Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О G-СХОДИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. II

(Квазилинейные дифференциальные операторы)

МАРИН Л. МАРИНОВ

В настоящей работе изучаются свойства G-сходимости квазилинейных параболических дифференциальных операторов высокого порядка. Доказана теорема о G-компактности достаточно широких классов операторов. Исследованы свойства локальность, сходимость графиков, сходимость произвольных решений.

Под влиянием задач математической физики и механики в последние 15 лет появились ряд работ по теории усреднения и связанные с ней G-и Г-сходимость (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] и приведенная там литература). Однако большинство работ рассматривают линейные задачи ([2, 3, 4, 5, 9]). Понятие G-сходимость для линейных эллиптических и параболических операторов было введено в работах С. Спаньолы ([10, 11, 12]). В работах [4, 5] построена теория G-сходимости линейных дифференциальных операторов высокого порядка и даны некоторые ее приложения. Для нелинейных эллиптических операторов очень интересные результаты были получены при помощи Г-сходимости (см. [1, 7]). В работах [13, 14] анонсированы результаты о G-сходимости квазилинейных эллиптических операторов, для которых не применима техника Г-сходимости.

Настоящая работа тесно связана с работами [5, 15, 16]. В параграфе 4 работы [5] рассмотрен линейный случай доказанных ниже теорем. В работе [15] анонсированы результаты настоящей работы, а в работе [16] доказаны факты, которыми будем пользоваться ниже. Настоящая работа построена по следующему плану. В 1 вводятся основные предположения и определения. В 2 доказаны вспомагательные утверждения. В 3 доказаны основные результаты. Из-за ограниченности объема здесь рассматривается только случай, когда младшие члены сильно подчинены главной части.

1. Обозначения и основные предположения. Пусть Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Через Q будем обозначать цилиндр $Q=(0, T]\times\Omega$, где $0<T<+\infty$. Как и в [16], будем считать, что $p\geqq 2$ и $p'=\dfrac{p}{p-1}$. Рассмотрим пространства Соболева $W_0^{m,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$ и $W^{-m,p'}(\Omega)$. Напомним, что

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u(x):\ u(x)\in L^p(\Omega)\ \text{и}\ D^\alpha u\in L^p(\Omega),\quad |\alpha|\leqq m\},$$

где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $D=(D_1,\dots,D_n)$, $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ и $D^\alpha u=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}u$. Пространство $W^{m,p}(\Omega)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_m=\Big(\sum_{|\alpha|\leqq m}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p}.$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 14, 1988, с. 141—160.

Подпространство $W_0^{m,p}(\Omega)$ получается пополнением пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|_m$. Пространство

$$W^{-m,p'}(\Omega)=\{f\colon f=\sum_{|\alpha|\leqq m} D^\alpha f_\alpha \text{ и } f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)\}$$

является сопряженным с пространством $W_0^{m,p}(\Omega)$.

В соответствии с обозначениями работы [16], положим

$$V=W_0^{m,p}(\Omega),\quad H=L^2(\Omega),\quad \mathscr{V}(Q)=L^p(0,\ T;\ V),$$

$$\mathscr{V}'(Q)=L^{p'}(0,\ T;\ V'),\quad \mathscr{W}(Q)=\{u;\ u\in\mathscr{V}(Q) \text{ и } \frac{du}{dt}\in\mathscr{V}'(Q)\},$$

$$\mathscr{W}_0(Q)=\{u\in\mathscr{W}(Q),\quad u(0)=0\},\ \mathscr{H}(Q)=L^2(0,\ T;\ H)=L^2(Q),$$

$$\mathscr{X}(Q)=\{u;\ u\in L^p(0,\ T;\ W^{m,p}(\Omega)) \text{ и } \frac{du}{dt}\in L^{p'}(0,\ T;\ W^{-m,p'}(\Omega))\}.$$

Для краткости далее будем пользоваться обозначениями работы [16]. Кроме того, для любого $u\in\mathscr{V}$ и $v\in\mathscr{X}$ определяем:

$$D^k u=\{D^\alpha u,\quad |\alpha|=k\},\quad \partial u=\{u,\ D^1 u,\ldots,\ D^m u\},$$

$$\delta v=\{\frac{\partial v}{\partial t},\ v,\ D^1 v,\ldots,\ D^m v\}.$$

Для дальнейших рассмотрений нам понадобится пространство

$$X=\mathscr{V}'(Q)\times L^p(Q)\times\ldots\times L^p(Q)=\mathscr{V}'(Q)\times(L^p(Q))^N,$$

где N — число дифференцирований по x порядка не выше m. Для любого элемента $\psi=(\psi_{-1},\ \psi_\alpha;\ |\alpha|\leqq m)$ пространства X определим норму

$$\|\psi\|=\|\psi_{-1}\|_*+(\sum_{|\alpha|\leqq m}\|\psi_\alpha\|^p_{L^p(Q)})^{1/p}.$$

Далее, для краткости, будем пользоватся обозначением $\widehat{\psi}=(\psi_\alpha;|\alpha|\leqq m)$ и $\psi=(\psi_{-1},\ \widehat{\psi})$. Кроме того, для любого $\zeta\in R^N$ положим

$$|\zeta|^p=\sum_{j=1}^N|\zeta_j|^p.$$

В этой работе мы рассмотрим дифференциальные операторы вида

$$P(u)=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{|\alpha|\leqq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha(t,\ x,\ \partial u). \tag{1}$$

Предполагается, что коэффициенты $\{a_\alpha(t,\ x,\ \zeta);\ |\alpha|\leqq m\}$ удовлетворяют приведенным ниже условиям (H1)÷(H4).

(H1)

а) *Условие Каратеодори.* Функции $a_\alpha(t,\ x,\ \zeta)$ при каждом фиксированном $\zeta\in R^N$ измеримы на Q и почти при всех $(t,\ x)\in Q$ непрерывны на R^N.

б) *Ограниченность.* Существуют $c_1=\text{const}>0$ и неотрицательная функция $\mu_1(t,\ x)\in L^1(Q)$, такие, что

(2) $|a_\alpha(t,\ x,\ \zeta)|^{p'}\leqq c_1|\zeta|^p+\mu_1(t,\ x)$

для п. в. $(t,\ x)\in Q$ и любых ζ из R^N.

Заметим, что, благодаря свойствам оператора суперпозиции (см. [17]), условие (H1) вполне естественно, если рассмотрение ведется в пространстве Соболева. Любой вектор $\{a_\alpha(t, x, \zeta), |\alpha|\leqq m\}$, для которого выполнено условие (H1), определяет два оператора

$$\mathscr{A}: (L^p(Q))^N\times(L^p(Q))^N\to\mathscr{V}'(Q)$$

и

$$\mathscr{P}: X\times X\to\mathscr{V}'(Q),$$

при помощи равенств

$$(3)\qquad \begin{cases} [\mathscr{A}(\widehat{\psi};\ \widehat{\aleph}),\ v]=\sum\limits_{|\alpha|\leqq m}\iint\limits_Q a_\alpha(t,\ x,\ \widehat{\psi}+\widehat{\aleph})D^\alpha v\,dxdt,\\ [\mathscr{P}(\psi:\ \aleph),\ v]=[\psi_{-1}+\aleph_{-1},\ v]+[\mathscr{A}(\widehat{\psi};\ \widehat{\aleph}),\ v],\end{cases}$$

где $\psi=(\psi_{-1},\ \widehat{\psi})$ и $\aleph=(\aleph_{-1},\ \widehat{\aleph})$ — произвольные элементы пространства X, а $v\in\mathscr{V}(Q)$.

