{B})\cap\overline{T}_1\cap\overline{T}_2)\otimes M(n-k)]\uparrow S_n\}$.

5. Подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}_2$, определенного тождеством $[x, y]^2=0$. Если обозначим через T_1 и T_2 T-идеалы, порожденные тождествами $[x, y]\ [z, t]=0$ и $[x, y, z]=0$, соответственно, то T-идеал $T=T(\mathfrak{M}_2)$ содержится в $T_1\cap T_2$. Обозначим еще через $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ гомоморфные образы T_1 и T_2 в $F(\mathfrak{M}_2)$.

Отметим известные оценки [11, 13] — $c_n(\mathfrak{A})=2^{n-1}\ (n-1)+1-\binom{n}{2}<2^{n-1}(n-1)$, $n\geqq 2$ и $c_n(\mathfrak{C})=2^{n-1}$, где $\mathfrak{C}$ — многообразие, определенное тождеством $[x, y, z]=0$.

Лемма 5.1. Положим $A(n)=60\,n^2+80\,n^3+35\,n^4+4n^5$. *Тогда*

$$\dim(\overline{T}_1\cap\overline{T}_2\cap P_n(\mathfrak{M}_2))\leqq A(n). \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку нам известны [5] порождающие неприводимых модулей, которые участвуют в $B(\mathfrak{M}_2)$, то нетрудно убедиться, что те из них, которые отвечают разбиениям $(2, 1^2)$ и $(2, 1^3)$, лежат в $\overline{T}_1\cap\overline{T}_2$. Имея ввиду замечание 4.2 и правило Литтлвуда — Ричардсона, мы получаем $\overline{T}_1\cap\overline{T}_2\cap P_n\ (\mathfrak{M}_2)\cong M(n-2, 1^2)\oplus M(n-3, 2, 1)\oplus 2\,M(n-3, 1^3)\oplus 2M(n-4, 2, 1^2)\oplus M(n-4, 1^4)\oplus M(n-5, 2, 1^3)$.

Используя формулу (6) для размерности $M(\lambda)$, выводим оценку из леммы.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathfrak{M}_2$ — многообразие, определенное тождеством* $[x, y]^2=0$. *Пусть $f\in F(\mathfrak{M}_2)$ — ненулевой многочлен степени m. Тогда для коразмерностей подмногообразия $\mathfrak{M}_2(f)$, определенного тождеством $f=0$, выполняется одно из следующих неравенств*:

1) $c_n(\mathfrak{M}_2(f))\leqq n\,2^{n-1}+A(n)$, $n\geqq m$, *если* $f\in T_1\cap T_2$.

2) $c_n(\mathfrak{M}_2(f))\leqq(m-1)\ (3m-2)\ n^m+3(m-1)^2\ n^{m-1}+2^{n-1}+A(n)$, $n\geqq 3m+1$, *если* $f\notin T_1$ и $f\in T_2$.

3) $c_n(\mathfrak{M}_2(f))\leqq 2^{n-1}\ (n-1)+(m+1)\ (n-1)^m+A(n)$, $n\geqq m$, *если* $f\in T_1$ *и* $f\notin T_2$.

4) $c_n(\mathfrak{M}_2(f))=0$, $n>2m+1$, *если* $f=x^m$.

5) $c_n(\mathfrak{M}_2(f))\leqq(m-2)\ (3m-5)\ n^{m-1}+3\ (m-2)\ n^{m-2}+4\ (n-1)^3+A(n)$, $n\geqq 3\,m+1$, *если* $f\notin T_1$, $f\notin T_2$ *и* $f\neq x^m$. *Здесь $A(n)$ полином пятой степени, определенный в* (20).

Доказательство. 1) Неравенство следует из леммы 4.1, случай а) и из уже полученных оценок.

2) В этом случае, по теореме 3.14, из f непременно следует тождество вида g_1 или g_2 и снова по лемме 4.1, случай б), мы получаем желанную оценку.

