Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

О G-СХОДИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. I
(Абстрактные параболические операторы)

МАРИН Л. МАРИНОВ

В настоящей работе рассматриваются параболические операторы $\mathscr{P}(u)=\frac{du}{dt}+\mathscr{A}(u)$ с монотонной эллиптической частью. Определены достаточно широкие классы π операторов $\mathscr{P}$, для которых выполнены равномерно условия ограниченность, коэрцитивность, дефинитность вариации и непрерывность. Доказана теорема о G-компактности классов π

Понятие G-сходимость для линейных эллиптических и параболических операторов было введено в работах С. Спаньолы [1, 2, 3]. За последнее время появилось ряд работ, изучающих G-сходимость дифференциальных операторов и ее применения (см. [4, 5, 6, 7] и приведенную там литературу). Цель настоящей работы, во-первых, изложить необходимые для исследований квазилинейных параболических дифференциальных операторов свойства G-сходимости абстрактных параболических операторов и, во-вторых, определить достаточно широкие классы абстрактных нелинейных параболических операторов, для которых обобщаются известные в нелинейном случае (см. [5], § 1 и 2) свойства G-сходимости.

Настоящая работа построена по следующему плану. В **1** приводятся некоторые вспомагательные предложения, а в **2** — основные предположения и определения. В **3** доказаны основные результаты.

1. Обозначения и вспомагательные утверждения. Рассмотрим произвольное банаховое пространство X. Чрез $\|x\|_X$ будем обозначать норму элемента x, через $x_n \xrightarrow{X} x$ — слабую сходимость последовательности x_n к x, а через $x_n \xrightarrow{X} x$ — сходимость последовательности x_n к x в пространстве X.

Пусть $0<T<+\infty$. Для функций $u:[0, T]\to X$ будем рассматривать пространства $C(0, T; X)$, $C^\infty(0, T; X)$, $C_0^\infty(0, T; X)$, $L^p(0, T; X)$ (см. [5, 8, 9]). Напомним, что нормы в пространствах $C(0, T; X)$, $L^p(0, T; X)$ вводятся соответственно как

$$\|u\|_c=\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_X;\quad \|u\|_{L^p}=\Big(\int_0^T\|u(t)\|_X^p\,dt\Big)^{1/p}.$$

Через du/dt мы будем обозначать обобщенную производную функции $u(t)$ (см. [5]).

Рассмотрим действительное, рефлексивное, сепарабельное банаховое пространство V и гильбертово пространство H со скалярным произведением $(.,.)$. Пусть V' — сопряженное с V пространство, а $\langle f, u\rangle$ — значение функционала f из V' на элементе u из V.

Предположим, что существуют линейные ограниченные операторы вложения

$$(1)\qquad j: V\to H \text{ и } \tilde{j}: H\to V',$$

такие, что

а) $j(V)$ плотно в H и $\tilde{j}(H)$ плотно в V';
б) $\|j\| \leqq 1, \|\tilde{j}\| \leqq 1$ и $\langle \tilde{j}(j(u)), v\rangle = (j(u), j(v))$;
в) оператор j — компактен.

В настоящей работе предполагается, что $p \geqq 2$ и $p' = \frac{p}{p-1}$. Кроме того использованы следующие обозначения:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathscr{V} = L^p(0, T; X); \ \mathscr{V}' = L^{p'}(0, T; X); \ \mathscr{W} = \{u; \ u \in \mathscr{V} \text{ и } \frac{du}{dt} \in \mathscr{V}'\} \\ \|u\| = \|u\|_{\mathscr{V}}; \ \|f\|_* = \|f\|_{\mathscr{V}'}; \ \|u\|_0 = \|u\| + \|\frac{du}{dt}\|_*; \\ \|u\|_\tau = (\int_0^\tau \|u(t)\|_X^p \, dt)^{1/p}; \ [f, u]_{\tau, s} = \int_\tau^s \langle f(t), u(t)\rangle \, dt. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\mathscr{W}$ с нормой $\|\cdot\|_0$ является рефлексивным банаховым пространством, а пространство $\mathscr{V}'$ — сопряженное с пространством $\mathscr{V}$. Кроме того, значение функционала $f \in \mathscr{V}'$ на элементе $u \in \mathscr{V}$ задается равенством

$$[f, u] = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt$$

(см. [9], с. 833).

Заметим, что выше определенные пространства имеют те же свойства, как и пространства, рассмотренные в работе [5], § 1. Доказательства вполне аналогичны и поэтому мы ограничимся только формулировкой основных свойств.

Лемма 1. *Пространство $C^\infty(0, T; V)$ плотно в банаховом пространстве $\mathscr{W}$.*

Лемма 2. *Для любых функций $u(t)$ и $v(t)$ из $\mathscr{W}$ выполнено равенство*

$$(3)\quad [\frac{du}{dt}, v]_{s,\tau} + [\frac{dv}{dt}, u]_{s,\tau} = (u(\tau), v(\tau)) - (u(s), v(s)),$$

где $[s, \tau] \subset [0, T]$.