Для случая, когда $\aleph=\delta u$ и $u\in Z(Q)$, мы введем обозначения

$$(4)\qquad \begin{cases} A(\widehat{\psi};\ u)=\mathscr{A}(\widehat{\psi};\ \partial u),\quad P(\psi;\ u)=\mathscr{P}(\psi;\ \delta u),\\ A(u)=A(0;\ u),\quad P(u)=P(0,\ u).\end{cases}$$

Из равенств (3) и (4) следует, что

$$(5)\qquad A(\widehat{\psi}+\partial v;\ u)=A(\widehat{\psi};\ v+u)\ \text{ и }\ P(\delta v+\psi;\ u)=P(\psi;\ u+v)$$

для $\psi\in X$, а v и u — произвольные элементы пространства $\mathscr{V}(Q)$.

Сформулируем остальные условия на коэффициенты $\{a_\alpha;\ |\alpha|\leqq m\}$.

(H2) *Коэрцитивность.* Существуют $c_2=\text{const}>0$ и неотрицательная функция $\mu_2(t,\ x)\in L^1(Q)$, такие, что

$$\sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(t,\ x,\ \zeta)\zeta_\alpha\geqq c_2|\zeta|^p-\mu_2(t,\ x),$$

для п. в. $(t,\ x)\in Q$ и любых $\zeta=\{\zeta_\alpha;\ |\alpha|\leqq m\}\in R^N$.

(H3) *Дефинитность вариации.* Существует $c_3=\text{const}>0$, такая, что

$$\sum_{|\alpha|\leqq m}(a_\alpha(t,\ x,\ \zeta)-a_\alpha(t,\ x,\ \zeta'))(\zeta_\alpha-\zeta'_\alpha)\geqq c_3|\zeta-\zeta'|^p,$$

для п. в. $(t,\ x)\in Q$ и любых ζ и ζ' из R^N.

(H4) *Непрерывность.* Существуют неотрицательная функция $\mu_3(t, x)$ из класса $L^1(Q)$ и положительные постоянные c_4 и s, такие, что $0<s<1$ и

$$|a_\alpha(t,\ x,\ \zeta)-a_\alpha(t,\ x,\ \zeta')|^{p'}\leqq c_4(\mu_3(t,\ x)+|\zeta|^p+|\zeta'|^p)^s|\zeta-\zeta'|^{p(1-s)},$$

для п. в. $(t,\ x)\in Q$ и любых ζ и ζ' из R^N.

Определение 1. *Оператор* $P(\ )$ *принадлежит классу* $\Pi(c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ s,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3)$, *если его коэффициенты* $\{a_\alpha(t,\ x,\ \zeta);\ |\alpha|\leqq m\}$ *удовлетворяют условиям* (H1)$\div$(H4).

Постоянные c_1, c_2, c_3, c_4, s и функции μ_1, μ_2, μ_3 будем называть параметрами класса Π.

Пусть P_k для любого $k=0,\ 1,\ 2,\dots$ является параболическим оператором вида (1) с коэффициентами $\{a^k_\alpha(t,\ x,\ \zeta),\ |\alpha|\leqq m\}$. По аналогии с работой [5] введем следующие определения.

Определение 2. *Вектор* $\{\Gamma_\alpha(u, P_k), |\alpha|\leqq m\}$ *называется* P_k*-градиентом функции* u, *если*

$$\Gamma_\alpha(u, P_k)=a^k_\alpha(t, x, \partial u).$$

Определение 3. *Будем говорить, что последовательность* $P_1, P_2, \ldots$, G *сходится к параболическому оператору* P_0 (*запишем это коротко* $P_k\to P_0$), *если из* $P_k(u_k)=P_0(u)$ *и* $\{u, u_1, u_2, \ldots\}\subset\mathscr{W}_0$ *следует* $u_k\xrightarrow{\mathscr{W}}u$.

Заметим, что в соответствии с обозначениями работы [16] через $x_n\xrightarrow{X}x$ обозначаем слабую сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x, а через $x_n\xrightarrow{X}x$ — сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x в банаховом пространстве X.

Определение 4. *Будем говорить, что последовательность* $P_1, P_2, \ldots$ *сильно* G *сходится к оператору* P_0 (*запишем это коротко как* $P_k\Rightarrow P_0$), *если*

а) $P_k\Rightarrow P_0$ (*см. определение* 3);

б) *для любого* $u\in\mathscr{W}_0$ *и* $|\alpha|\leqq m$.

$$\Gamma_\alpha(u_k, P_k)\xrightarrow{L^{p'}(Q)}\Gamma_\alpha(u, P_0),$$

где $P_k(u_k)=P(u)$ и $u_k\in\mathscr{W}_0$.

2. Вспомогательные утверждения. Для удобства дальнейшего изложения докажем несколько свойств векторов

$$\{a_\alpha(t, x, \zeta), |\alpha|\leqq m\}, \text{ удовлетворяющих условиям (H1)}\div\text{(H4).}$$

Начнем с двух простых предложений.

Предложение 1. *Пусть вектор* $\{a_\alpha(t, x, \zeta), |\alpha|\leqq m\}$ *удовлетворяет условиям* (H1)÷(H4). *Тогда для любой цилиндрической подобласти* $Q_1=(\tau_1, \tau_2]\times\Omega_1$ *области* Q *и любых векторов* $\widehat{\psi}$, $\widehat{\aleph}$ *и* $\widehat{f}$ *из* $(L^p(Q))^N$ *имеют место следующие неравенства:*

$$\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_{Q_1}a_\alpha(t, x, \widehat{\psi})\aleph_\alpha\,dx\,dt\leqq(N.M_1(Q_1)+Nc_1\|\widehat{\psi}\|_1^p)^{\frac{1}{p'}}\|\widehat{\aleph}\|_1, \tag{6}$$

$$\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_{Q_1}a_\alpha(t, x, \widehat{\psi}+\widehat{\aleph})\aleph_\alpha\,dx\,dt\geqq d_0\|\widehat{\aleph}\|_1^p-d_1\|\widehat{\psi}\|_1^p-d_2M(Q_1), \tag{7}$$

$$\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_{Q_1}(a_\alpha(t, x, \widehat{\psi})-a_\alpha(t, x, \widehat{\aleph}))(\psi_\alpha-\aleph_\alpha)\,dx\,dt\geqq c_3\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|_1^p, \tag{8}$$

$$\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_{Q_1}(a_\alpha(t, x, \widehat{\psi})-a_\alpha(t, x, \widehat{\aleph}))f_\alpha\,dxdt \tag{9}$$

$$\leqq\|\widehat{f}\|_1\mu_4(\|\widehat{\psi}\|_1, \|\widehat{\aleph}\|_1, \iint_{Q_1}\sum_{|\alpha|\leqq m}(a_\alpha(t, x, \widehat{\psi})-a_\alpha(t, x, \widehat{\aleph}))(\psi_\alpha-\aleph_\alpha)),$$