3) В этом случае из f следует $x^{m-k}\, S_k(x_1, \ldots, x_k)$ для некоторого k между 0 и m. Тогда известно [2], что $P_n(\mathfrak{C}(f)) \subset \Sigma_{t=0}^{k-2}\ M(n-t, 1^t)$. Имея в виду, что $\dim M(n-t, 1^t) = \binom{n-1}{t}$, мы получаем оценку для $c_n(\mathfrak{M}_2(f))$.

4) Оценка класса нильпотентности получается из конкретной формы порождающих неприводимых подмодулей в $P_n(\mathfrak{M}_2)$.

5) Имея ввиду конкретную форму порождающих неприводимых подмодулей в $P_n(\mathfrak{M}_2)$, которые лежат вне $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$, можем убедиться, что из f следует $f_{m-2}(S_2)$. Тогда мы получаем оценку из теоремы 3.14 и леммы 4.1.

6. Подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}_3$, определенного тождеством $[[x, y], [z, t]] = 0$. Пусть $T = T(\mathfrak{M}_3)$, а T_1, T_2, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ те же самые как в п. 5.

Лемма 6.1. *Пусть* $B(n) = 6n^2 + 4n^3 + n^4$. *Тогда выполняется неравенство* $\dim(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap P_n(\mathfrak{M}_3)) < B(n)$, *где* $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ — *гомоморфные образы* T_1 и T_2 *в* $F(\mathfrak{M}_3)$.

Доказательство. Как и в лемме 5.1, из [5] следует, что GL_s — модуль $B_s(\mathfrak{M}_3) \cap \overline{T}_1 \cap \overline{T}_2$ изоморфен $N_2(2^2)$. Отсюда, используя замечание 4.2 и правило Литтлвуда — Ричардсона, выводим, что $\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap P_n(\mathfrak{M}_3) \cong M(n-2, 2) \oplus M(n-3, 2, 1) \oplus M(n-4, 2^2)$. Вычисляем размерности этих модулей по формуле (6) и получаем оценку для $\dim(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap P_n(\mathfrak{M}_3))$.

Теорема 6. 2. *Пусть* $\mathfrak{M}_3$ — *многообразие, определенное тождеством* $[[x, y], [z, t]] = 0$, *и* f — *ненулевой многочлен степени* m *из* $F(\mathfrak{M}_3)$. *Тогда для коразмерностей подмногообразия* $\mathfrak{M}_3(f)$, *определенного тождеством* $f = 0$, *справедлива оценка*:

1) $c_n(\mathfrak{M}_3(f)) \leq 2^{n-1}\, n + B(n)$, $n \geq m$, *если* $f \in T_1$ и $f \in T_2$.

2) $c_n(\mathfrak{M}_3(f)) \leq (m-1)(3m-2)\ n^m + 3\ (m-1)^2\ n^{m-1} + 2^{n-1} + B(n)$, $n \geq 3m+1$, *если* $f \notin T_1$ и $f \in T_2$.

3) $c_n(\mathfrak{M}_3(f)) \leq 2^{n-1}(n-1) + (m+1)(n-1)^m + B(n)$, $n \geq m$, *если* $f \in T_1$ *и* $f \notin T_2$.

4) $c_n(\mathfrak{M}_3(f)) = 0$, *для* $n \geq 4m+2$, *если* $f = x^m$.

5) $c_n(\mathfrak{M}_3(f)) \leq (m-2)(3m-5)\ n^{m-1} + 3(m-2)^2\ n^{m-2} + 4(n-1)^3 + B(n)$, $n \geq 3m+1$.

Здесь $B(n)$ *полином четвертой степени, определенной в лемме 6. 1.*

Доказательство теоремы получается аналогично доказательству теоремы 5.2.

7. Подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}_1$, определенного тождеством $[x, y, x, x] = 0$. Обозначим через T_1, T_2 T-идеалы, определенные в п. 6. Из [5] следует, что в разложении $B_s(\mathfrak{M}_1) \cap \overline{T}_2$ в сумму неприводимых GL_s-подмодулей участвуют те, которые изоморфны $N_s(2, 1)$, $N_s(2^2)$, $N_s(2, 1^2)$, $N_s(2, 1^3)$ (их порождающие следуют как тождества из $[x, y, z] = 0$).