Лемма 3. *Существует $K = \text{const} > 0$, такая, что для любой функции $u(t) \in \mathscr{W}$ существует функция $\tilde{u}(t) \in C(0, T; H)$, совпадающая с $u(t)$ для почти всех t на отрезке $[0, T]$ и*

$$(4)\quad \|\tilde{u}\|_{C(0, T; H)} \leqq K \|u\|_0.$$

Учитывая лемму 3, мы определяем пространство

$$\mathscr{W}_0 = \{u(t); \ u \in \mathscr{W} \text{ и } u(0) = 0\}.$$

Согласно определению пространства $\mathscr{W}$ оператор $d/dt: \mathscr{W} \to \mathscr{V}'$ ограничен. Сужение оператора d/dt на $\mathscr{W}_0$ будем рассматривать как неограниченный оператор из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{V}'$ с областью определения $\mathscr{W}_0$. Очевидно, что для любого $u \in \mathscr{W}_0$ справедливо

$$(5)\quad [\frac{du}{dt}, u] \geqq 0.$$

Лемма 4. *Пусть X — сепарабельное банаховое пространство, а Y — рефлексивное банаховое пространство. Пусть последовательность операторов F_k: $X \to Y$, $k = 1, 2, \ldots$, имеет следующие свойства:*

1) *равностепенная ограниченность на любом шаре из X;*

2) *равностепенная по k, равномерная деминепрерывность на любом шаре из X.*

Тогда существуют подпоследовательность $\{F_{k'}\}$ и оператор $F\colon X \to Y$, такие, что

а) $F_{k'}(x) \xrightarrow{Y} F(x)$ *для любого* $x \in X$,

б) *оператор F — равномерно деминепрерывен на любом шаре из X.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{M}=\{x_n\}$ произвольное, счетное всюду плотное в X множество. Доказательство леммы проводится в два этапа.

Этап 1. Докажем, что для любого шара $Ш(s)=\{x;\ \|x\|_X \leq s\}$ существуют подпоследовательность $\{F_{k'}\}$ и равномерно деминепрерывный оператор $F^s\colon Ш(s) \to Y$, такие, что

$$(6)\qquad F_{k'}(x) \xrightarrow{Y} F^s(x) \text{ для любого } x \in Ш(s).$$

Заметим, что множество $\{x_n^s\}=\mathscr{M} \cap Ш(s)$ всюду плотно в $Ш(s)$. Из предположения 1) следует, что существует $C=\mathrm{const}>0$, такая, что

$$\|F_k(x_n^s)\|_Y \leq C$$

для любых k и n. Так как банахово пространство Y — рефлексивно, то существуют подпоследовательность $\{F_{k'}\}$ и оператор $F^s\colon \{x_n^s\} \to Y$, такие, что

$$F_{k'}(x_n^s) \xrightarrow{Y} F^s(x_n^s) \text{ для любого } x_n^s.$$

Пусть ζ — произвольный фиксированный элемент из Y'. Значение функционала ζ на элементе $u \in Y$ обозначим через $[\zeta, u]_Y$. Условие 2) означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что, если $\|x-y\|_X<\delta$ и $x, y \in Ш(s)$, то

$$(7)\qquad |[\zeta, F_k(x)-F_k(y)]_Y|<\varepsilon.$$

(В общем случае δ зависит и от ζ.) Тогда легко проверить, что для любого $x \in Ш(s)$ подпоследовательность $F_{k'}(x)$ слабо сходится в Y. Доопределяем $F^s(x)$ на $Ш(s)$ как слабый предел последовательности $\{F_{k'}(x)\}$ и при помощи (7) проверяем, что F^s — равномерно деминепрерывный оператор из $Ш(s)$ в Y.

Этап 2. Рассмотрим последовательность шаров $Ш(n)$, $n=1, 2, \ldots$. При помощи первого этапа доказательства и диагонального процесса построим подпоследовательность $\{F_{k'}\}$ и подпоследовательность равномерно деминепрерывных операторов $\{F^n\}$, такие, что

$$F_{k'}(x) \xrightarrow{Y} F^n(x) \text{ для любого } x \in Ш(n).$$

Кроме того, для любого n выполнено

$$F^n(x)=F^{n+1}(x) \quad \text{для } x \in Ш(n).$$

(Так как $F^n(x)$ и $F^{n+1}(x)$ являются слабыми пределами одной и той же последовательности $\{F_{k'}(x)\}$. Определяя

$$F(x)=F^n(x) \quad \text{для } x \in Ш(n),$$

завершаем доказательство леммы.

2. Основные предположения и определения. Мы рассматриваем абстрактные параболические операторы

$$\mathscr{P}(u)=\frac{du}{dt}+\mathscr{A}(u)$$

с нелинейной эллиптической частью $\mathscr{A}(u)$, которая является монотонным оператором из $L^p(\tau, s;\ V)$ в $L^{p'}(\tau, s;\ V')$, для любого $[\tau, s]\subset[0, T]$. Предположим, что выполнены следующие условия:

$(\mathscr{H}1)$ *Ограниченность.* Существует монотонно возрастающая непрерывная функция $\lambda_1(s)$, такая, что
$$\|\mathscr{A}(u)\|_* \leq \lambda_1(\|u\|)+c_1,$$
для любой функции $u \in \mathscr{V}$;

$(\mathscr{H}2)$ *Коэрцитивность.* Существует непрерывная монотонно возрастающая функция $\lambda_2(s)$, такая, что $\lambda_2(s)\to\infty$ при $s\to\infty$ и
$$[\mathscr{A}(u),\ u] \geq \lambda_2(\|u\|)\|u\| - c_2,$$
для любой функции $u \in \mathscr{V}$;

$(\mathscr{H}3)$ *Дефинитность вариации.* Существует непрерывная, неотрицательная функция $\mu_1(s_1,\ s_2)$, монотонно возрастающая по любой переменной и такая, что

а) $\mu_1(s_1,\ s_2)=0$ тогда и только тогда, когда $s_2=0$, и

б) для любых u и v из $\mathscr{V}$
$$[\mathscr{A}(u)-\mathscr{A}(v),\ u-v] \geq \mu_1(r,\ \|u-v\|'),$$
где $r=\max\{\|u\|,\ \|v\|\}$, а норма $\|\cdot\|'$ компактна по отношению $\|\cdot\|_0$ и непрерывна по отношению $\|\cdot\|$.

