Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

И. Д. ЧЕРКАСОВ

1. Вспомогательные обозначения и определения. Пусть R, R_+ есть множество действительных чисел и его неотрицательная часть, соответственно, $z=(s,t)\in R_+^2$, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ — фиксированное полное вероятностное пространство, $\mathscr{F}=(\mathscr{F}_z,\ z\geqq 0)$ — поток σ-алгебр, содержащихся в $\mathscr{A}$, $\mathscr{F}_z^1=\mathscr{F}_s^1=V_t\ \mathscr{F}_{st}$, $\mathscr{F}_z^2=\mathscr{F}_t^2=V_s\mathscr{F}_{st}$, $\mathscr{F}^1=(\mathscr{F}_s^1$ $s\geqq 0)$, $\mathscr{F}^2=(\mathscr{F}_t^2,\ t\geqq 0)$. Считаем выполненным условие $(F.\ 4)$, заключающееся в том что при каждом $z\in R_+^2$ имеем условную независимость σ-алгебр $\mathscr{F}_s^1$ и $\mathscr{F}_t^2$ относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_z$ (все обозначения и определения, приведенные в [1,2], в данной работе применяются без изменения). Отметим здесь еще, что согласно предложению 2.4 из [2], если $\mathscr{F}$ обладает свойством $(F.4)$, то случайное поле $X=\{x(z), \mathscr{F}_z,\ z\in R_+^2\}$ является марковским тогда и только тогда, когда оно является 1- и 2-марковским.

Пусть $C(p,q,r)$ $(\widehat{C}(p,q,r))$ есть пространство действительных функций $f(s,t,x)$ определенных на $R_+^2\times R$ и обладающих непрерывными производными $\partial_1^i f$, $\partial_2^j f$, ∂_3^k' (соответственно $\partial_1^i\partial_2^j\partial_3^k f$) при каждых i, j, k, удовлетворяющих неравенствам $0\leqq i\leqq p$, $0\leqq j\leqq q$, $0\leqq k\leqq r$. Аналогично определяются пространства $C(p,q)$ (и $\widehat{C}(p,q)$) действительных функций на R_+^2. Обозначим через $w=\{w(z),\ z\geqq 0\}$ винеровское поле, согласованное с потоком $\mathscr{F}$ и для заданной непрерывной положительной функции $G(z)$ введем гауссовский сильный непрерывный мартингал $m(z)$, положив

$$R(z)=R_z=\{(u,v):\ 0\leqq u\leqq s,\quad 0\leqq v\leqq t\},$$

$$m(z)=\int_{R(z)} G(z')w(dz').$$

При этом $m=\{m(z),\ z\geqq 0\}$ является непрерывным квадратически интегрируемым мартингалом (НКИМ), согласованным с потоком $\mathscr{F}$, а его квадратическая характеристика $\beta(z)$ имеет вид

$$\beta(z)=\int_{R(z)} G^2(z')\,dz',\quad z'=(s',\ t'),\ w(dz)=w(ds,\ dt).$$

Здесь и в дальнейшем мы обозначаем через ∂_1, ∂_2, ∂_3 операторы дифференцирования по s, t, x соответственно, т. е.

$$\partial_1=\partial/\partial s,\quad \partial_2=\partial/\partial t,\quad \partial_3=\partial/\partial x.$$

НКИМ $J(z)$, согласованный с $\mathscr{F}$, и пространства L_2 и $\widetilde{L}_2$ имеют такой же смысл, как и в [2], в частности $(w_z=w(z))$,

$$J(z)=J_z=\int_{R^2(z)} I(a<u,\ b<v)\,G(a,v)\,G(u,b)\,dw_{a,v}dw_{u,b}.$$

Укажем также, что определения мартингалов различного типа, а также условие $(F.4)$ имеются в [3] и в других работах.

Пусть по обозначению x_0 — фиксированное действительное число,

$$C \in \widehat{C}(1, 1), 0<g \in C(1, 1, 3) \cap C(1, 1, 1); \quad k=1, 2,$$

(1)
$$f_k = g\,[0{,}5\,(\partial_k\beta)\,\partial_3 g - \int_{x_0}^{x} (\partial_k g^{-1})\,dy + \partial_k C],$$
$$l_k = l_k(f_k, g, \beta) = \partial_k + f_k\partial_3 + 0{,}5\,g^2(\partial_k\beta)\,\partial_3^2,$$
$$t_1 = s, \quad t_2 = t, \quad z_{(1)} = (0, t_2), \quad z_{(2)} = (t_1, 0),$$
$$(d_1 z) = (dt_1, t_2), \quad (d_2 z) = (t_1, dt_2), \quad v_{(1)} = (0, v), \quad v_{(2)} = (v, 0);$$

$x_k(t_{3-k})$ — действительные непрерывные функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (при $k=1{,}2$)

(2)
$$\partial_{3-k}x_k(t_{3-k}) = f_{3-k}(z_{(k)}, x_k(t_{3-k})), \quad x_k(0) = x_0.$$

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений с краевыми условиями (где $d\xi(z) = d_1 d_2\xi(z) = d_2 d_1\xi(z)$):

(3)
$$d_k\,\xi(z) = f_k(z, \xi(z))\,dt_k + g(z, \xi(z))\,m(d_k z),$$
$$\xi(z_{(k)}) = x_k(t_{3-k}), \quad k=1, 2, \quad \xi(0) = x_0,$$
$$d\xi(z) = [l_1(f_1, g, \beta)\,f_2(z, \xi(z))]\,dz + g(z, \xi(z))\,m(dz)$$
$$+ \sum_{1\leq k\leq 2} [l_k(f_k, g, \beta)\,g(z, \xi(z))]\,m(d_{3-k}z)\,dt_k + g(z, \xi(z))\,\partial_3 g(z, \xi(z))\,J(dz).$$

Условие (C) для действительной функции $f(z, x)$, определенной на $R_+^2 \times R$, означает что для любого натурального числа n существует постоянная $K_n \in R_+$, такая, что для каждой точки $(t_1, t_2) \in R_{nn}$ выполняются неравенства

$$|f(z, x) - f(z, x')| \leq K_n|x - x'|, \quad f^2(z, x) \leq K_n(1 + x^2), \quad x \in R.$$