где $\|\widehat{\psi}\|_1^p=\sum_{|\alpha|\leqq m}\|\psi_\alpha\|^p_{L^p(Q_1)}$, $M_1(Q_1)=\iint_{Q_1}\mu_1\,dxdt$, $M(Q_1)=\iint_{Q_1}(\mu_1+\mu_2)\,dxdt$, *постоянные* $d_j>0$ *вычисляются при помощи* c_1, c_2, p *и* N, *а функция*

$$\mu_4(s_1, s_2, s_3)=\{Nc_4[\iint_{Q_1}\mu_3dxdt+s_1^p+s_2^p]^s\}^{(p-1)p}(s_3/c_3)^{(1-s)(p-1)/p}.$$

Доказательство: а) неравенство (6) следует из неравенства Гельдера и условия (H1);

б) пользуясь условием (H2) и неравенством (6), получаем

$$\sum_{|\alpha|\leqq m} \iint_{Q_1} a_\alpha(t, x, \widehat{\psi}+\widehat{\aleph})\aleph_\alpha dxdt$$

$$\geqq c_2 \| \widehat{\psi}+\widehat{\aleph} \|_1^p - M(Q_1) - [N(M_1(Q_1)+c_1 \| \widehat{\psi}+\widehat{\aleph} \|_1^p)]^{(p-1)/p} \| \widehat{\aleph} \|_1.$$

Тогда при помощи неравенства Юнга завершаем доказательство (7) с постоянными $d_0=c_2 2^{p-2}$, $d_1=\frac{1}{p}(\frac{2c_1(p-1)}{cp})^{p-1}-2^{p-2}c_1$ и $d_2=1+(c_2N)/2c_1$.

в) неравенство (8) следует сразу из условия (H3);

г) из неравенства Гельдера и условия (H4) следует

$$(10) \quad \sum_{|\alpha|\leqq m} \iint_{Q_1} (a_\alpha(t, x, \widehat{\psi})-a_\alpha(t,x,\widehat{\aleph}))f_\alpha dxdt \leqq \| \widehat{f} \|_1 \Theta(\| \widehat{\psi} \|_1, \| \widehat{\aleph} \|_1) \| \widehat{\psi}-\widehat{\aleph} \|_1^{(p-1)(1-s)},$$

где $\Theta(s_1, s_2)=\{Nc_4[\iint_{Q_1} \mu_3 dxdt+s_1^p+s_2^p]^s\}^{(p-1)/p}$.

Тогда, если продолжим (10) при помощи (8), мы докажем неравенство (9).

Приведенное ниже предложение 2 устанавливает связь между операторами $P(\psi_j.)$ и абстрактными параболическими операторами $\mathscr{P}$, рассмотренными в работе [16].

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть вектор* $\{a_\alpha(t, x, \zeta); |\alpha|\leqq m\}$ *удовлетворяет условиям* (H1)$\div$(H4). *Тогда для произвольного фиксированного вектора* $\psi \in X$ *оператор* $A(\widehat{\psi};.)$ *удовлетворяет условиям* $(\mathscr{H}1)\div(\mathscr{H}4)$ *и* $(\mathscr{H}3')$ *работы* [16], *а оператор* $P(\psi;.)$ *принадлежит соответствующему классу* π.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

а) Из равенств (3), (4) и неравенства (6) следует

$$(11) \qquad \| A(\widehat{\psi}; u) \|_* \leqq [2^{p-1}Nc_1 \| u \|^p + 2^{p-1}Nc_1 \| \psi \|^p + NM_1(Q)]^{(p-1)/p}.$$

Следовательно, выполнено условие $(\mathscr{H}1)$ с $\lambda(s)=(2^{p-1}c_1N)^{(p-1)/p}s^p$ и $c_1=[2^{p-1}Nc_1 \| \widehat{\psi} \|^p + NM_1(Q)]^{(p-1)/p}$.

б) Из неравенства (7) следует, что для $A(\widehat{\psi};.)$ выполнено условие коэрцитивности $(\mathscr{H}2)$ с $\lambda_2(s)=d_0 s^{p-1}$ и $c_2=d_1 \| \widehat{\psi} \| + d_2 M(Q)$.

в) Из неравенства (8) следует, что для любых u и v из $\mathscr{V}$

$$[A(\widehat{\psi}; u)-A(\widehat{\psi}; v), u-v]_{s,\tau} \geqq c_3 \sum_{|\alpha|\leqq m} \iint_{[s,\tau)\times\Omega} |D^\alpha(u-v)|^p dxdt.$$

Следовательно, монотонный оператор $A(\widehat{\psi};)$ удовлетворяет условию $(\mathscr{H}3)'$ с $\mu(s=c_3 s^{p-1}$. Из теорем вложения (см. [18]) и теоремы 5.1 из [19], с. 70 следует, что вложение пространства $\mathscr{W}(Q)$ в $L^p(Q)$ компактно. Следовательно, условие $(\mathscr{H}3)$ выполнено с функцией $\mu_1(s_1, s_2)=c_3 s_2^p$ и $\| . \|'=\| . \|_{L^p(Q)}$.

г) Из неравенства (9) следует, что

$$[A(\widehat{\psi}; u)-A(\widehat{\psi}; v), w] \leqq \| w \| \mu_4(\| \widehat{\psi}+\partial u \|, \| \widehat{\psi}+\partial v \|, [A(\widehat{\psi}; u)-A(\widehat{\psi}, v), u-v]).$$

Следовательно, выполнено условие $(\mathscr{H}4)$ с функцией

$$\mu_2(s_1, s_2, s_3)=\{Nc_4[\iint_Q [\mu_3+2^p \sum_{|\alpha|\leqq m} |\psi_\alpha|^p)dxdt+2^{p-1}(s_1^p+s_2^p)]^s (s_3/c_3)^{1-s}\}^{(p-1)/p}.$$

д) При помощи теоремы Фубини можно проверить, что для любого $u \in \mathscr{V}(Q)$ и $d_j=\text{const}>0$ функции

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(t, x, \widehat{\psi}+\partial u)D^\alpha u dx \quad \text{и} \quad \int_\Omega (d_1 \sum_{|\alpha|\leqq m} |\psi_\alpha|^p + d_2(\mu_1+\mu_2))dx$$

определены для п. в. t на интервале $[0, T]$ и суммируемы. Тогда, пользуясь условием (H2) и неравенством Юнга, проверяем, что для п. в. $t \in [0, T]$

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(t, x, \widehat{\psi}+\partial u)D^\alpha u dx \geqq -d(t),$$

где $d(t)=\int_\Omega [d_1 \sum_{|\alpha|\leqq m} |\psi_\alpha|^p + d_2(\mu_1+\mu_2)]dx$, а постоянные d_j определены в предложении 1.

Из доказанных неравенств пунктов а) $\div$ д) следует, что оператор $P(\psi_j\,.)$ удовлетворяет требований определения 1 работы [16], что завершает доказательство предложения 2.

Лемма 1. *Пусть вектор* $\{a_\alpha(t, x, \zeta); |\alpha|\leqq m\}$ *удовлетворяет условиям* (H1)$\div$(H4). *Тогда выполнены следующие утверждения:*

а) *Для любого фиксированного* $\psi \in X$ *существует оператор*

$$P^{-1}(\psi;.): \mathscr{V}'(Q)\to \mathscr{W}_0(Q),$$

обратный к оператору $P(\psi;.)$.