$(\mathscr{H}4)$ *Непрерывность.* Существует непрерывная, возрастающая по любой переменной функция $\mu_2(s_1,\ s_2,\ s_3)$, такая, что $\mu_2(s_1,\ s_2,\ s_3)=0$ тогда и только тогда, когда $s_3=0$ и для любых u и v из $\mathscr{V}$ выполнено
$$\|\mathscr{A}(u)-\mathscr{A}(v)\|_* \leq \mu_2(\|u\|,\ \|v\|,\ [\mathscr{A}(u)-\mathscr{A}(v),\ u-v]).$$

Введем несколько определений.

Определение 1. *Будем обозначать через $\pi=\pi(c_1,\ c_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu_1,\ \mu_2,\ d)$ класс параболических операторов $\mathscr{P}(u)$, для которых выполнены предложения $(\mathscr{H}1)\div(\mathscr{H}4)$, и, если $\mathscr{P}(u)=0$ для $u\in\mathscr{W}_0$, то*
$$\langle \mathscr{A}(u),\ u\rangle(t) \geq -d(t),$$
где $d(t)\geq 0$ и $d(t)\in L^1(0,\ T)$.

Постоянные c_1, c_2 и функции λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, d будем называть параметрами класса π. Очевидно, что, если $\pi\neq\emptyset$, для параметров класса π справедливы некоторые неравенства. В работе [10] рассматривается пример таких классов.

По аналогии с работой [5] введем понятие G-сходимость.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность операторов $\{\mathscr{P}_k\}$, G сходится к параболическому оператору $\mathscr{P}$ (запишем это коротко $\mathscr{P}_k \to \mathscr{P}$), если из $\mathscr{P}_k(u_k)=\mathscr{P}(u)$ и $\{u,\ u_1,\ u_2,\ \dots\}\subset\mathscr{W}_0$ следует $u_k \xrightarrow[\mathscr{W}]{} u$.*

3. Свойство G-компактности классов π. Фиксируем произвольный класс π. Сначала докажем две леммы.

Лемма 5. *Для любого оператора $\mathscr{P}\in\pi$ существует обратный оператор $\mathscr{P}^{-1}:\ \mathscr{V}'\to\mathscr{W}_0$, такой, что*

(8) $$\|\mathscr{P}^{-1}(f)\|_0 \leq \lambda_3(\|f\|_*)+c_1,$$

где $f\in\mathscr{V}'$ и $\lambda_3(s)=s+\max\{c_2,\ \lambda_2^{-1}(s+1)\}+\lambda_1(\max\{c_2,\ \lambda_2^{-1}(s+1)\})$.

Операторы $\{\mathscr{P}^{-1};\ \mathscr{P}\in\pi\}$ равностепенно, равномерно деминепрерывны на любом шаре из $\mathscr{V}'$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{P}\in\pi$. Тогда из теоремы 2.1 ([11] с. 52) следует, что для любой функции $f\in\mathscr{V}'$ задача

(9) $$\mathscr{P}(u)=f \text{ в классе } u\in\mathscr{W}_0$$

имеет решение. Из ($\mathscr{H}3$) следует, что это решение единственно. Тем самым определен оператор $\mathscr{P}^{-1}\colon \mathscr{V}'\to\mathscr{W}$, который любой функцией $f\in\mathscr{V}'$ ставит в соответствие единственное решение задачи (9). При помощи неравенства (5) и предположения ($\mathscr{H}2$) легко проверить, что, если $\|u\|\geqq c_2$, то

$$\|u\|\leqq\lambda_2^{-1}(\|f\|_*+1).$$

Тогда из ($\mathscr{H}1$) следует (8).

Допустим, что операторы $\{\mathscr{P}^{-1};\ \mathscr{P}\in\pi\}$ не являются равностепенно, равномерно деминепрерывными на любом шаре из $\mathscr{V}'$. Тогда существуют элемент $g_0\in\mathscr{V}'$, шар $Ш(s_0)=\{f\in\mathscr{V}';\ \|f\|_*\leqq s_0\}$, последовательности $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, $\{\mathscr{P}_n^{-1}\}$ и $\varepsilon_0=\text{const}>0$, такие, что $\{f_n\}\subset Ш(s_0)$, $\{g_n\}\subset Ш(s_0)$, $\{\mathscr{P}_n\}\subset\pi$, $\|f_n-g_n\|_*<\frac{1}{n}$ и

(10) $$|[g_0,\ \mathscr{P}_n^{-1}(f_n)-\mathscr{P}_n^{-1}(g_n)]|\geqq\varepsilon_0.$$

Пусть $v_n=\mathscr{P}_n^{-1}(f_n)-\mathscr{P}_n^{-1}(g_n)$. Тогда из (8) следует

$$\|v_n\|_0\leqq\lambda_3(\|f_n\|_*)+\lambda_3(\|g_n\|_*)+2c_1\leqq 2(\lambda_3(s_0)+c_1).$$

Следовательно, существуют подпоследовательность $\{v_{n'}\}$ и элемент $v\in\mathscr{W}_0$, такие, что

$$v_{n'}\xrightarrow{\mathscr{W}}v \quad\text{и}\quad v_{n'}\xrightarrow{\mathscr{V}}v.$$

Тогда из неравенства (10) получаем

(11) $$|[g_0,\ v]|\geqq\varepsilon_0.$$

Кроме того, из неравенства (5) и предположения ($\mathscr{H}3$) следует

$$[f_{n'}-g_{n'},\ v_{n'}]\geqq\mu_1(\lambda_3(s_0)+c_1,\ \|v_{n'}\|').$$

Обе стороны этого неравенства имеют предел при $n'\to\infty$ и, следовательно,

$$0=[0,\ v]\geqq\mu_1(\lambda_3(s_0)+c_1,\ \|v\|'\geqq 0.$$

Но тогда $v=0$ и из (11) следует $\varepsilon_0\leqq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Замечание 1.1. *Пусть операторы класса* π *удовлетворяют условию:*

$(\mathscr{H}3)'$ *Существует возрастающая, непрерывная функция* $\mu(s)$, *такая, что* $\mu(0)=0$ *и*

(12) $$[\mathscr{A}(u)-\mathscr{A}(v),\ u-v]\geqq\mu(\|u-v\|)\ \|u-v\|,$$

для любых u *и* v *из* $\mathscr{V}$.