Если второе из этих неравенств не содержит в правой части множитель $(1+x^2)$, то получается так называемое условие (C'). В [2] доказано (теорема 3.2), что, если $g \in C(1, 1, 3) \cap \widehat{C}(1, 1, 1) \equiv \widehat{C}$, $C \in \widehat{C}(1, 1)$, а функции $\partial_k f_r$, $\partial_k g (k, r = 1, 2)$ удовлетворяют условию (C'), то существует и единственно непрерывное $\mathscr{F}$-марковское решение $\xi = \{\xi(z), \mathscr{F}_z, z \geq 0\}$ системы (3), которое называется (x_0, g, C, m)-диффузионным двунаправленным марковским случайным полем. Если же $l_1 f_2$, g, $l_k g$ $(k=1, 2)$, $g\partial_3 g$ удовлетворяют условию (C), то последнее стохастическое дифференциальное уравнение в (3), эквивалентное интегральному уравнению (предложение 3.1 в [2])

(4)
$$\xi(z) = x_1(t) + x_2(s) - x_0 + \int_{R_z} [l_1 f_2(z', \xi(z'))]\,dz'$$
$$+ \int_{R_z} \{g(z', \xi(z'))m(dz') + [g\partial_3 g(z', \xi(z'))]\,J(dz')$$
$$+ \sum_{1\leq k\leq 2} [l_k g(z', \xi(z'))]\,m(d_{3-k}z')\,dt_k\},$$

обладает единственным непрерывным в среднем квадратическом смысле решением $\xi(z)$. В дальнейшем будем считать, что (x_0, g, C, m) — диффузионное поле, которое существует и единствено и принимает значения в R.

2. Общее условие эквивалентности двух диффузионных полей на плоскости. Кроме описанного в 1, пусть задано другое (x_0', g', C', m) — диффузионное двунаправленное $\mathscr{F}$-марковское случайное поле $\xi'(z)$ со значениями в R, являющееся непрерывным решением системы (3′), получающейся из (3) заменой f_k, g, x_k, l_k, x_0 новыми данными функциями f_k', $g'>0$, $g'\in C(1, 1, 3)\cap\widehat{C}(1, 1, 1)$, x_k', операторами l_k' и константой x_0', соответственно. При этом f_k' получаются из g' и $C'\in\widehat{C}(1,1)$ по формуле (1) так же, как f_k получены из g и C, а $l_k'=l_k(f_k', g', \beta)$ и функции x_k' удовлетворяют системе (2′), получающейся из (2) заменой x_0, f_{3-k} на x_0', f_{3-k}', $k=1, 2$, соответственно.

Определение 1. *Если существует функция* $\psi_1=\psi_1(z, x)$, *такая, что* $\partial_3\psi_1\in\widehat{C}$, *для которой* $\xi'(z)=\psi_1(z, \xi(z))$, *то диффузионные поля* ξ и $\xi'=\{\xi'(z), \mathscr{F}(z), z\geqq 0\}$ *называются эквивалентными (при этом в любой точке* z *должна существовать обратная к* ψ_1 *функция* $\psi_2(z, x)$, *такая, что* $\psi_1(z, \psi_2(z, x))=x=\psi_2(z, \psi_1(z, x))$.

Задача заключается в том, чтобы получить необходимое и достаточное условие эквивалентности диффузионных полей, а также в некоторых частных случаях вывести формулы для нахождения функций C' ψ_1 и ψ_2. Эта последняя задача в данной работе рассматривается применительно к тому случаю, когда $\xi'(z)$ является мартингалом.

Лемма. *Для того, чтобы диффузионные поля* ξ *и* ξ' *были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение* $\psi_1\in\widehat{C}$ *системы дифференциальных уравнений*

$$
\begin{gathered}
l_k(f_k, g, \beta)\,\psi_1(z, x)=f_k'(z, \psi_1(z, x)),\\
g(z, x)\,\partial_3\psi_1(z, x)=g'(z, \psi_1(z, x)),\quad \psi_1(0, x_0)=x_0',\\
\psi_1(z_{(k)}, x_k(t_{3-k}))=x_k'(t_{3-k}),\quad k=1, 2,\quad \psi_1(z, R)=R.
\end{gathered}\tag{5}
$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\xi\sim\xi'$. Рассмотрим случайное поле $\bar{\xi}=\{\bar{\xi}(z)=\psi_1(z, \xi(z)), \mathscr{F}_z, z\geqq 0\}$ и вычислим его частные стохастические дифференциалы по s и по t (при фиксированном t и s соответственно), учитывая, что ξ является решением системы (3). По формуле Ито (при $k=1, 2$)

$$
d_k\bar{\xi}(z)=l_k\psi_1(z, \xi(z))\,dt_k+g\partial_3\psi_1(z, \xi(z))m(d_kz).\tag{6}
$$

Из $\xi\sim\xi'$ следует, что $\bar{\xi}(z)=\xi'(z)$ и левая часть (6) есть $d_k\xi'(z)$, $k=1,2$. Значит, коэффициенты правой части равенства (6) равны соответствующим коэффициентам стохастических дифференциальных уравнений для $\xi'(z)$ и необходимость дифференциальных уравнений в (5) доказана. Необходимость краевых и начального условий для ψ_1 в (5) очевидна.

Достаточность. Напишем все соотношения, определяющие диффузионное поле $\xi'(z)$: $k=1, 2$, $\xi'(0)=x_0'$,

$$
\begin{gathered}
f_k'(z, x)=g'(z, x)\,\{0{,}5\,[\partial_k\beta(z)]\,\partial_3 g'(z, x)+\partial_k C'(z)\\
-\int\limits_{[x_0', x]}[\partial_k g'^{-1}(z, y)]\,dy\},\quad x_k'(t_{3-k})=x_0'+\int\limits_{[0, t_{3-k}]} f_{3-k}'(v_{(k)}, x_k'(v))\,dv,
\end{gathered}\tag{7}
$$

$$
\begin{gathered}
d_k\xi'(z)=f_k'(z, \xi'(z))\,dt_k+g'(z, \xi'(z))\,m(d_kz),\quad \xi'(z_{(k)})=x_k'(t_{3-k}),\\
d\,\xi'(z)=\sum_{1\leq k\leq 2}[l_k(f_k', g', \beta)g'(z, \xi'(z))]
\end{gathered}
$$

(8)
$$\times m(d_{3-k}z)\,dt_k+[l_2(f_2',\ g',\ \beta)\,f_1'(z,\ \xi'(z))]\,dz+g'(z,\ \xi'(z))$$
$$\times m(dz)+[\,g'(z,\ \xi'(z))\,\partial_3 g'(z,\ \xi'(z))]\ J(dz).$$

Пусть $\psi_1(z,\ x)$ — решение системы (5), $\psi_1 \in \widehat{C}$. Тогда из $\partial_3\psi_1=g'/g>0$ следует существование обратной функции $\psi_2(z,\ x)$. Кроме того, случайное поле $\overline{\xi}$, удовлетворяя уравнениям (6), в силу всех уравнений в (5) является непрерывным решением системы стохастических дифференциальных уравнений

(9)
$$d_k\overline{\xi}(z)=f_k'(z,\ \overline{\xi}(z))\,dt_k+g'(z,\ \overline{\xi}(z))\,m\,(d_k z),$$
$$\overline{\xi}(z_{(k)})=x_k'(t_{3-k}),\quad k=1,2.$$

В предложении 2.3 [2] доказано, что при всех условиях, сформулированных в начале данного параграфа, всякое непрерывное решение $\overline{\xi}(z)$ системы (9), согласованное с потоком $\mathscr{F}$, является решением уравнения (8) (при тех же краевых условиях). Но $\xi'(z)$ также удовлетворяет уравнению (8) при тех же краевых условиях. В силу единственности решения (предложение 3.1 из [2]) мы можем заключить, что $\overline{\xi}(z)=\xi'(z)$ и лемма доказана.