б) *Для любого* $(\psi, f) \in X\times\mathscr{V}'$ *выполнены неравенства*

$$\| P^{-1}(\psi; f)\|^p \leqq d_3\mu_5(\|f\|_*, \|\psi_{-1}\|_*, \|\widehat{\psi}\|), \tag{12}$$

$$\left\| \frac{d}{dt} P^{-1}(\psi; f)\right\|_*^{p'} \leqq d_4\mu_5(\|f\|_*, \|\psi_{-1}\|_*, \|\widehat{\psi}\|), \tag{13}$$

где $\mu_5(s_1, s_2, s_3)=s_1^{p'}+s_2^{p'}+s_3^p+\|\mu_1+\mu_2\|_{L^1(Q)}$ *и постоянные* d_4 *и* d_3 *зависят только от* c_1, c_2, p *и* N.

в) *Существует функция* $c(s)>0$, *зависящая только от параметров условий* (H1)$\div$(H4), *и монотонно возрастающие непрерывные функции* $\nu_1(s)$ *и* $\nu_2(s)$, *такие, что* $\nu_j(0)=0$ *и*

$$\| P^{-1}(\psi; f) - P^{-1}(\aleph, g)\|_0 \leqq c(r)\{\nu_1(\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|)+\nu_2(\|f-g\|_*)+\nu_2(\|\psi_{-1}+\aleph_{-1}\|_*)\}, \tag{14}$$

где $r\geqq \max\{\|\widehat{\psi}\|, \|\widehat{\aleph}\|, \|f\|_*, \|g\|_*, \|\psi_{-1}\|_*, \|\aleph_{-1}\|_*\}$.

Доказательство. а) Фиксируем произвольный элемент $\psi=(\psi_{-1}, \widehat{\psi})$ пространства $X=\mathscr{V}'\times(L^p(Q))^N$. Рассмотрим оператор

$$\mathscr{P}_1(u)=\frac{\partial u}{\partial t}+A(\widehat{\psi}; u).$$

Из предложения 2 и леммы 5 работы [16] следует, что существует обратный оператор $\mathscr{P}_1^{-1}: \mathscr{V}'\to\mathscr{W}_0$. Тогда определяем для любого f из $\mathscr{V}'$

$$P^{-1}(\psi; f)=\mathscr{P}_1^{-1}(f-\psi_{-1}).$$

Легко проверить, что оператор $P^{-1}(\psi;.)$ является обратным к оператору. $P(\psi;.)$.

б) Пусть $(\psi, f)\in X\times\mathscr{W}$ — произвольный фиксированный элемент. Из пункта а) следует, что $P^{-1}(\psi; f)=u\in\mathscr{W}_0$. При помощи неравенства (7) проверяем, что

$$d_0\|u\|^p-d_1\|\widehat{\psi}\|^p-d_2 M(Q)\leq [A(\widehat{\psi}, u), u]$$

$$\leq [P(\psi; u), u]-[\psi_{-1}, u]-\left[\frac{du}{dt}, u\right]\leq \|f\|_*\|u\|+\|\psi_{-1}\|_*\|u\|.$$

Тогда неравенство Юнга завершает доказательство неравенства (12).

Неравенство (13) следует из неравенств (11), (12) и

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_*^{p'} \leq (\|f\|_*+\|\psi_{-1}\|_*+\|A(\widehat{\psi}; u)\|_*)^{p'}.$$

в) Пусть (ψ, f) и $(\aleph, g)$ принадлежат шару $Ш(r)=\{(\psi; f): \|\psi\|+\|f\|_*<r\}$. Из пункта а) следует, что элементы $u=p^{-1}(\psi; f)$ и $v=P^{-1}(\aleph, g)$ принадлежат пространству $\mathscr{W}_0$. По определению

$$\|P^{-1}(\psi; f)-P^{-1}(\aleph; g)\|_0=\mathscr{I}_1+\mathscr{I}_2,$$

где $\mathscr{I}_1=\|\frac{d}{dt}(u-v\|_*$ и $\mathscr{I}_2=\|u-v\|$.

Для оценки $\mathscr{I}_1$ мы воспользуемся неравенствами (10) и (12). Получаем

$$\mathscr{I}_1\leqq\|(f-\psi_{-1})-(g-\aleph_{-1})\|_*+\|A(\widehat{\psi}; u)-A(\widehat{\aleph}: v)\|_* \tag{15}$$

$$\leqq\|f-g\|_*+\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|_*+\theta(\|\widehat{\psi}+\partial u\|, \|\widehat{\aleph}+\partial v\|)\|\widehat{\psi}+\partial u-(\widehat{\aleph}+\partial v)\|^{(p-1)(1-s)}$$

$$\leqq\|f-g\|_*+\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|_*+c_1(r)(\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|^{(p-1)(1-s)}+\mathscr{I}_2{}^{(p-1)(1-s)}),$$

где функция $c_1(r)$ зависит только от $N, p, s, c_1, c_2, c_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3$. Из неравенств (6) и (8) следует, что

$$[(f-\psi_{-1})-(g-\aleph_{-1}), u-v]\geqq c_2\|(\widehat{\psi}+\partial u)-(\aleph+\partial v)\|^p$$

$$-\{[N(M_1(Q_1)+c_1\|\widehat{\psi}+\partial u\|^p)]^{(p-1)/p}+[N(M_1(Q_1)+c_1\|\widehat{\aleph}+\partial v\|^p]^{(p-1)/p}\}\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|.$$

Кроме того, при помощи неравенства Юнга находим $\tilde{c}=\mathrm{const}>0$, такую, что

$$|[(f-\psi_{-1})-(g-\aleph_{-1}), u-v]|\leqq(c_2/2^p)\|u-v\|^p+\tilde{c}(\|f-g\|_*^{p'}+\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|_*^{p'}).$$

Следовательно, легко проверить, что существует функция $c_2(r)$, зависящая только от $N, p, s, c_1, c_2, c_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, такая, что

$$\mathscr{I}_2\leqq c_2(r)\{[\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|^p+\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|]^{1/p}+\|f-g\|_*^{1/(p-1)}+\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|^{1/(p-1)}\}.$$

Тогда при помощи неравенства (15) доказываем, что существует функция $c(s)$, зависящая только от $N, p, s, c_1, c_2, c_3, c_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, такая, что

$$\mathscr{I}_1+\mathscr{I}_2\leqq c(r)\{\nu_1(\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|)+\nu_2(\|f-g\|_*)+\nu_2(\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|_*)\},$$

где $\nu_1(s)=s^{(p-1)(1-s)}+[s^p+s]^{1/p}+[s^p+s]^{(p-1)(1-s)/p}, \nu_2(s_1)=s_1+s_1^{1/(p-1)}+s_1^{1-s}$ и (ψ, f) и $(\aleph, g)$ произвольные элементы шара $Ш(r)$. Лемма 1 доказана.