Тогда

$$\|\mathscr{P}^{-1}(f)-\mathscr{P}^{-1}(g)\|_0\leqq\mu_4(r,\ \|f-g\|_*),$$

где

$$r=\max\{\|f\|_*,\ \|g\|_*\},\ \mu_4(r,\ s)=s+\mu^{-1}(s)+\mu_2(d_1(r),\ d_1(r),\ \tilde{d}(r)\mu^{-1}(s)),$$

$$d_1(r)=\max\{c_2,\ \lambda_2^{-1}(r+1)\}\ \text{ и }\ \tilde{d}(r)=2(\lambda_1(d_1(r))+c_1].$$

Доказательство следует сразу из неравенства (5), (8), (12) и предположения ($\mathscr{H}4$). Пусть $r=\max\{\|f\|_*,\ \|g\|_*\}$. Тогда

$$\|f-g\|_*\|\mathscr{P}^{-1}(f)-\mathscr{P}^{-1}(g)\|\geqq\mu(\|\mathscr{P}^{-1}(f)-\mathscr{P}^{-1}(g)\|)\ \|\mathscr{P}^{-1}(f)-\mathscr{P}^{-1}(g)\|.$$

Следовательно,

$$\|\mathscr{P}^{-1}(f)-\mathscr{P}^{-1}(g)\|_0=\|\mathscr{P}^{-1}(f)-\mathscr{P}^{-1}(g)\|+\|d/dt(\mathscr{P}^{-1}(f)-\mathscr{P}^{-1}(g))\|_*$$
$$\leqq\mu^{-1}(\|f-g\|_*)+\|f-g\|_*+\|\mathscr{A}(\mathscr{P}^{-1}(f))-\mathscr{A}(\mathscr{P}^{-1}(g))\|_*$$
$$\leqq\mu^{-1}(\|f-g\|_*)+\|f-g\|_*+\mu_2(d_1(r),\ d_1(r),\ r_1),$$

где $d_1(r)=\max\{c_2,\ \lambda_2^{-1}(r+1)\}$ и

$$r_1=(\|\mathscr{A}(\mathscr{P}^{-1}(f))\|_*+\|\mathscr{A}(\mathscr{P}^{-1}(g))\|_*)\|\mathscr{P}^{-1}(f)-\mathscr{P}^{-1}(g)\|.$$

Приступим к доказательству основной леммы этого параграфа.

Лемма 6. *Пусть задана последовательность операторов $\{\mathscr{P}_k\}$. Если $\{\mathscr{P}_k\}\subset\pi$, то существуют подпоследовательность $\{\mathscr{P}_m\}$ и оператор $\mathscr{F}:\ \mathscr{V}'\to\mathscr{W}_0$, такие, что:*

а) оператор $\mathscr{F}$ равномерно деминепрерывный на любом шаре из $\mathscr{V}'$ и

$$\|\mathscr{F}(f)\|_0\leqq\lambda_3(\|f\|_*)+c_1, \tag{13}$$

где $\lambda_3(s)=s+\max\{c_2,\ \lambda_2^{-1}(s+1)\}+\lambda_1(\max\{c_2,\ \lambda_2^{-1}(s+1)\})$;

б) для любого $f\in\mathscr{V}'$, при $m\to\infty$,

$$\mathscr{P}_m^{-1}(f)\xrightarrow{\mathscr{W}}\mathscr{F}(f) \tag{14}$$

и

$$\mathscr{P}_m^{-1}(f)\xrightarrow{C(0,\ T\,;\ H)}\mathscr{F}(f). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $\{\mathscr{P}_k\}\subset\pi$.

а) Из леммы 5 следует, что последовательность $\{\mathscr{P}_k^{-1}\}$ равностепенна по k, равномерно деминепрерывна на любом шаре из $\mathscr{V}'$ и

$$\|\mathscr{P}_k^{-1}\|_0\leqq\lambda_3(\|f\|_*)+c_1 \tag{16}$$

для любого k и любой функции $f\in\mathscr{V}'$. Тем самым мы показали, что выполнены предположения леммы 1.4. Следовательно, существуют подпоследовательность $\{\mathscr{P}_{k'}\}$ и оператор $\mathscr{F}:\ \mathscr{V}'\to\mathscr{W}_0$, равномерно деминепрерывный на любом шаре из $\mathscr{V}'$, такой, что

$$\mathscr{P}_{k'}^{-1}(f)\xrightarrow{\mathscr{W}}\mathscr{F}(f) \tag{17}$$

для любой функции $f\in\mathscr{V}'$. Тогда из неравенства (16) следует

$$\|\mathscr{F}(f)\|_0\leqq\underline{\lim}\,\|\mathscr{P}_{k'}^{-1}(f)\|_0\leqq\lambda(\|f\|_*)+c_1.$$

Кроме того, при помощи теоремы 5.1 из [8], с. 70 можно доказать, что

$$\mathscr{P}_{k'}^{-1}(f)\xrightarrow{L^p(0,\ T\,;\ H)}\mathscr{F}(f) \tag{18}$$

и, следовательно, для п. в. t на отрезке $[0,\ T]$ имеем

$$\mathscr{P}_{k'}^{-1}(f)(t)\xrightarrow{H}\mathscr{F}(f)(t). \tag{19}$$

б) Доказательство свойства (15) проводится в 3 этапа и аналогично лемме 3 из [5].