3. Преобразование диффузионного поля в гауссовский мартингал. При условиях (1), (2), учитывая выше введенные обозначения, рассмотрим задачу о преобразовании диффузионного поля ξ, определяемого уравнениями (3), в сильный гауссовский НКИМ. Точнее говоря, при учете доказанной леммы требуется найти такую функцию $\psi_1 \in \widehat{C}$, чтобы выполнялись условия

(10)
$$g\partial_3\psi_1=g'=\mathrm{const}\in(0,\ \infty),\quad l_k\psi_1=f_k',$$
$$\psi_1(z_{(k)},\ \ x_k(t_{3-k}))=x_k'(t_{3-k}),\quad k=1,2.$$

Теорема 1. *Пусть диффузионное поле ξ', являясь НКИМ, определяется уравнениями*

(11)
$$d_k\,\xi'(z)=[g'\partial_k c_k(t_k)]\ dt_k+g'm\,(d_k z),$$
$$\xi'(z_{(k)})=x_0'+g'\,[c_{3-k}(t_{3-k})-c_{3-k}(0)],$$
$$k=1,2,\qquad d\xi'(z)=g'm\,(dz),$$

вытекающими из (7), (8) при $g'=\mathrm{const}>0$, $C'(z)=c_1(t_1)+c_2(t_2)$, причем x_0', g' — заданные постоянные, а $c_k(t_k)$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции при $t_k\in R_+$, $x_0'\in R$. Для того чтобы поле ξ, определяемое системой (3), было эквивалентно полю ξ' необходимы и достаточны условия

(12)
$$\int\limits_{[x_0,\ x_k(t_{3-k})]}[g(z_{(k)},\ y)]^{-1}\ dy=C\,(z_{(k)})-C(0,0),\quad k=1,2,$$
$$\int\limits_{x_0}^{\pm\infty}[g(z,\ y)]^{-1}\,dy=\pm\infty.$$

Доказательство. Необходимость. Если $\xi\sim\xi'$, то по доказанной лемме на основании (11) выполнены условия (10), а точнее говоря, для некоторой функции $\psi_1\in\widehat{C}$ имеем, исключив f_k с помощью равенств (1):

$$\partial_k\psi_1 = g'\{\partial_k c_k(t_k) + \int_{x_0}^{\bar{x}} \{\partial_k[g^{-1}(z, y)]\}\, dy - \partial_k C(z), \tag{13}$$
$$k=1, 2, \quad \partial_3\psi_1 = g'/g.$$

Легко убедиться, что для системы трех уравнений (13) выполнено условие совместности $\partial_{kr}\psi_1 = \partial_{rk}\psi_1$, $k, r = 1, 2, 3$. А это означает, что функция $\psi_1(z, x)$ может быть записана в виде криволинейного интеграла по кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки $(0, 0, x_0)$ и (s, t, x):

$$\psi_1(z, x) = x_0' + g' \int_{(0,0,x_0)}^{(s,t,x)} \{[\partial_u c_1(u) + \int_{x_0}^{\bar{x}} \partial_u g^{-1}(u, v, y) dy \tag{14}$$
$$- \partial_u C(u, v)]\, du + [\partial_v c_2(v) + \int_{x_0}^{\bar{x}} \partial_v g^{-1}(u, v, y)\, dy - \partial_v C(u, v)]\, dv + [g(u, v, \bar{x})]^{-1}\, d\bar{x}\}.$$

Возьмем в качестве контура интегрирования ломанную, состоящую из трех отрезков прямых, параллельных осям координат:

1) $(0, 0, x_0) \leqq (u, 0, x_0) \leqq (s, 0, x_0)$;
2) $(s, 0, x_0) \leqq (s, v, x_0) \leqq (s, t, x_0)$;
3) $(s, t, x_0) \leqq (s, t, \bar{x}) \leqq (s, t, x)$.

В результате этого функция ψ_1 примет следующий вид:

$$\psi_1(s, t, x) = x_0' + g'\{c_1(s) - c_1(0) + c_2(t) - c_2(0) + C(0, 0) - C(s, t) + \int_{x_0}^{x} [g(s, t, y)]^{-1} dy\}. \tag{15}$$

Из (11) следует, что $\xi'(z) = g'[m(z) + c_1(s) + c_2(t) - c_1(0) - c_2(0)]$, а в силу эквивалентности $\psi_1(z, \xi(z)) = \xi'(z)$, т. е. мы можем записать граничные условия: $k=1, 2$,

$$\psi_1(z_{(k)}, x_k(t_{3-k})) = x_0' + g'[c_{3-k}(t_{3-k}) - c_{3-k}(0)].$$

Отсюда на основании (15) при $k=1$ получаем первое условие в (12), при $k=2$ — второе условие. Последнее равенство в (12) вытекает из $\psi_1(z, \pm\infty) = \pm\infty$ (ведь $m(z)$ — гауссовский мартингал, который принимает значения в R).

Достаточность. Пусть для поля ξ выполнены условия (12), а поле ξ' задано уравнениями (11). Возьмем функцию ψ_1 вида (15) и отметим, что $\psi_1 \in \hat{C}$. Если ввести обозначение

$$x_k'(t_{3-k}) = x_0' + g'[c_{3-k}(t_{3-k}) - c_{3-k}(0)], \quad k=1, 2,$$

то все соотношения (5), кроме первых двух, выполнены с очевидностью. Чтобы проверить первые два соотношения в (5), вычислим производные функции ψ_1 ($k=1,2$) и выражение $l_k\psi_1$:

$$\partial_k\psi_1 = g'\{\partial_k c_k(t_k) - \partial_k C(z) + \int_{x_0}^{x} \partial_k[g(z, y)]^{-1}\, dy\},$$
$$\partial_3\psi_1 = g'/g(z, x), \quad \partial_3^2\psi_1(z, x) = g'\partial_3(g^{-1}), \tag{16}$$
$$l_k\psi_1 = g'\{\partial_k c_k - \partial_k C + \int_{x_0}^{x} (\partial_k g^{-1})\, dy + f_k g^{-1}$$
$$+ g^2(\partial_k\beta)\, \partial_3(2g)^{-1}\} = g'\partial_k c_k, \text{ т. е. } l_k\psi_1 = f_k', \quad k=1, 2.$$

Таким образом, на основании леммы считаем теорему 1 доказанной.