Из замечания 4.2 и правила Литтлвуда — Ричардсона получаем

$$P_n(\mathfrak{M}_1) \cap \overline{T}_2 \cong M(n-1, 1) \oplus 2M(n-2, 2) \oplus 2M(n-2, 1^2) \oplus 3M(3, 2, 1)$$
$$\oplus M(n-4, 2^2) \oplus 2M(n-3, 1^3) \oplus 2M(n-4, 2, 1^2) \oplus M(n-4, 1^4) \oplus M(n-5, 2, 1^3).$$

Перечисляем размерности этих модулей и получаем доказательство следующей леммы.

Лемма 7.1. *Если обозначим через* $C(n) = 120\ n + 240\ n^2 + 160\ n^3 + 45\ n^4 + 4\ n^5$, *то* $\dim(P_n(\mathfrak{M}_1) \cap \overline{T}_2) \leq C(n)$.

Теорема 7.2. *Пусть* $\mathfrak{M}_1$ — *многообразие, определенное тождеством* $[x, y, x, x] = 0$. *Пусть* f — *ненулевой многочлен степени* m *из* $F(\mathfrak{M}_1)$. *Тогда для кораз-*

мерностей подмногообразия $\mathfrak{M}_1(f)$, *определенного тождеством* $f=0$, *выполняется одна из следующих оценок*:

1) $c_n(\mathfrak{M}_1(f))\leqq 2^{n-1}+C(n)$, $n\geqq m$, *если* $f\in T_2$.

2) $c_n(\mathfrak{M}_1(f))\leqq(m+1)(n-1)^m+C(n)$, $n\geqq m$, *если* $f\notin T_2$.

3) $c_n(\mathfrak{M}_1(f))=0$, *если* $f=x^m$ *для* $n\geqq 2m$.

Доказательство проводится как и доказательство теоремы 5.2.

8. Подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}_4$, определенного тождеством $S_4(x, y, z, t)=0$. Как известно, тождество $S_4=0$ удовлетворяется матричной алгеброй M_2. Если обозначим через $\mathfrak{C}$ многообразие $\operatorname{var} M_2$, то из [4] и [7] известно, что $\Gamma_4(\mathfrak{M}_4)=\Gamma_4(\mathfrak{L})$, $\Gamma_5(\mathfrak{M}_4)=\Gamma_5(\mathfrak{L})\oplus M\ (3, 2)$, $\Gamma_6(\mathfrak{M}_4)=\Gamma_6\ (\mathfrak{C})\oplus M(3^2)$, $\Gamma_n(\mathfrak{M}_4)=\Gamma_n(\mathfrak{C})$, $n>6$, $c_n(\mathfrak{M}_4)=c_n(\mathfrak{C})+5\binom{n}{5}+5\binom{n}{6}$. Из [15] знаем, что $c_n(M_2)=\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}-\binom{n}{3}+1-2^n$.

Пусть $f\in F(\mathfrak{M}_4)$ — ненулевой многочлен степени m.

1) Если $f\in T(\mathfrak{C})$, то все следствия из f находятся в $T(\mathfrak{C})$ и $c_n(\mathfrak{C})\leqq c_n(\mathfrak{M}_4(f))\leqq c_n(\mathfrak{C})+5\binom{n}{5}+5\binom{n}{6}$, где $\mathfrak{M}_4(f)$ — подмногообразие $\mathfrak{M}_4$, порожденное $f=0$.

2) Если $f\notin T(\mathfrak{C})$, то, как известно [12], из f следует многочлен f_1 степени $<4m$, принадлежащий $\Gamma_{4m}(\mathfrak{C})$. Из собственного тождества $f_1=0$ следует $[x_1, x_2]\ldots.[x_{2k-1}, x_{2k}]=0$, где $k=8m-8$, [9]. Из [4] видно, что порождающие неприводимых подмодулей $M(p+q+r, p+q, p)$ аннулируются, если $p+q>8m-8$. Следовательно, в $F(\mathfrak{M}_4(f_1))$ ненулевые только те модули, у которых вторая, а отсюда и третья строка имеет длину, не превосходящую $8m-8$. Из этих рассуждений следует, что число неприводимых модулей в $\Gamma_4(\mathfrak{M}_4(f))$ ограниченное. Тогда для коразмерностей $\Gamma_n(\mathfrak{M}_4(f_1))$ получаем