Этап 1. Для любого $f\in\mathscr{V}'$ можно подобрать подпоследовательность $\{\mathscr{P}_{k''}^{-1}\}$, так, что для любого $\varphi\in H$ имеет место равномерная на $[0,\ T]$ сходимость

$$\lim\,(\mathscr{P}_{k''}(f)(t),\ \varphi)=(\mathscr{F}(f)(t),\ \varphi). \tag{20}$$

Введем обозначения $r(f)=\lambda_3(\|f\|_*)+c_1$, $u(t)=\mathscr{F}(f)$ и $u_{k'}(t)=\mathscr{P}_{k'}^{-1}(f)$. Для любого фиксированного элемента φ из H рассмотрим последовательность непрерывных на $[0,\ T]$ функций $\{(u_{k'}(t),\ \varphi)\}$. Легко проверяется, что

$$|(u_{k'}(t_0+t),\ \varphi)-(u_{k'}(t_0),\ \varphi)|\leqq r(f)\|\varphi\|_H\,.\,t^{1/p} \text{ и} \tag{21}$$

$$|(u_{k'}(t),\ \varphi)|\leqq K\,.\,r(f)\,.\,\|\varphi\|_H, \tag{22}$$

где $K=\text{const}>0$, определенная в лемме 3. Тогда при помощи теоремы Арцела доказывается, что существуют подпоследовательность $\{k''\}$ и непрерывная на $[0,\ T]$ функция $g(\varphi\,;\ t)$, такие, что

$$\lim\,(u_{k''}(t),\ \varphi)=g(\varphi\,;\ t) \text{ равномерно на } [0,\ T]. \tag{23}$$

Пусть последовательность $\{\varphi_j\}$ всюду плотна в H и последовательность $\{k''\}$ выбрана так, что (23) имеет место для любого $\varphi\in\{\varphi_j\}$. При помощи неравенства

$$|(u_{k''}(t),\ \varphi)-(u_{m''}(t),\ \varphi)|\leqq 2Kr(f)\|\varphi-\varphi_j\|_H+|(u_{k''}(t),\ \varphi_j)-(u_{m''}(t),\ \varphi_j)|.$$

Видно, что можно так доопределить $g(\varphi\,;\ t)$, что равенство (23) справедливо для любого φ из H. Из соотношений (22) и (23) сразу следует, что для любого фиксированного t, функционал $g(.,\ t)\colon H\to R$ линейный и непрерывный. Следовательно, существует функция $v\,[0,\ T]\to H$, такая, что

$$g(\varphi\,;\ t)=(v(t),\ \varphi). \tag{24}$$

Тогда при помощи (23) доказываем, что для любого $t\in[0,\ T]$

$$u_{k''}(t)\xrightarrow{H} v(t) \tag{25}$$

и, следовательно, $u(t)=v(t)$ для п. в. t на отрезке $[0,\ T]$ (см. (19). Кроме того, функции $(u(t),\ \varphi)$ и $(v(t),\ \varphi)$ непрерывны и тогда очевидно $(u(t),\ \varphi)\equiv(v(t),\ \varphi)$ и

$$u(t)\equiv v(t) \quad \text{на } [0,\ T]. \tag{26}$$

Равенства (26), (24) и (23) завершают доказательство (20).

Этап 2. Пусть последовательность функций $\{f_0,\ f_1,\ f_2,\dots\}$ из $C^\infty(0,\ T;\ H)$ выбрана так, что $f_0(t)\equiv 0$ и $\{f_j\}$ плотно в $\mathscr{V}'$. До окончания доказательства будем считать, что подпоследовательность $\{\mathscr{P}_m^{-1}\}$ последовательности $\{\mathscr{P}_{k'}^{-1}\}$ выбрана так, что равенство (20) выполнено для любой функции $f\in\{f_j\}$ и любого элемента φ из H. Сначала докажем, что

$$\mathscr{P}_m^{-1}(0)\xrightarrow{C(0,\ T\,;\ H)}\mathscr{F}(0) \text{ и} \tag{27}$$

$$\mathscr{P}_m^{-1}(f_j)-\mathscr{P}_m^{-1}(0)\xrightarrow{C(0,\ T\,;\ H)}\mathscr{F}(f_j)-\mathscr{F}(0). \tag{28}$$

Так как доказательства (27) и (28) вполне аналогичны, мы докажем только (27). Для краткости положим $v_m=\mathscr{P}_m^{-1}(0)$ и $v=\mathscr{F}(0)$. Пусть свойство (27) не выполнено. Тогда существуют $\varepsilon_0>0$ и последовательность $\{t_m\}\subset[0,\ T]$, такие, что

$$\|v_m(t_m)-v(t_m)\|\geqq\varepsilon_0.$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$\lim\|v_m(t_m)\|_H=a \quad \text{и} \quad \lim t_m=t_0. \tag{29}$$

Кроме того, из непрерывности функции $v(t)$ следует, что при $m>N_1$ $\|v_m(t_m)-v(t_0)_H\|\geqq\frac{\varepsilon}{2}$ и

$$(30)\qquad \| v_m(t_m) \|_H^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4} + (v_m(t_m) - v(t_0),\ v(t_0)) + (v(t_0),\ v_m(t_m)).$$

Из (21), (25) и (26) следует $v_m(t_m) \xrightarrow{H} v(t_0)$. Следовательно, обе стороны неравенства (30) имеют предел при $m \to \infty$ и

$$(31)\qquad a^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4} + \| v(t_0) \|_H^2.$$