Следствие. *Для того, чтобы диффузионное поле ξ было эквивалентно некоторому НКИМ, необходимы и достаточны условия (12). При выполнении (12) в качестве ξ' можно взять $m(z)$, а преобразующую функцию можно взять в виде*

$$\psi_1(z,\ x)=C(0)-C(z)+\int_{x_0}^{x}[g(z,\ y)]^{-1}\,dy. \tag{17}$$

4. Винеризация двунаправленных диффузионных полей на плоскости. Пусть в (11) имеем $g'\equiv 1$, $x'_k(t_{3-k})=0$, $c_k(t_k)=0, k=1,\ 2$, т. е. при $G(z)\equiv 1$ поле $\xi'(z)=m(z)$ — винеровское. Тогда условия (12) необходимы и достаточны для эквивалентности полей ξ и ξ', а ψ_1 имеет вид (17). В результате мы получим, что винеровское поле будет выражено через данное поле $\xi(z)$. Однако, не меньший интерес представляет возможность выразить данное поле $\xi(z)$ через винеровское поле $w(z)$. Для этого можно воспользоваться формулой (17), выразив из нее x через ψ_1, т. е. найдя обратную к ψ_1 функцию ψ_2. Для начала рассмотрения этого вопроса решим следующий пример.

Пример 1. Пусть по обозначению при $k=1,\ 2$ имеем:

$$v(x)=(4^{-1}x^2+27^{-1})^{1/2},\quad h_k(x)=[2^{-1}x+(-1)^k v(x)]^{1/3}, \tag{18}$$

$$g(x)=3\,[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]-1\,;$$

$$\varphi_k(x)=[2^{-1}x^2+27^{-1}+(-1)^k x v(x)]^{1/3},\quad f_k(z,\ x)=3t_{3-k}\,[h_1\,(x)+h_2(x)]. \tag{19}$$

Проверим сначала, что при $C\equiv 0$ справедлива формула (1). Правая часть равенства (1) равна

$$2^{-1}t_{3-k}\,(g\partial_3 g)=(3/2)t_{3-k}\{3\,[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]-1\}[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]'_x=3t_{3-k}\,[h_1(x)+h_2(x)]+\alpha,$$

$$\alpha=[2v(x)]^{-1}\,t_{3-k}\,[h_1(x)+h_2(x)]\,\{3\,[h_1^2(x)\,h_2\,(x)-h_1(x)\,h_2^2(x)]+[h_1(x)-h_2(x)]\}=0,$$

т. е. равенство (1) доказано.

Убедимся теперь в положительности функции $g(x)$. Прежде всего, $g(0)=1$. Затем имеем производную

$$\partial_3 g=[v(x)]^{-1}\,[h_2^2(x)-h_1^2(x)],$$

т. е. $\partial_3\,g=0$ только при $x=0$, а при $x>0$ $(x<0)$ имеем $\partial_3 g>0\,(\partial_3 g<0)$. Значит, $g(x)$. имеет в точке $x=0$ минимум. Поэтому $g(x)\geq g(0)=1>0$.

Найдем вторую производную функций g:

$$\partial_3^2\,g=[v(x)]^{-2}\,\{v(x)\,\partial_3[h_2^2(x)-h_1^2(x)]-[h_2^2(x)-h_1^2(x)]x[4v(x)]^{-1}\}$$

$$=[2v^3(x)]^{-1}\,\{h_2^2\,(x)\,[2/3v\,(x)-x/2]+h_1^2(x)\,[2/3v(x)+x/2]\}.$$

Отсюда видно, что $g\in C\,(1,\ 1,\ 3)\cap\widehat{C}(1,\ 1,\ 1)$, $\partial_k f_r=\partial_k g=0$, $k=r=1,\ 2$, т. е. для g и выписанных производных выполнено условие (C'), $C(z)=0\in\widehat{C}(1,\ 1)$. Если $x_k(t_{3-k})=x_0$, то в силу равенства $f_{3-k}\,(z_{(k)},\ x)=0$ заключаем, что система уравнений (2) удовлетворяется при любом фиксированном значении $x_0\in R$. Так как $\partial_1 f_2=\partial_2 f_1=3\,[h_1\,(x)+h_2(x)]$, то видно, что условие (C') для функций $\partial_k f_r$, $k\neq r$ не выполняется, но условие (C) очевидно выполнено (к этому замечанию мы вернемся ниже).

Первое равенство в (12) при $x_k(t_{3-k})=x_0$, $C(s,\ t)=0$ выполнено, $k=1,2$. Справедливость последнего равенства в (12), т. е. расходимость интеграла $\int_{[x_0,\ x]}[g(z,\ y]^{-1}dy$ в окрестности каждой точки $x=\pm\infty$ доказывается следующим образом. Из равенства (18) при $x \to \infty$ следует $\varphi_1(x) \to 0$, $\varphi_2(x) = 0(x^{2/3})$, т. е. $[g(z, x)]^{-1} = O(x^{-2/3})$. Значит, рассматриваемый интеграл расходится в окрестности точки $x = \infty$. Аналогично, при $x \to -\infty$ имеем $\varphi_2(x) \to 0$, $\varphi_1(x) = O(x^{2/3})$ и также имеем расходимость рассматриваемого интеграла. Функция

$$\psi_1(x) = \int_{x_0}^{x} [g(y)]^{-1}\, dy \in C$$

является решением системы (5). Значит, если существует двунаправленное $(x_0, g, 0, w)$ — диффузионное поле $\xi(z)$, для которого $g(x) = 3[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] - 1$, то оно эквивалентно винеровскому полю, а точнее говоря, $w(z) = \psi_1(\xi(z))$.