Для простоты формулирования следующей леммы мы введем некоторые обозначения. Пусть $Q_1=(\tau, s]\times\Omega_1$ является произвольной цилиндрической подобластью области Q. Через $\|.\|_1$ обозначим норму пространства $\mathscr{Z}(Q_1)$, т. е.

$$\|u\|_1=\|u\|_{L^p(\tau,s;W^{m,p}(\Omega_1))}+\|\frac{du}{dt}\|_{L^{p'}(\tau,s;W^{-m,p'}(\Omega_1))}.$$

Кроме того, значение функционала $f\in\mathscr{V}'(Q_1)$ на елементе $u\in\mathscr{V}(Q_1)$ будем обозначать через $[f, u]_1$.

Лемма 2. *Пусть заданы последовательность операторов $\{P_k\}$ из класса $\Pi(c_1, c_2, c_3, c_4, s, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ и две последовательности функции $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ из пространства $\mathscr{Z}(Q_1)$ со следующими свойствами:*

1) *существует $M=\mathrm{const}>0$, такая, что $\sup_k\{\|u_k\|_1, \|v_k\|_1\}\leqq M$;*

2) $\omega_k=u_k-v_k\in C(\tau, s; L^2(\Omega_1))$ *и* $\lim\omega_k(\tau)=0$;

3) $\lim\omega_k=0$ *в слабой топологии пространства $Z(Q_1)$;*

4) $\lim_k P_k(\psi; u_k)=f$ *и* $\lim_k P_k(\psi: v_k)=g$ *в $\mathscr{V}'(Q_1)$. Тогда*

а) $\lim\limits_{k} \omega_k = 0$ *в* $L^p(\tau,\ s;\ W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega))$;

б) *если функции* $b_k(t, x, \zeta)$ *удовлетворяют условиям* (H1) *и* (H4), *то* $\lim [b_k(t, x, \partial u_k) - b_k(t, x, \partial v_k)] = 0$ *в слабой топологии пространства* $L^{p'}(Q_1)$.

в) $f = g$ *как элементы пространства* $L^{p'}(Q_1)$.

Доказательство. Пусть оператор $P_k(\psi;.)$ задается при помощи коэффициентов $\{a^k_\alpha(t, x, \zeta);\ |\alpha| \leq m\}$ и вектора $\psi \in X$.

а) Фиксируем произвольную функцию $\varphi \in C^\infty_0(\Omega_1)$ и $0 \leq \varphi \leq 1$. Если воспользуемся обозначением

$$\Delta^k_\alpha = a^k_\alpha(t, x, \widehat{\psi} + \partial u_k) - a^k_\alpha(t, x, \widehat{\psi} + \partial v_k),$$

то легко проверить, что

$$[P_k(\psi;\ u_k) - P_k(\psi;\ v_k),\ \ \varphi(x) w_k]_1 = [\frac{dw_k}{dt},\ \varphi(x) w_k]_1$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leq m} \iint_{Q_1} \Delta^k_\alpha . D^\alpha(\varphi w_k) dx dt = \mathscr{I}^k_1 + \mathscr{I}^k_2 + \mathscr{I}^k_3,$$

где $\mathscr{I}^k_1 = [\frac{dw_k}{dt},\ \varphi(x) w_k]_1$, $\quad \mathscr{I}^k_3 = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \iint\limits_{Q_1} \varphi(x) \Delta^k_\alpha . D^\alpha w dx dt,$

$$\mathscr{I}^k_2 = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \iint_{Q_1} \Delta^k_\alpha \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| \geq 1}} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi . D^{\alpha-\beta} w_k dx dt$$

и $\binom{\alpha}{\beta} = \prod\limits_{j=1}^{n} (\alpha_j!)/(\beta_j!(\alpha_j - \beta_j)!)$.

Так как из леммы 2 работы [16] следует, что для любого k

$$-\mathscr{I}^k_1 \leq \| w(\tau) \sqrt{\varphi} \|^2_{L_2(\Omega_1)},$$

то при помощи условия (H3) получаем

$$0 \leq c_3 \iint_{Q_1} \varphi . \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha(u_k - v_k)|^p dx dt \tag{16}$$

$$\leq [P_k(\psi;\ u_k) - P_k(\psi;\ v_k),\ \varphi(x) w_k]_1 + \| w_k(\tau) \sqrt{\varphi} \|^2_{L^2(\Omega_1)} - \mathscr{I}^k_2.$$

Докажем, что любое слагаемое правой части этого неравенства имеет предел 0 при $k \to \infty$.

Заметим, что из условия (3) леммы следует, что $\varphi w_k \xrightarrow{\mathscr{V}(Q_1)} 0$. Тогда, пользуясь условием (4) и теоремой 28 из [20] (см. [3], с. 21), получаем

$$\lim_k [P_k(\psi;\ u_k) - P_k(\psi,\ v_k),\quad \varphi(x) w_k]_1 = 0. \tag{17}$$

Для любых мультииндексов β и α, таких, что $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \geq 1$ и $\beta \leq \alpha$, рассмотрим последовательность линейных операторов $\{L^{\beta,\alpha}_k(v)\}$, где $L^{\alpha,\beta}_k(v) = \iint\limits_{Q_1} \Delta^k_\alpha (D^\beta \varphi) v\, dx dt$.

При помощи неравенства Гельдера, предположения (H1) и условия (1) леммы, доказываем, что

$$|L^{\alpha,\beta}_k(v)| \leq c \| v \|_{L^p(Q_1)}, \tag{18}$$

где $C = \tilde{c}\{M + \| \widehat{\psi} \|^p + \iint\limits_{Q_1} \mu_1 dx dt\}^{(p-1)/p}$ и $\tilde{c} = \mathrm{const} > 0$.

зависящая только от параметров класса П. Кроме того, пользуясь леммой о компактности из [19] с. 70, можно доказать, что отображение $D^\gamma\colon \mathscr{L}(Q_1)\to L^p(Q_1)$ компактно при $|\gamma|\leqq m-1$. Следовательно,

(19) $$D^{\alpha-\beta}w_k \xrightarrow{L^p(Q_1)} 0.$$

Из свойств (18) и (19) следует, что

(20) $$\lim_k \mathscr{I}_2^k = 0.$$

Учитывая неравенства (16), (17), (20) и предположение (2) леммы мы доказываем, что

(21) $$\lim_k \iint_{Q_1} \varphi \sum_{|\alpha|\leqq m} |D^\alpha w_k|^p dxdt = 0.$$

б) Для краткости воспользуемся обозначением $e_k(t, x) = b_k(t, x, \partial u_k) - b_k(t, x, \partial v_k)$. Утверждение б) леммы будет доказано, если проверим, что

(22) $$\lim e_k(t, x) = 0$$

по мере в Q_1 и

(23) $$\| e_k(t, x)\|_{L^2(Q_1)} \leqq M_1,$$

где постоянная M_1 не зависит от k.

Для любого измеримого $Q'\subset Q_1$ из предложения (H4) следует

(24) $$\iint_{Q'} |e_k(t, x)|^{p'} dtdx \leqq M_2 \Big[\iint_{Q'} \sum_{|\alpha|\leqq m} |D^\alpha w_k|^p dxdt\Big]^{1-s},$$

где $M_2 = c_4\big[\iint_{Q_1} \mu_3 dxdt + 2M^p\big]^s$.