Если $t_0 = 0$, то при помощи леммы 2 и определения класса π проверяем, что для любого $t \in [0,\ T]$

$$\| v_m(t) \|_H^2 \leq 2 \int_0^t d(\tau)\, d\tau.$$

Тогда, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла и равенством (29), получаем противоречие с (31) и, следовательно, $t_0 > 0$. Пользуясь непрерывностью $v(t)$ и абсолютной непрерывностью интеграла, находим $\delta \in (0,\ t_0)$, такое, что, если $0 < \eta' < \delta$ и $0 < \eta < \frac{\delta}{2}$, то $\| v(t_0) \|_H^2 \geq \| v(t_0 - \eta') \|_H^2 - \frac{\varepsilon^2}{16}$ и

$$\| v_m(t_m) \|_H^2 - \| v_m(t_m - \eta) \|_H^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{dv_m}{dt},\ v_m \right]_{t_m - \eta, t_m} \leq \int_{t_m - \eta}^{t_m} d\, d\tau \leq \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

Из этих неравенств и (30) и (31) получаем

$$\frac{\varepsilon^2}{16} \geq \frac{3\varepsilon^2}{16} + \| v(t_0) \|_H^2 - \| v_m(t_m - \eta) \|_H^2 \geq \frac{2\varepsilon^2}{16} + \| v(t_0 - \eta') \|_H^2 - \| v_m(t_m - \eta) \|_H^2$$

для $m > N_2$. Полученное неравенство доказывает, что для любого $t \in [t_0 - \frac{\delta}{2},\ t_0 - \frac{\delta}{4}]$ и достаточно больших m имеет место

$$\| v_m(t) \|_H^2 \geq \| v(t) \|_H^2 + \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

Но это противоречит с (19).

Этап 3. Пусть $f \in \mathscr{V}'$. Докажем, что

$$\mathscr{P}_m^{-1}(f) \xrightarrow{C(0,\ T;\ H)} \mathscr{F}(f).$$

Пусть $\{f_n\}$ — подпоследовательность последовательности $\{f_j\}$, такая, что $f_n \xrightarrow{\mathscr{V}'} f$. Введем следующие обозначения $u(t) = \mathscr{F}(f)$, $u_m(t) = \mathscr{P}_m^{-1}(f)$, $u_{m,n}(t) = \mathscr{P}_m^{-1}(f_n)$ и $u^n = \mathscr{F}(f_n)$. При помощи лемм 2 и 6 проверяем, что

$$\frac{1}{2} \| u_m(t) - u_{m,n}(t) \|_H^2 \leq [f - f_n,\ u_m - u_{m,n}]_{0,t} \leq \| f - f_n \|_* \cdot 2(\lambda_3(r) + c_1),$$

где $r = \max\{ \|f\|,\ \|f_n\|_* \}$ и, следовательно,

$$\| u_m - u_{m,n} \|_{C(0,\ T;\ H)} \leq 4(\lambda_3(r) + c_1) \| f - f_n \|_*.$$

Кроме того, из этапа 2 следует, что

$$u_{m,n} \xrightarrow{C(0,\ T;\ H)} u^n \text{ для любого } n$$

и, следовательно, последовательность $\{u_m(t)\}$ — фундаментальна в $C(0,\ T;\ H)$. Пусть функция $u_0(t)$ такова, что

$$u_m(t) \xrightarrow{C(0,\ T;\ H)} u_0(t).$$

Тогда из (18) следует, что $u_0(t)=u(t)$ для п. в. t на $[0, T]$. Но так как обе функции непрерывны, то $u_0(t)\equiv u(t)$, что и завершает доказательство леммы.

Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема о компактности классов π.

Теорема 1. *Пусть параболические операторы $\mathscr{P}_k$, $k=1, 2, \ldots$, принадлежат классу π $(c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, d)$ и функция $\tau(s)=\frac{1}{s}\lambda_2(\lambda_1^{-1}(s-c_1))\lambda_1^{-1}(s-c_1)$ монотонно возрастает на отрезке $[c_1, +\infty)$.*

Тогда существуют подпоследовательность $\{\mathscr{P}_{\widetilde{m}}\}$ и параболический оператор $\mathscr{P}_0$, принадлежащий классу $\pi_1(\widetilde{c}_1, c_2, \widetilde{\lambda}_1, \lambda_2, \mu_1, \widetilde{\mu}_2, d)$, такие, что,

$$\mathscr{P}_m \to \mathscr{P}_0,$$

где $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{\mu}_2$ вычисляются при помощи параметров класса π.

Доказательство. К последовательности $\{\mathscr{P}_k\}$ применима лемма 6 и, следовательно, существуют подпоследовательность $\{\mathscr{P}_m=\frac{d}{dt}+\mathscr{A}_m(\cdot)\}$ и оператор $\mathscr{F}$, такие, что выполнены (13), (14) и (15). Тогда для доказательства теоремы будет достаточно проверить, что $\mathscr{F}^{-1}$ принадлежит классу π_1. Доказательство проводится в 4 этапа.

Этап 1. Определение оператора $\mathscr{P}_0$. Пусть f и g произвольные элементы пространства $\mathscr{V}'$. Введем обозначения $\mathscr{K}(f)=f-\frac{d}{dt}(\mathscr{F}(f))$, $u_m=\mathscr{P}_m^{-1}(f)$, $v_m=\mathscr{P}_m^{-1}(g)$, $u=\mathscr{F}(f)$ и $v=\mathscr{F}(g)$.