В существовании $\xi(z)$ можно убедиться следующим образом. Рассмотрим случайное поле $\widetilde{\xi}(z) = [w(z)]^3 + w(z)$, обозначив через $\widetilde{f}_k(z, x)$, $k = 1, 2$ и $\widetilde{g}(z, x)$ коэффициенты в разложении стохастических дифференциалов $d_k\widetilde{\xi}(z)$, $k = 1, 2$ в формуле (3). Функции $\widetilde{f}_k$ и $\widetilde{g}$ находятся по формулам (5), а именно (поле $w(z)$ имеет коэффициенты $f_k \equiv 0$, $g \equiv 1$):

$$\widetilde{\psi}_1(x) = x^3 + x, \quad \widetilde{f}_k(z, \widetilde{\psi}_1) = l_k(0, 1, st)\, \widetilde{\psi}_{10}, \quad \widetilde{g}(z, \widetilde{\psi}_1) = \partial_3 \widetilde{\psi}_1(x).$$

Значит, получаем $\widetilde{f}_k(z, x) = f_k(z, x)$. Аналогично показываем, что $\widetilde{g}(z, x) = g(x)$ (см. (18), (19)), т. е. поле $\widetilde{\xi}(z) = \widetilde{\psi}_1(w(z))$ имеет такие же коэффициенты уравнений (3), какие и поле $\xi(z)$, существование которого мы доказываем. Можно убедиться, что коэффициенты последнего уравнения в (3) удовлетворяют условию (C), т. е. оно имеет, причем единственное решение, каким является $\widetilde{\xi}(z) = \xi(z)$. В результате получаем, что функции (18) и (19) определяют единственное двунаправленное диффузионное поле $\xi(z)$, такое, что $w(z) = \psi_1(\xi(z))$, $\xi(z) = \widetilde{\psi}_1(w(z))$. Значит, с применением метода винеризации можно доказывать существование решения стохастических уравнений (3) и находить решение в явном виде (ясно, что $\widetilde{\psi}_1$ — обратная к ψ_1 функция). Этим, в частности, доказано, что условие (C') в [2] не является необходимым для существования (x_0, g, C, m)-диффузии. Метод винеризации, изложенный в данном параграфе на примере, можно изложить при достаточно общих условиях применительно к доказательству существования диффузионных полей и их построению.

Отметим еще, что для диффузионного поля $\xi(z)$, определенного уравнениями (3) при условиях (1), (2) и $C \equiv 1$, может быть применен результат работы [4]. На самом деле, при обозначениях $e_k = \partial_k \beta$, $a_k = 2^{-1} g^2 e_k$, рассмотрим (при каждом $k = 1, 2$) два уравнения:

$$\text{(20)} \qquad \partial_k \psi_1 + f_k \partial_3 \psi_1 + a_k \partial_3^2 \psi_1 = 0,$$

$$a_k (\partial_3 \psi_1)^2 = 2^{-1} e_k.$$

Согласно обозначениям из [4], имеем:

$$\alpha = (a_k)^{1/2} = g(2^{-1} e_k)^{1/2}, \quad \beta = g \int_{x_0}^{x} g^{-1}(z, y)\, dy,$$

$$\gamma = 2f_k - \partial_3(0,5\, e_k g^2) - 2g \int_{x_0}^{x} \partial_k [1/g(z, y)]\, dy = 2g\partial_k C, \quad W = \Delta = 0$$

(при этом $e_k = t_{3-k}$, $k = 1, 2$). Таким образом, применяя теорему из [4] к диффузионному полю ξ дважды, мы можем решить задачу о его винеризации, т. е. в конечном счете, задачу о его выражении в явном виде через винеровское поле.

5. Формула Ито и проблема инвариантности. При диффузионном моделировании и оптимизации сложных систем управления, основанных на уравнениях Ито, необходимо вычислять коэффициенты перед дифференциалами $m(dz)$, $J(dz)$, $m(d_{3-k}z)dt_k$ и dz в разложении стохастического дифференциала $d\xi'(z)$, зная соответствующие коэффициенты в разложении $d\xi(z)$, где $\xi'(z)=\psi_1(z,\xi(z))$, а $\psi_1(z,x)$ есть функция класса $\widehat{C}$, $\partial_3\psi_1>0$. Фактически соотношение (7), (8) и есть нужная для этой цели формула Ито, однако для полной ясности эти соотношения следует изучить подробнее.

Теорема 2 *(об инвариантности). Пусть $\xi(z)$ — поле, описанное системой (1)—(3), а $\psi_1\in\widehat{C}$ и ψ_2 — обратная для ψ_1 функция, $\psi_1(z,R)=R$. Введем следующие обозначения:*

$$C'(z)=C(z)+\text{const},\quad x_0'=\psi_1(0,\ x_0),$$

$$x_k'(t_{3-k})=\psi_1(z_{(k)},\ x_k(t_{3-k})),$$

$$x'=\psi_1(z,x),\quad \theta(z,x)=g(z,x)\ \partial_3\psi_1(z,x),$$

$$A_1(z,x)=\theta(z,\ \psi_2(z,x)),\quad \varphi_k(z,x)=l_k(f_k,\ g,\ \beta)\,\psi_1(z,x),$$

$$f_k'(z,x)=\varphi_k(z,\psi_2(z,x)),\quad A_2(z,x)=A_1(z,x)\,\partial_3A_1(z,x), \tag{21}$$

$$A_{3k}(z,x)=l_k(f_k'(z,x),\ A_1(z,x),\ \beta(z))\,A_1(z,x),\quad k=1,2,$$

$$A_4(z,x)=l_2(f_2',\ A_1(z,x),\ \beta(z))\,f_1(z,x),\quad \xi'(z)=\psi_1(z,\xi(z)).$$

Тогда будут справедливы равенства (7), а также соотношение

$$d\xi'(z)=A_1(z,\ \xi'(z))\,m(dz)+A_2(z,\ \xi'(z))\,J(dz) \tag{8*}$$
$$+\sum_{1\le k\le 2}A_{3k}(z,\ \xi'(z))\,m(d_{3-k}z)\,dt_k+A_4(z,\ \xi'(z))\,dz.$$

Доказательство. Для доказательства первого соотношения в (7) рассмотрим выражение

$$B=\frac{f_k'(z,x)}{A_1(x,x)}-1/2\,[\partial_k\beta(z)]\,\partial_3A_1(z,x)+\int_{x_0'}^{x}\partial_k\frac{1}{A_1(z,x)}\,dy$$

$$=\frac{\varphi_k(z,\psi_2(z,x))}{\theta(z,\psi_2(z,x))}-1/2\,[\partial_k\beta(z)]\,\partial_3\theta(z,x)+\int_{x_0'}^{x}[\partial_k\frac{1}{\theta(z,\psi_2(z,y))}]\,dy.$$