Предположим, что $\sum_{|\alpha|\leqq m} |D^\alpha w_k(t, x)|^p \leqq r$ для любого $(t, x)\in Q'$. Обозначим

$$Q'_q = \{(t, x);\ (t, x)\in Q' \text{ и } q \leqq |e_k(t, x)|\}.$$

Тогда из (24) сразу следует

(25) $$\operatorname{mes} Q'_q \leqq M_2 [r \,.\, \operatorname{mes} Q']^{1-s} \,.\, q^{-1}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ — произвольные числа. Через Q^2 обозначим измеримое множество, такое, что $Q^2 \Subset Q_1$, $\operatorname{mes}(Q_1 \setminus Q^2) < \delta/3$ и $D^\alpha w_k \xrightarrow{L^p(Q^2)} 0$ для $|\alpha|\leqq m$. (Множество Q^2 существует благодаря равенству (21).) Тогда $D^\alpha w_k \to 0$ по мере в Q^2 для $|\alpha|\leqq m$. Следовательно, для чисел $\delta/3$ и $r = (\varepsilon\delta/3)^{1/(1-s)}(\operatorname{mes} Q_1)^{-1}$, существует $N_1(\varepsilon, \delta)$, такое, что

(26) $$\operatorname{mes}(Q^2 \setminus Q^k_{\varepsilon,\delta}) < \delta/3, \quad \text{для } k < N_1,$$

где $Q^k_{\varepsilon,\delta} = \{(t, x)\in Q^2 \text{ и } \sum_{|\alpha|\leqq m} |D^\alpha w_k(t, x)|^p \leqq r\}$.

Определяем: $Q^k_\varepsilon = \{(t, x)\in Q^k_{\varepsilon,\delta} \text{ и } |e_k(t, x)| \geqq \varepsilon\}$. Из неравенства (25) следует $\operatorname{mes} Q^k_\varepsilon \leqq M_2(r \,.\, \operatorname{mes} Q^k_{\varepsilon,\delta})^{1-s}\varepsilon^{-1} \leqq \delta/3$. Тогда, если $Q^k = \{(t, x);\ |e^k(t, x)| \geqq \varepsilon,\ (t, x)\in Q_1\}$ то для любого $k > N_1(\varepsilon, \delta)$ выполнено

$$\operatorname{mes} Q^k \leqq \operatorname{mes} Q^k_\varepsilon + \operatorname{mes}(Q^2 \setminus Q^k_{\varepsilon,\delta}) + \operatorname{mes}(Q_1 \setminus Q^2) < \delta.$$

Тем самым мы проверили (22).

Неравенство (23) следует из предположения (H1).

в) Из условия (3) леммы следует, что $\frac{dw_k}{dt} \xrightarrow{\mathscr{V}'(Q_1)} 0$. Кроме того, мы уже доказали, что

$$\Delta_\alpha^k \xrightarrow{L^{p'}(Q_1)} 0$$

для любого $|\alpha| \leqq m$ (см. утверждение б) леммы). Следовательно, для любого $w \in \mathscr{V}(Q_1)$, в равенстве

$$[P_k(\psi;\, u_k) - P_k(\psi;\, v_k),\ w]_1 = [\frac{dw_k}{dt},\ w]_1 + \sum_{|\alpha| \leqq m} \iint_{Q_1} \Delta_\alpha^k D^\alpha w\, dx dt,$$

если устремим $k \to \infty$, получаем $[f-g, w]_1 = 0$, что и завершает доказательство леммы.

3. G-сходимость дифференциальных операторов. Сначала мы рассмотрим вопрос о G-компактности классов П.

Теорема 1. *Пусть последовательность операторов $\{P_k\}$ принадлежит классу $\Pi(c_1, c_2, c_3, c_4, s, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Тогда существуют подпоследовательность $\{P_{k'}\}$ и квазилинейный параболический оператор P, такие, что $P_{k'} \Rightarrow P$ и $P \in \Pi_1(d, c_2, c_3, c, sp/(sp-s+1), \mu_1^1, \mu_2, \mu_1^1)$, где $\mu_1^1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, а постоянные d и c зависят только от параметров класса* П.

Доказательство. Доказательство проводится в 9 этапов.

Этап 1. Пусть для любого k, P_k задается при помощи вектора $\{a_\alpha^k(t, x, \zeta);\ |\alpha| \leqq m\}$. Пользуясь леммой 1 мы определяем последовательность операторов $P_k^{-1}(\,.\,,\,.\,)\colon X \times \mathscr{V}' \to \mathscr{W}_0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Из утверждений б) и в) леммы 1 следует, что операторы P_k^{-1} равномерно ограничены и равностепенно по k равномерно непрерывны на любом шаре из $X \times \mathscr{V}'$. Кроме того, $X \times \mathscr{V}'$ является сепарабельным банаховым пространством, а пространство $\mathscr{W}_0$ — рефлексивно. Тогда при помощи леммы 4 работы [16] доказываем, что существуют подпоследовательность $\{P_{k'}^{-1}\}$ и равномерно деминепрерывный на любом шаре из $X \times \mathscr{V}'$ оператор, F, такие, что

$$P_{k'}^{-1}(\psi;\, f) \xrightarrow{\mathscr{W}} F(\psi;\, f), \tag{27}$$

для любого $(\psi, f) \in X \times \mathscr{V}'$.

Далее мы ответим на следующий вопрос. Существует ли оператор $F^{-1}(\psi;.)\colon \mathscr{W}_0 \to \mathscr{V}'$ и какова его структура? Пусть $\psi = (\psi_{-1}, \widehat{\psi})$ — произвольный фиксированный элемент пространства X. Обозначим $\psi' = (0, \widehat{\psi})$. Из предположения 1 следует, что последовательность $\{P_{k'}(\psi', u)\}$ удовлетворяет требованиям теоремы 1 работы [16] с функцией $\tau(s) = d_6(1 - c_1/s)(s - c_1)^{\frac{1}{p-1}}$. Следовательно, существуют подпоследовательность $\{P_{k''}(\psi';)\}$ и абстрактный параболический оператор $\mathscr{P}_1(\psi';.) = d/dt + \mathscr{A}_1(\widehat{\psi};.)$, такие, что

$$P_{k''}(\psi';.) \to \mathscr{P}_1(\psi';.)$$

и оператор $\mathscr{A}_1(\widehat{\psi};.)$ удовлетворяет условиям $(\mathscr{H}1) \div (\mathscr{H}4)$ работы [16]. Тем самым мы доказали, что для любой функции $f \in \mathscr{V}'(Q)$ существуют $P_{k''}^{-1}(\psi';f)$ и $\mathscr{P}_1^{-1}(\psi';f)$, причем

$$P_{k''}^{-1}(\psi';\, f) \xrightarrow{\mathscr{W}} \mathscr{P}_1^{-1}(\psi';\, f).$$

Тогда из (27) следует, что $\mathscr{P}_1^{-1}(\psi'\,;\, f)=F(\psi'\,;\, f)$ и

$$P_{k'}^{-1}(\psi'\,;\, f)\xrightarrow{\mathscr{W}}\mathscr{P}_1^{-1}(\psi'\,;\, f)=F(\psi'\,;\, f).$$

Кроме того, для любого $\psi\in X$ имеет место равенство $P_k^{-1}(\psi\,;\, f)=P_k^{-1}(\psi'\,;\, f-\psi_{-1})$. Следовательно,

(28) $$F(\psi\,;\, f)=F(\psi'\,;\, f-\psi_{-1}) \text{ и } F^{-1}(\psi'\,;\, u)=\mathscr{P}_1(\psi'\,;\, u).$$

Тогда существует $F^{-1}(\psi,.)\colon \mathscr{W}_0\to\mathscr{V}'$ и

(29) $$F^{-1}(\psi\,;\, u)=\mathscr{P}_1(\psi'\,;\, u)+\psi_{-1}=\frac{du}{dt}+\psi_{-1}+\mathscr{A}_1(\widehat{\psi}\,;\, u).$$

В частности мы доказали, что

(30) $$P_{k'}\to\mathscr{P}_1(0\,;.)=\frac{d}{dt}+\mathscr{A}_1(0\,;.).$$

Далее подпоследовательность $\{k')$ снова будем обозначать через $\{k\}$.