а) При помощи лемм 2 и 6 проверяем, что

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\,[\mathscr{A}_m(u_m),\ u_m]_{\tau,s}=[\mathscr{K}(f),\ \mathscr{F}(f)]_{\tau,s}\\ \lim\,[\mathscr{A}_m(v_m),\ v_m]_{\tau,s}=[\mathscr{K}(f),\ \mathscr{F}(f)]_{\tau,s}\end{array}\right., \tag{32}$$

$$\lim\,[\mathscr{A}_m(u_m)-\mathscr{A}_m(v_m),\ u_m-v_m]_{\tau,s}=[\mathscr{K}(f)-\mathscr{K}(g),\ \mathscr{F}(f)-\mathscr{F}(g)]_{\tau,s}. \tag{33}$$

Так как доказательства вполне аналогичны, мы проверим только (33).

$$\lim\{[\mathscr{A}_m(u_m)-\mathscr{A}_m(u_m),\ u_m-v_m]_{\tau,s}\}$$

$$=\lim\{[f-g,\ u_m-v_m]-\frac{1}{2}(\|u_m(s)-v_m(r)\|_H^2-\|u_m(\tau)-v_m^{(r)}\|_H^2)\}$$

$$=[f-g,\ u-v]-\frac{1}{2}(\|u(s)-v(s)\|_H^2-\|u(\tau)-v(\tau)\|_H^2)$$

$$=[f-g,\ \mathscr{F}(f)-\mathscr{F}(g)-[\frac{d}{dt}(\mathscr{F}(f)-\mathscr{F}(g)),\ \mathscr{F}(f)-\mathscr{F}(g)]_{\tau,s}$$

$$=[\mathscr{K}(f)-\mathscr{K}(g),\ \mathscr{F}(f)-\mathscr{F}(g)]_{\tau,s}.$$

б) Докажем, что $\mathscr{F}$ является обратимым оператором. Пусть $\mathscr{F}(f)=\mathscr{F}(g)$. Из предположения $(\mathscr{H}4)$ и неравенства (16) следует

$$\|\mathscr{A}_m(u_m)-\mathscr{A}_m(v_m)\|_*\le\mu_2(\lambda_3(\|f\|_*)+c_1,\ \lambda_3(\|g\|_*)+c_1,\ [\mathscr{A}_m(u_m)-\mathscr{A}_m(v_m),\ u_m-v_m]).$$

Тогда, учитывая равенство (33), получаем

$$\lim\|\mathscr{A}_m(u_m)-\mathscr{A}_m(v_m)\|_*=0.$$

Кроме того, при помощи (14) легко проверить, что

$$\mathscr{A}_m(u_m) \xrightarrow{\mathscr{V}'} \mathscr{K}(f) \text{ и } \mathscr{A}_m(v_m) \xrightarrow{\mathscr{V}'} \mathscr{K}(g). \tag{34}$$

Следовательно,

$$0 \leqq \| \mathscr{K}(f) - \mathscr{K}(g) \|_* \leqq \underline{\lim} \| \mathscr{A}_m(u_m) - \mathscr{A}_m(v_m) \|_* = 0.$$

Тем самым мы доказали, что, если $\mathscr{F}(f) = \mathscr{F}(g)$, то

$$f - \frac{d}{dt}(\mathscr{F}(f)) = \mathscr{K}(f) = \mathscr{K}(g) = g - \frac{d}{dt}(\mathscr{F}(g))$$

и, следовательно, $f = g$. Для любого $u \in D = \mathscr{F}(\mathscr{V}')$ определяем $\mathscr{F}^{-1}(u) = f$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}(f) = u$.

При помощи оператора $\mathscr{F}^{-1}$ введем оператор $\mathscr{A}: D \to \mathscr{V}'$, так, что

$$\mathscr{A}u = \mathscr{F}^{-1}(u) - \frac{du}{dt}. \tag{35}$$

Этап 2. Свойства оператора $\mathscr{A}$. Пусть u и v произвольные элементы множества D. Тогда, если положим $f = \mathscr{F}^{-1}(u)$, $g = \mathscr{F}^{-1}(v)$, $u_m = \mathscr{P}_m^{-1}(f)$ и $v_m = \mathscr{P}_m^{-1}(g)$, то выполнены (32), (33) и (34).

а) Ограниченность. При помощи ($\mathscr{H}1$) и ($\mathscr{H}2$) легко проверить, что, если $\| \mathscr{A}_m(u_m) \|_* \geqq c_1$, то

$$[\mathscr{A}_m(u_m), u_m] \geqq \lambda_2(\lambda_1^{-1}(\| \mathscr{A}_m(u_m) \|_* - c_1))\, \lambda_1^{-1}(\| \mathscr{A}_m(u_m) \|_* - c_1) - c_2.$$

Тогда из (32) следует

$$\begin{aligned}[\mathscr{A}(u), u] &\geqq \underline{\lim} \{\lambda_2(\lambda_1^{-1}(\| \mathscr{A}_m(u_m) \|_* - c_1))\, \lambda_1^{-1}(\| \mathscr{A}_m(u_m) \|_* - c_1) - c_2 \\ &\geqq \lambda_2(\lambda_1^{-1}(\| \mathscr{A}(u) \|_* - c_1))\lambda_1^{-1}(\| \mathscr{A}(u) \|_* - c_1) - c_2.\end{aligned}$$

Так как по условию функция $\tau(s) = \frac{1}{s} \lambda_2(\lambda_1^{-1}(s - c_1))\, \lambda_1^{-1}(s - c_1)$ монотонно возрастающая, то, если $\| \mathscr{A}(u) \|_* \geqq c_2$

$$\tau^{-1}(\| u \| + 1) \geqq \| \mathscr{A}(u) \|_*.$$

Следовательно, если положим $\tilde{\lambda}_1(s) = \tau^{-1}(s+1)$ и $\tilde{c}_1 = c_1 + c_2$, то

$$\| \mathscr{A}(u) \|_* \leqq \tilde{\lambda}_1(\| u \|) + \tilde{c}_1. \tag{36}$$

б) В области D, оператор $\mathscr{A}$ — монотонный и удовлетворяет условиям ($\mathscr{H}2$), ($\mathscr{H}3$) и ($\mathscr{H}4$). Так как доказательства основаны на (32), (33), (34) и вполне аналогичны, мы проверим только ($\mathscr{H}4$). Для любого оператора $\mathscr{A}_m$ выполнены ($\mathscr{H}2$) и ($\mathscr{H}4$). Следовательно,

$$\begin{aligned}&\| \mathscr{A}_m(u_m) - \mathscr{A}_m(v_m) \|_* \\ &\leqq \mu_2(\lambda_4([\mathscr{A}_m(u_m), u_m]), \lambda_4([\mathscr{A}_m(u_m), u_m]), [\mathscr{A}_m(u_m) - \mathscr{A}_m(v_m), u_m - v_m]),\end{aligned}$$