Для краткости введем обозначения:

$$\alpha=\psi_1(z,\beta),\quad \beta=\psi_2(z,\alpha),\quad \psi_2(z,x)=y,\quad x=\psi_1(z,y),$$

$$A=\int_{x_0'}^{x}[\theta(z,\ \psi_2(z,\alpha))]^{-1}d\alpha.$$

Тогда получим $d\beta=[\partial_\alpha\psi(z,\alpha)]\,d\alpha=\dfrac{d\alpha}{d\alpha/d\beta}=\dfrac{d\alpha}{\partial_\beta\psi_1(z,\beta)}$,

$$\beta_0=\psi_2(z,\ \psi_1(z,\ x_0))=x_0,\quad B(z,x)=B(z,\ \psi_1(z,y))\equiv B_1(z,y),$$

$$A=\partial_k\int_{x_0}^{y}\frac{1}{\theta(z,\beta)}\,\partial_\beta\psi_1(z,\beta)\,d\beta=\partial_k\int_{x_0}^{y}[g(z,\beta)]^{-1}d\beta,$$

$$B(z,\ x)=\frac{\varphi_k(z,\ y)}{\theta(z,\ y)}-\frac{1}{2}\,[\partial_k\beta(z)]\cdot[\partial_y\theta(z,\ y)]\cdot[\partial_y\,\psi_1(z,\ y)]^{-1}$$

$$+\partial_k\int_{x_0}^{y}[g(z,\ \beta)]^{-1}d\beta\ \ (x=\psi_1\,(z,\ \psi_2(z,\ x))).$$

После возвращения к прежнему обозначению $y\to x$ элементарные операции приводят нас к следующему окончательному равенству:

$$B_1(z,\ x)=\frac{l_k\,(f_k,\ g,\ \beta)\,\psi_1(z,\ x)}{g(z,\ x)\,\partial_3\psi_1(z,\ x)}-\frac{\partial_k\beta(z)}{2\partial_3\psi_1(z,\ x)}\,[g\partial_3^2\psi_1$$

$$+(\partial_3\psi_1)\,\partial_3 g]+\partial_k\int_{x_0}^{x}[g(z,\ \beta)]^{-1}d\beta=\frac{1}{g\partial_3\psi_1}\,[\partial_k\psi_1 \tag{22}$$

$$+(\partial_3\psi_1)\,\partial_k\psi_2+f_k\,\partial_3\psi_1]-\frac{(\partial_k\beta)\,(\partial_3\psi_1)\,\partial_3 g}{2\,\partial_3\psi_1}+\partial_k\int_{x_0}^{x}\frac{1}{g(z,\ y)}dy$$

$$=\frac{1}{g}\,f_k-\frac{1}{2}\,(\partial_k\beta)\,\partial_3 g+\int_{x_0}^{x}[\partial_k\,\frac{1}{g(z,\ y)}\,]\,dy=\partial_k C=\partial_k C',\ \ C'=C+\text{const}.$$

При этом учтено, что полная частная производная от x по t_k равна нулю, т. е.

$$\partial_k\psi_1+(\partial_3\psi_1)\,\partial_k\psi_2=0. \tag{23}$$

Инвариантность первого соотношения в (1), т. е. выполнение первого равенства в (7), доказана (для этого надо еще в обеих частях равенства (22) написать $\psi_2(z,\ x)$ вместо x).

Рассмотрим теперь соотношение (2) и выясним, будет ли оно инвариантным при замене $\xi'(z)=\psi_1(z,\ \xi\,(z))$. Для этого при учете того, что

$$\psi_2\,(v_{(k)},\ x_k'(v))=\psi_2\,(v_{(k)},\ \psi_1(v_{(k)},\ x_k\,(v)))=x_k(v),$$

рассмотрим выражение (в котором $k=1,\,2$)

$$D_k=x_0'+\int_0^{t_{3-k}}f_{3-k}'(v_{(k)},\ x_k'(v))\,dv=D_k(t_{3-k}).$$

При выше введенных обозначениях мы можем написать:

$$D_k(t_{3-k})=\psi_1(0,\ 0,\ x_0)+\int_0^{t_{3-k}}\varphi_{3-k}\,(v_{(k)},\ \psi_2(v_{(k)},\ x_k'(v)))\,dv$$

$$=\psi_1\,(0,\ 0,\ x_0)+\int_0^{t_{3-k}}\varphi_{3-k}(v_{(k)},\ x_k(v))\,dv. \tag{24}$$

Рассмотрим сначала случай $k=1$:

$$D_1(t_2)=\psi_1(0,\ 0,\ x_0)+\int_0^{t}\varphi_2(0,\ v,\ x_1\,(v))\,dv,$$

$$\varphi_2(0,\ v,\ x_1(v))=l_2\,[\,f_2(0,\ v,\ x_1\,(v)),\ g,\ \beta]\,\psi_1(0,\ v,\ x_1(v))$$

$$=(\partial_2\psi_1)\,(0,\ v,\ x_1\,(v))+f_2(0,\ v,\ x_1\,(v))\,(\partial_3\psi_1)\,(0,\ v,\ x_1(v))$$

$$+2^{-1}\,[\partial_v\beta\,(0,\ v)]\,g^2\partial_3^2\psi_1=(\partial_3\,\psi_1)\,(0,\ v,\ x_1(v))$$

$$+f_2(0,\ v,\ x_1\,(v))\,(\partial_3\psi_1)\,(0,\ v,\ x_1(v))=d_v\psi_1\,(0,\ v,\ x_1\,(v)).$$

Значит, можно написать:

$$D_1(t)=\psi_1(0,\ 0,\ x_0)+\int\limits_0^t d_v\psi_1(0,\ v,\ x_1(v))dv$$

$$=\psi_1(0,\ 0,\ x_0)+\psi_1(0,\ v,\ x_1(v))\big|_0^t=\psi_1(0,\ t,\ x_1(t))=x_1'(t);$$

аналогично получим: $D_2(s)=x_2'(s)$. Следовательно, инвариантность соотношения (2) доказана.

Будут ли инвариантными граничные условия $\xi(z_{(k)})=x_k(t_{3-k})$, $k=1, 2$? Для ответа на этот вопрос при обозначениях (21) найдем $\xi'(z_{(k)})$ при $k=1, 2$:

$$\xi'(z_{(k)})=\psi_1(z_{(k)},\ \xi(z_{(k)}))=\psi_1(z_{(k)},\ x_k(t_{3-k}))=x_k'(t_{3-k}),$$

что и требовалось доказать.