Этап 2. Свойства операторов F и $\mathscr{A}_1(\widehat{\psi}\,;.)$. При помощи леммы 1 и равенств (6) легко проверяется, что для (ψ, f) и $(\aleph, g)$ из $X\times\mathscr{V}'$ и $u\in\mathscr{W}_0$ имеет место

(31) $$\| F(\psi\,;f)\|_0\leqq[d_3\mu_5(\| f\|_*, \|\psi_{-1}\|_*, \|\widehat{\psi}\|)]^{1/p}+[d_4\mu_5(\| f\|_*, \|\psi_{-1}\|_*, \|\widehat{\psi}\|)]^{(p-1)/p},$$

(32) $$\| F(\psi\,;\, f)-F(\aleph\,;\, g)\|_0\leqq c(r)\{\nu_1(\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|)+\nu_2(\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|_*)+\nu_2(\| f-g\|_*)\},$$

(33) $$F(\psi\,;\, f)=F(\psi+\delta u\,;\, f)+u,$$

где d_3, d_4, μ_5 и $c(r)$ определены в лемме 1.

Заметим, что из равенств (33) и (29) сразу следует

(34) $$\mathscr{A}_1(\widehat{\psi},\, u+v)=\mathscr{A}_1(\widehat{\psi}+\partial u,\, v)$$

для любых $\widehat{\psi}\in(L^p(Q))^N$ и u и v из $\mathscr{W}_0$.

Кроме того существуют зависящие только от параметров класса П положительные постоянные d_5 и d_6, такие, что

(35) $$\|\mathscr{A}_1(\widehat{\psi}\,;\, u)\|_*^{p'}\leqq d_5(\|\widehat{\psi}\|^p+\| u\|^p)+d_6M(Q).$$

Доказательство неравенства (35) можно получить, если воспользуемся предложением 2 и теоремы 1 работы [16]. Пусть $u\in\mathscr{W}_0$, $f=\mathscr{P}_1(\psi'\,;\, u)$ и $u_k=P_k^{-1}(\psi'\,;\, f)$. Из предложения 2 и теоремы 1 работы [16] следует, что существует подпоследовательность $\{k'\}$, такая, что $A_{k'}(\psi\,;\, u_{k'})\xrightarrow{\mathscr{V}'}\mathscr{A}(\widehat{\psi}\,;\, u)$,

$$\|\mathscr{A}_{k'}(\widehat{\psi}\,;\, u_{k'})\|_*^{p'}\leqq c(\| u_{k'}\|^p+\|\widehat{\psi}\|^p+M(Q)) \text{ и } [A_{k'}(\widehat{\psi}\,;\, u_{k'}), u_{k'}]\geqq d_0\| u_{k'}\|^p-d_1\|\widehat{\psi}\|^p-d_2M(Q).$$

Тогда, если $\|\mathscr{A}_1(\widehat{\psi}\,;\, u)\|_*^{p'}\geqq 2c(\|\widehat{\psi}\|^p+M(Q))$, то для некоторой подпоследовательности $\{k''\}$

$$[A_{k''}(\widehat{\psi}\,;\, u_{k''}),\, u_{k''}]\geqq(d_0/2C)\| A_{k''}(\widehat{\psi}\,;\, u_{k''})\|_*^{p'}-d_1\|\widehat{\psi}\|^p-d_2M(Q).$$

Из этого неравенства легко получается неравенство (35).

Этап 3. Определение операторов $\mathscr{P}$, A и r_k. При помощи абстрактных операторов $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{A}_1$ определяем

$$\mathscr{P}(\psi)=F^{-1}(\psi\,;\,0) \text{ и } \mathscr{A}(\widehat{\psi})=\mathscr{A}_1(\widehat{\psi}\,;\,0) \quad \text{для } \psi\in X, \tag{36}$$

$$P(u)=\mathscr{P}(\delta u) \text{ и } A(u)=\mathscr{A}(\partial u) \quad \text{для } u\in Z(Q), \tag{37}$$

$$r_k(\psi)=\psi+\delta(P_k^{-1}(\psi:\,\mathscr{P}(\psi))) \quad \text{для } \psi\in X. \tag{38}$$

При помощи равенств (29), (34), (36) и (37) легко заметить, что оператор $P(\,.\,)$ $(A(\,.\,))$ доопределяет оператор $\mathscr{P}_1(0,.)$ (соответственно $\mathscr{A}_1(0\,;.)$) на множестве $Z(Q)$, т. е. $\mathscr{P}(\psi)=\psi_{-1}+\mathscr{A}(\widehat{\psi})$ для любого $\psi\in X$ и

$$P(u)=\frac{\partial u}{\partial t}+A(u) \text{ и } A(u)=\mathscr{A}(0\,;\,u) \text{ для любого } u\in\mathscr{W}_0. \tag{39}$$

Из неравенства (35) следует, что для любого $\psi\in X$

$$\|\mathscr{A}(\widehat{\psi})\|_*^{p'}\leq d_5\|\widehat{\psi}\|^p+d_5M(Q), \tag{40}$$

$$\|\mathscr{P}(\psi)\|_*^{p'}\leq d_7(\|\psi_{-1}\|_*^{p'}+\|\widehat{\psi}\|^p+M(Q)), \tag{41}$$

где $d_7=\mathrm{const}>0$, зависящая только от параметров класса П.

Рассмотрим свойства оператора $r_k(\,.\,)$.

При помощи леммы 1 и неравенства (41) проверяем, что

$$\|\widehat{r}_k(\psi)\|^p\leq d_8(\|\psi_{-1}\|_*^{p'}+\|\widehat{\psi}\|^p+M(Q)), \tag{42}$$

$$\|r_k(\psi)\|_X\leq d_9[(\|\psi_{-1}\|_*^{p'}+\|\widehat{\psi}\|^p+M(Q))^{1/p}+(\|\psi_{-1}\|_*^{p'}+\|\widehat{\psi}\|^p+M(Q))^{1/p'}], \tag{43}$$

где постоянные d_8 и d_9 зависят только от параметров класса П.