где $\lambda_4(s) = \Lambda_2^{-1}(s + c_2)$ и $z = \Lambda_2^{-1}(y)$ обратная функция к функции $y = \lambda_2(z)z$. Пользуясь (34) и непрерывностью функций μ_2 и λ_4 получаем

$$\begin{aligned}&\| \mathscr{A}(u) - \mathscr{A}(v) \|_* \leqq \underline{\lim} \| \mathscr{A}_m(u_m) - \mathscr{A}_m(v_m) \|_* \\ &\leqq \mu_2(\lambda_4([\mathscr{A}(u), u]), \lambda_4([\mathscr{A}(v), v]), [\mathscr{A}(u) - \mathscr{A}(v), u - v]).\end{aligned}$$

Заметим, что функции μ_2, λ_4 и $\tilde{\lambda}_1$ монотонно возрастающие. Тогда при помощи (36) доказываем, что

$$\| \mathscr{A}(u) - \mathscr{A}(v) \|_* \leqq \tilde{\mu}_2(\| u \|, \| v \|, [\mathscr{A}(u) - \mathscr{A}(v), u - v]), \tag{37}$$

где $\widetilde{\mu}_2(s_1, s_2, s_3)=\mu_2(\lambda_5(s_1), \lambda_5(s_2), s_3)$ и

$$\lambda_5(s)=\lambda_4(s(\widetilde{\lambda}_1(s)+\widetilde{c}_1)).$$

Этап 3. Область определения оператора $\mathscr{A}$ является всюду плотным в $\mathscr{V}$. Мы докажем, что, если $[f, u]=0$ для любого $u\in D$, то $f=0$. Тогда из теоремы Хана — Банаха будет следовать $\bar{D}=\mathscr{V}$.

Пусть $[f, u]=0$ для любого $u\in D$. Тогда $[f, u_1]=0$ и $[f, u_0]=0$, где $u_1=\mathscr{F}(f)$ и $u_0=\mathscr{F}(0)$. Тогда, пользуясь неравенством (5), получаем

$$\begin{aligned}0&=[\mathscr{F}^{-1}(u_1), u_1-u_0]=[\mathscr{F}^{-1}(u_1)-\mathscr{F}^{-1}(u_0), u_1-u_0]\\&=[\frac{d}{dt}(u_1-u_0), u_1-u_0]+[\mathscr{A}(u_1]-\mathscr{A}(u_0), u_1-u_0]\\&\geqq[\mathscr{A}(u_1)-\mathscr{A}(u_0), u_1-u_0]\geqq\mu_1(r, \|u_1-u_0\|')\geqq 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$u_1=u_0 \text{ и } f=\mathscr{F}^{-1}(u_1)=\mathscr{F}^{-1}(u_0)=0.$$

Этап 4. Из неравенств (36) и (37) следует, что для любого $r>0$, оператор $\mathscr{A}$ равномерно непрерывен на $D\cap\{\|u\|\leqq r\}$. Доопределяем по непрерывности оператор $\mathscr{A}$ на $\bar{D}=\mathscr{V}$. Полученный оператор обозначим с $\bar{\mathscr{A}}: \mathscr{V}\to\mathscr{V}'$. Из свойств оператора $\mathscr{A}$ следует, что

$$\frac{d}{dt}+\bar{\mathscr{A}}\in\pi_1(\widetilde{c}_1, c_2, \widetilde{\lambda}_1, \lambda_2^*, \mu_1, \widetilde{\mu}_2, d).$$

Заметим, что $\mathscr{W}_0=D$. Для этого достаточно показать, что $\mathscr{W}_0\subset D$. Пусть $u\in\mathscr{W}_0$. Обозначим $f=\frac{du}{dt}+\bar{\mathscr{A}}(u)$. Пусть $v=\mathscr{F}(f)$. Тогда

$$0=[f-f, u-v]=[\frac{d}{dt}(u-v), u-v]+[\bar{\mathscr{A}}(u)-\mathscr{A}(v), u-v]\geqq\mu_1(r, \|u-v\|')\geqq 0.$$

Следовательно, $u=v$. Тем самым, мы доказали, что оператор $\mathscr{P}_0(\ )=\frac{d}{dt}+\mathscr{A}(\cdot)$, который является обратным к оператору $\mathscr{F}(\ )$, имеет областью определения $\mathscr{W}_0$. Тогда свойство (14) доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Spagnolo. Sur limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.*, **21**, 1967, 651-699.
2. S. Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed elliptich. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **22**, 1968, 573-597.
3. S. Spagnolo. Convergence of parabolic equations. Bollet. U. M. I. 5, 1977, 14-B, 547-568.
4. В. В. Жиков и др. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов. *Успехи мат. наук*, **34**, 1979, № 5, 65—133.
5. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. О G-сходимости параболических операторов. *Успехи мат. наук*, **36**, 1981, № 1, 11—58.
6. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
7. Э. Санчес — Паленсия. Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.
8. Ж. Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
9. Р. Эдвардс. Функциональный анализ. М., 1969.
10. М. Маринов. О G-сходимости нелинейных параболических операторов II (Квазилинейные дифференциальные операторы). *Сердика*, 1988. **2**, 141—160.
11. Ю. А. Дубинский. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. Современные проблемы математики, т. 9. М., 1976, **2**, 141—160.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. К. 373

Поступила 3. 12. 1986
В переработанном виде 24. 11. 1987