$$\gamma_n(\mathfrak{M}_4(f_1))=\sum_{p=0}^{8m-8}\sum_{q=r}^{8m-8-p}\frac{n!\,(n-3p-q+1)\,(n-3p+2)\,(q+1)}{(p+q+n-3p-q+2)!\,(p+q+1)!\,p!}$$

$$\leqq\sum_{p=0}^{8m-8}\sum_{q=1}^{8m-8-p}(4m-4)\,n^{16m-16}<128\,(m-1)^3\,n^{16(m-1)},\ n\geqq 24\,(m-1).$$

Используя, что $c_n(\mathfrak{M}_4(f_1))=\Sigma_{s=0}^n\binom{n}{s}\gamma_s(\mathfrak{M}_4(f_1))$, [11], мы получаем следующие оценки коразмерностей подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}_4$.

Теорема 8.1. *Пусть* $\mathfrak{M}_4$ *— многообразие, определенное тождеством* $S_4(x, y, z, t)=0$. *Пусть* $f\in F(\mathfrak{M}_4)$ *— ненулевой многочлен степени* m. *Тогда для коразмерностей подмногообразия* $\mathfrak{M}_4(f)$, *определенного тождеством* $f=0$, *выполняется одно из следующих неравенств*:

1) $c_n(\mathfrak{M}_4(f))\leqq c_n(\mathfrak{B})+5\binom{n}{5}+5\binom{n}{6}$, $n>6$, *если* $f\in T(\mathfrak{B})$.

2) $c_n(\mathfrak{M}_4(f))<128\,(m-1)^3\,n^{16(m-1)}\,2^n$, $n>24\,(m-1)$, *если* $f\in T(\mathfrak{B})$.

Автор выражает свою искреннюю благодарность В. С. Дренскому за постановку задач и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. М, 1947, гл. VI.
2. Л. А. Владимирова, В. С. Дренски. Многообразия ассоциативных алгебр с тождеством третьей степени. *Плиска*, 8, 1986, 144 — 157.

3. Г. Джеймс. Теория представлений симметрических групп М., 1982.
4. В. С. Дренски. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр. *Мат. сб.*, 115, 1981, 98—115.
5. В. С. Дренски. О решетках многообразий ассоциативных алгебр. *Сердика*, 8, 1982, 20—31.
6. А. Р. Кемер. Многообразия конечного ранга. (XV всесоюзная алгебр. конф., Тезисы докладов, т. 2) Красноярск, 1979, 73.
7. А. Р. Кемер. Идеал тождеств, порожденный стандартным тождеством четвертой степени. (XVII всесоюзная алгебр. конф., Тезисы сообщений, т. 1) Минск, 1983, 89—90.
8. Ч. Кэртис, И. Райнер. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969.
9. Ю. П. Размыслов. О радикале Джекобсона в *PI*-алгебрах. *Алгебра и логика*, 13, № 3, 1974, 337—360.
10. П. Ж. Чирипов, П. Н. Сидеров. О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр. *Плиска*, 2, 1981, 103—115.
11. V. Drensky. Codimensions of *T*-ideals and Hillbert series of relatively free algebras. *J. Algebra*, 91, 1984, No 1, 1—17.
12. V. Drensky. *T*-ideals containing all matrix polynomial identities. *Commun. in Algebra*, 13, 1985, 2037—2072.
13. D. Krakowsky, A. Regev. The polynomial identities of the Grassman algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181, 1973, 429—438.
14. M. Nagata. On the nilpotency of nil algebras. *J. Math. Soc. Japan.*, 4, 1952, 296—301.
15. C. Procesi. Computing with 2×2 matrices. *J. Algebra*, 87, No 2, 1984, 342—359.
16. W. Specht. Gesetze in Ringen. *I. Math. Z.*, 52, 1950, 557—589.

ж.к. Младост, бл. 36, вх. 10/75
София Болгария

Поступила 14. 10. 1986