Первое уравнение в (3) инвариантно на основании обычной формулы Ито для диффузионных процессов. Осталось доказать инвариантность последнего стохастического уравнения в (3), а точнее говоря, инвариантность интегрального уравнения (4). В [2] доказано, что (предложение 2.3 и предложение 2.4), если

$$g\in C(1,\ 1,\ 3)\cap C(1,\ 1,\ 1),\quad C\in\widehat{C}(1,\ 1),$$

а $\xi(z)$ есть непрерывное $\mathscr{F}$-согласованное решение системы

$$(25)\qquad \begin{aligned} &d_k\xi(z)=f_kdt_k+gm\,(d_kz),\quad \xi(z_{(k)})=x_k(t_{3-k}),\\ &\partial_{3-k}x_k(t_{3-k})=f_{3-k}(z_{(k)},\ x_k(t_{3-k})),\quad x_k(0)=x_0,\ k=1, 2,\end{aligned}$$

причем f_k выражаются через C и g формулами (1), то $\xi(z)$ удовлетворяет уравнению (4) и уравнениям

$$(26)\qquad \begin{aligned} &d\xi(z)=d_1d_2\xi(z)=d_2d_1\xi(z),\\ &l_2(f_2,\ g,\ \beta)f_1=l_1(f_1,\ g,\ \beta)f_2,\quad l_kg=g\partial_3f_k,\quad k=1, 2.\end{aligned}$$

При условии (23) с учетом обозначений (21) нами только что доказана справедливость всех соотношений (7) для поля $\xi'(z)$. Поэтому, если $A_1(z,\ x)$ есть функция класса $C(1,\ 1,\ 3)\cap\widehat{C}(1,\ 1,\ 1)$, то $\xi'(z)$ удовлетворяет уравнению (8*), т. е. интегральное уравнение (4) инвариантно. Так как

$$A_1(z,\ x)=g(z,\ \psi_2(z,\ x))\,\partial_y\psi_1(z,\ y),\ y=\psi_2(z,\ x),$$

$$g\in C(1,\ 1,\ 3)\cap\widehat{C}(1,\ 1,\ 1),$$

то, учитывая, что $g>0$, $0<\partial_3\psi_1\in\widehat{C}$, заключаем: $A_1\in\widehat{C}$.

Значит, теорема 2 об инвариантности стохастических уравнений (3) доказана. А вместе с тем доказана и общая формула Ито (8*) для двунаправленных диффузионных полей. Несколько в другом виде формула Ито излагается в работах [1, 3, 5, 6]. В частности, в [1] формула Ито излагается в случае интегрирования по винеровскому полю. Проблема инвариантности ни кем ранее не рассматривалась.

6. Плотности вероятностей и функции распределения для диффузионных полей. Пусть по обозначению $\mathscr{F}(z_0,\ z,\ x)=\mathbf{P}\{\Delta_zw(z_0)<x\}$ есть функция распределения вероятностей для приращения винеровского поля $w=\{w(z),\ \mathscr{F}_z,\ z\geqq 0\}$ на прямоугольнике $(z_0,\ z]$:

$$\Delta_zw(z_0)=w(z)-w(s_0,\ t)-w(s,\ t_0)+w(s_0,\ t_0),$$

$$v(z_0,\ z,\ x)=\partial_x\mathscr{F}(z_0,\ z,\ x).$$

Следуя [7], запишем плотность вероятностей p:

$$p(z_0,\ z,\ x)=\frac{1}{[2\pi(s-s_0)(t-t_0)]^{1/2}}\exp\left[\frac{-x^2}{2(s-s_0)(t-t_0)}\right]. \tag{27}$$

Зная эту плотность, мы сможем записать все конечномерные распределения вероятностей поля $w(z)$, а также построить вероятностную меру на σ-алгебре (порожденной соответствующими цилиндрическими множествами) в координатном пространстве R^T, где $T=R_+\times R_+$. В теории оптимального управления распределения вероятностей позволяют находить различные функционалы от процессов и полей, которые необходимо оптимизировать. Отсюда видна важность построения плотностей вероятностей и плотностей переходных вероятностей для двунаправленных диффузионных полей $\xi(z)$, описываемых стохастическими уравнениями (3).

Для построения плотности переходных вероятностей рассмотрим четыре прямоугольника, отмеченных цифрами I, II, III и IV соответственно. При $\varepsilon=w(z)-w(z_0)$ имеем:

$$\varepsilon=\sum_{1\leq k\leq 3}\Delta_k w,\quad \Delta_1 w=\Delta_z w(z_0),\quad \mathbf{E}\,\varepsilon=0,\ \Delta_{II}w$$
$$=w(s,\ t_0)-w(z_0),\quad \Delta_{III}w=w(s_0,\ t)-w(z_0),\quad \mathbf{D}\,\varepsilon$$
$$=(s-s_0)(t-t_0)+t_0(s-s_0)+s_0(t-t_0)=st-s_0t_0.$$

Найдем переходную вероятность:

$$P(z_0,\ x_0,\ z,\ x)=\mathbf{P}\{w(z)<x\,|\,w(z_0)=x_0\}$$
$$=\mathbf{P}\{w(z)-w(z_0)<x-x_0/w(z_0)=x_0\}=\mathbf{P}\{w(z)-w(z_0)<x-x_0\}.$$

Так как плотность переходных вероятностей имеет вид

$$p_1(z_0,\ x_0,\ z,\ x)=\frac{1}{[2\pi(st-s_0t_0)]^{1/2}}\exp\left[\frac{-(x-x_0)^2}{2(st-s_0t_0)}\right], \tag{28}$$

то получаем переходную вероятность ($z_0<z$, как и в (27), (28))

$$P(z_0,\ x_0,\ z,\ x)=\frac{1}{[2\pi(st-s_0t_0)]^{1/2}}\int_{-\infty}^{x-x_0}\exp\left[\frac{-y^2}{2(st-s_0t_0)}\right]dy.$$

Теперь рассмотрим гауссовский НКИМ $m(z)$ с неслучайной квадратической характеристикой $\beta(z)$, имеющей плотность $G^2(z)$ по мере Лебега (G — положительная непрерывная функция на R^2_+). Обозначим через $p_m(z_0,\ z,\ x)$ плотность вероятностей для приращения $\Delta_z m(z_0)$ этого мартингала на прямоугольнике $\{u:\ z_0\leqq u\leqq z\}$, а через $p_{1m}(z_0,\ x_0,\ z,\ x)$ — плотность переходных вероятностей для $m(z)$, т. е.

$$p_{1m}(z_0,\ x_0,\ z,\ x)=\partial_x\mathscr{F}_{1m}(z_0,\ x_0,\ z,\ x),$$
$$\mathscr{F}_{1m}(z_0,\ x_0,\ z,\ x)=\mathbf{P}\{m(z)<x/m(z_0)=x_0\}.$$

Рассуждая как и при выводе формул (27), (28), находим:

$$\begin{aligned} &p_m(z_0,\ z,\ x)=\Big[2\pi\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}G^2(u)du\Big]^{-1/2}\exp\Big\{\frac{-x^2}{2}\Big[\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}G^2(u)du\Big]^{-1}\Big\},\\ &p_{1m}(z_0,\ x_0,\ z,\ x)=\{2\pi[\beta(z)-\beta(z_0)]\}^{-1/2}\exp\Big\{\frac{-x^2}{2[\beta(z)-\beta(z_0)]}\Big\}.\end{aligned} \tag{29}$$

Пусть $\xi(z)$ — двунаправленное диффузионное поле, определяемое уравнениями (3), причем выполнены условия (12) и применима формула (17), преобразующая $\xi(z)$ в $m(z)$:

$$m(z)=C(0)-C(z)+\int_{x_0}^{\xi(z)}[g(z,y)]^{-1}dy. \tag{30}$$

Обозначим через $\Phi(z, x)$, $\Phi_1(z_0, x_0, z, x)$ функцию распределения и условную функцию распределения $\xi(z)$ при условии $\xi(z_0)=x_0$, а через $\omega(z, x)$ и $\omega_1(z_0, x_0, z, x)$ — соответствующие плотности вероятностей. Применяя первое равенство в (29) при $z_0=0$, находим:

$$\Phi(z, x)=\mathbf{P}\{\psi_2(z, m(z))<x\}=\mathbf{P}\{m(z)<\psi_1(z, x)\}=\int_{-\infty}^{\psi_1(z,x)}p_m(0, z, y)\,dy, \tag{30*}$$

$$\omega(z, x)=[g(z, x)\sqrt{2\pi\beta(z)}]^{-1}\exp\{-\frac{1}{2\beta(z)}[\psi_1(z, x)]^2\}.$$

Аналогично на основании второго равенства из (29) получим:

$$\Phi_1(z_0, x_0, z, x)=\mathbf{P}\{m(z)<\psi_1(z, x)\mid m(z_0)=\psi_1(z_0, x_0)\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\psi_1(z,x)-\psi_1(z_0,x_0)}p_{1m}(z_0, \psi_1, (z_0, x_0), z, y)dy,$$

$$\omega_1(z_0, x_0, z, x)=\frac{1}{g(z, x)\{2\pi[\beta(z)-\beta(z_0)]\}^{1/2}}\exp\{\frac{-[\psi_1(z, x)-\psi_1(z_0, x_0)]^2}{2[\beta(z)-\beta(z_0)]}\}. \tag{31}$$

В заключение настоящего параграфа выпишем плотности вероятностей и плотности переходных вероятностей поля $\xi(z)$, эквивалентного полю $\xi'(z)$, если известны плотности вероятностей и переходных вероятностей поля $\xi'(z)$. Для этого введем следующие обозначения: Φ, Φ_1, ω и ω_1 имеют такой же смысл, как и в (30*), 31), а

$$\Phi'(z, x)=\mathbf{P}\{\xi'(z)<x\},$$
$$\Phi_1'(z_0, x_0, z, x)=\mathbf{P}\{\xi'(z)<x\mid\xi'(z_0)=x_0\}, \tag{32}$$
$$\omega'(z, x)=\partial_x\Phi'(z, x),\ \omega_1'(z_0, x_0, z, x)=\partial_x\Phi_1'(z_0, x_0, z, x).$$

Теперь получаем необходимые формулы:

$$\Phi(z, x)=\Phi'(z, \psi_1(z, x)),$$
$$\omega(z, x)=\frac{1}{g(z, x)}g'(z, \psi_1(z, x))\,\omega'(z, \psi_1(z, x)), \tag{33}$$
$$\Phi_1(z_0, x_0, z, x)=\Phi_1'(z_0, \psi_1(z_0, x_0), z, \psi_1(z, x)),$$
$$\omega_1(z_0, x_0, z, x)=\omega_1'(z_0, \psi_1(z_0, x_0), \psi_1(z, x))\,[1/g(z, x)]\,g'(z, \psi_1(z, x)).$$

Равенства (30*), (31) вытекают, очевидно, из (33).

Отметим здесь еще, что если последнее условие в (12) не выполнено, т. е. $\psi_1(z, \pm\infty)=\varphi_\pm(z)$, $\varphi_-(z)<\varphi_+(z)$, где $\varphi_-(z)$ и $\varphi_+(z)$ есть непрерывные функции, то все изложенное сохраняет силу. Надо только считать, что $m(z)$ — не гауссовский НКИМ, порожденный винеровским полем, и надо учитывать граничные условия. Иначе говоря, если мы за основу теории берем уравнения Ито или Колмогорова, то при их преобразовании надо учитывать характер границ для изучаемого поля.

В заключение добавим, что рассмотренные здесь преобразования с успехом могут быть применены к диффузионным полям, изученным в [8]. Соответствующие результаты без доказательства опубликованы в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Wong, M. Zakai. Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane. *Stoch. Processes*, **6**, 1978, 339–349.
2. H. Korezlioglu, P. Lefortet, G. Mazziotto. Une propriété markovienne et diffusions associées. — In: Processus Aleatoires a Deux Indices. (Lect. Notes Math., **863**), Berlin 1981, 245–274.
3. И. И. Гихман. Двупараметрические мартингалы. *Успехи мат. наук*, 1982, **37**, № 6, 3—28.
4. И. Д. Черкасов. О преобразовании диффузионного процесса в винеровский. *Теория вероят.*, 2, 1957, № 3, 384—388.
5. R. Cairoli, J. B. Walsh. Stochastic integrals in the plane. *Acta Math.*, **134**, 1975, 111—183.
6. Т. Е., Пясецкая. Стохастический дифференциал функции от случайного поля. *Доклады АН УССР*, 1977, № 3, 215—218.
7. Н. Н., Ченцов. Винеровские случайные поля от нескольких параметров. *Доклады АН СССР*, **106**, 1956, № 4, 607—609.
8. Ю. А. Далецкий, Н. Д. Цвинтарная. Диффузионные случайные функции многомерного времени. *Укр. матем. журн.* **34**, 1982, № 1, 20—24.
9. И. Д. Черкасов. Преобразование одномерных диффузионных полей на плоскости. *Доклады АН СССР*, **292**, 1987, № 2, 276—279.

СССР, г. Саратов,
ул. Астраханская, 83
Саратовский университет

Поступила 19. 6. 1987