Для краткости обозначим

$$\Phi_k(\psi)=P_k^{-1}(\psi\,;\,\mathscr{P}(\psi)). \tag{44}$$

Если через $\mathscr{P}_k(.\,;.)$ обозначим операторы, которые определяются при помощи векторов $\{a_\alpha^k(t,\,x,\,\zeta);\,|\alpha|\leq m\}$ и равенств (3), то $\mathscr{P}_k(0,\,r_k(\psi))=\mathscr{P}(\psi)$ и

$$\Phi_k(\psi)\xrightarrow{\mathscr{W}}0. \tag{45}$$

В самом деле, из равенств (3) и (4) следует

$$\mathscr{P}_k(0,\,r_k(\psi))=\mathscr{P}_k(\psi\,;\,\delta(P_k^{-1}(\psi\,;\,\mathscr{P}(\psi))))=P_k(\psi:\,\Phi_k(\psi))=P_k(\psi\,;\,P_k^{-1}(\psi\,;\,\mathscr{P}(\psi)))=\mathscr{P}(\psi) \tag{46}$$

Кроме того, из равенств (27) и (36) получаем

$$\Phi_k(\psi)=P_k^{-1}(\psi\,;\,\mathscr{P}(\psi))\xrightarrow{\mathscr{W}}F(\psi\,;\,\mathscr{P}(\psi))=F(\psi\,;\,F^{-1}(\psi\,;\,0))=0.$$

Этап 4. Непрерывность оператора $\mathscr{P}$ и равностепенная по k непрерывность операторов $r_k(\,.\,)$.

а) Сначала докажем, что существует монотонно возрастающая функция $c_1(r)$, зависящая только от параметров класса П, такая, что

$$\|\mathscr{P}(\psi)-\mathscr{P}(\aleph)\|_*\leq\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|_*+c_1(r)\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|^{(p-1)(1-s)/(ps+1-s)}, \tag{47}$$

где $r\geq\max\{\|\psi_{-1}\|_*,\,\|\aleph_{-1}\|_*,\,\|\widehat{\psi}\|,\,\|\widehat{\aleph}\|\}$.

Действительно, если положим $f=\mathscr{P}(\psi)-\mathscr{P}(\aleph)$, то из (45) и (46) следует

$$\begin{aligned}[f,\,\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)]&=[P_k(\psi:\,\Phi_k(\psi))-P_k(\aleph\,;\,\Phi_k(\aleph)),\,\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)]\\&=[d/dt\,(\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)),\,\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)]+[\psi_{-1}-\aleph_{-1},\,\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)]+J_k,\end{aligned}$$

где $\mathscr{I}_k=[\mathscr{A}_k(0;\ \widehat{\psi}+\partial\Phi_k(\psi))-\mathscr{A}_k(0;\ \widehat{\aleph}+\partial\Phi_k(\aleph)),\ \Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)]$. Тогда при помощи неравенств (8) и (10) получаем

$$\mathscr{I}_k\geqq c_3\|\widehat{r}_k(\psi)-\widehat{r}_k(\aleph)\|^p-\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|\,\theta(\|\widehat{r}_k(\psi)\|,\ \|\widehat{r}_k(\aleph)\|)\|\widehat{r}_k(\psi)-\widehat{r}(\aleph)\|^{(p-1)(1-s)},$$

где $\theta(s_1,\ s_2)=\{Nc_4[\iint\limits_Q \mu_3 dxdt+s_1^p+s_2^p]^s\}^{(p-1)/p}$.

Оценим второе слагаемое при помощи неравенства Юнга и получим

$$[f+\aleph_{-1}-\psi_{-1},\ \Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)]\geqq\mathscr{I}_k\geqq(c_3/2)\|\widehat{r}_k(\psi)-\widehat{r}_k(\aleph)\|^p$$
$$-d.\{\|\psi-\widehat{\aleph}\|\,\theta(\|\widehat{r}_k(\psi)\|,\ \|\widehat{r}_k(\aleph)\|)\}^{p/(ps+1-s)}.$$

Следовательно, существуют постоянные d_{10} и d_{11} (зависящие только от параметров класса П), такие, что

$$\|\widehat{r}_k(\psi)-\widehat{r}_k(\aleph)\|^p\leqq d_{10}[f+\aleph_{-1}-\psi_{-1},\ \Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)]\tag{48}$$
$$+d_{11}\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|^{p/(ps+1-s)}(K(Q)+\|\psi_{-1}\|_*^{p'}+\|\aleph_{-1}\|_*^{p'}+\|\widehat{\psi}\|^p+\|\widehat{\aleph}\|^p)^{(s(p-1)/ps+1-s},$$

где $K(Q)=\iint\limits_Q(\mu_1+\mu_2+\mu_3)dxdt$.

Пусть ω — произвольный элемент пространства $\mathscr{V}(Q)$. При помощи неравенств (10) и (48) проверяем, что

$$[\mathscr{A}_k(0;\ \widehat{\psi}+\partial\Phi_k(\psi))-\mathscr{A}_k(0;\ \widehat{\aleph}+\partial\Phi_k(\aleph)),\ \omega]\leqq\|\omega\|\,\theta(\|\widehat{r}_k(\psi)\|,$$
$$\|\widehat{r}_k(\aleph)\|)\|\widehat{r}_k(\psi)-\widehat{r}_k(\aleph)\|^{(p-1)(1-s)}\leqq I_k,$$

где $I_k=\|\omega\|\,\theta_1\{d_{10}[f+\aleph_{-1}-\psi_{-1},\ \Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)]+\theta_2.\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|^{p/(ps+1-s)}\}^{(p-1)(1-s)/p}$,

$$\theta_1=\{Nc_4[K(Q)+d_8(\|\psi_{-1}\|_*^{p'}+\|\aleph_{-1}\|_*^{p'}+\|\widehat{\aleph}\|^p+\|\widehat{\psi}\|^p+2M(Q))]^s\}^{(p-1)/p}$$

и $\theta_2=d_{11}(K(Q)+\|\psi_{-1}\|^{p'}+\|\aleph_{-1}\|^{p'}+\|\widehat{\psi}\|^p+\|\widehat{\aleph}\|^p)^{s(p-1)/(ps+1-s)}$.

Тогда $[f,\ \omega]\leqq[d/dt(\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph)),\ \omega]+[\psi_{-1}-\aleph_{-1},\ \omega]+I_k$. В полученном неравенстве устремляем $k\to\infty$ и доказываем неравенство (47) с функцией $c_1(r)$, которая определяется при помощи $\theta_1.\theta_2^{(p-1)(1-s)/p}$.

б) Равномерная непрерывность операторов r_k. При помощи леммы 1 и неравенства (41) находим функции $c(s)$, $\nu_1(s)$ и $\nu_2(s)$, такие, что

$$\|r_k(\psi)-r_k(\aleph)\|\leqq\|\psi-\aleph\|+\|P_k^{-1}(\psi;\ \mathscr{P}(\psi))-P_k^{-1}(\aleph;\ \mathscr{P}(\aleph))\|_0$$
$$\leqq\|\psi-\aleph\|+c(r)\{\nu_1(\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|)+\nu_2(\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|_*)+\nu_2(\|\mathscr{P}(\psi)-\mathscr{P}(\aleph)\|_*)\},$$

где $r\geqq\max\{\|\widehat{\psi}\|,\ \|\widehat{\aleph}\|,\ \|\psi_{-1}\|_*,\ \|\aleph_{-1}\|_*,\ [d_7(\|\psi_{-1}\|_*^{p'}+\|\widehat{\psi}\|^p+M(Q))]^{1/p'},\ [d_7(\|\aleph_{-1}\|_*^{p'}+\|\widehat{\aleph}\|^p+M(Q))]^{1/p'}$. Если продолжим это неравенство при помощи (47), докажем, что

$$\|r_k(\psi)-r_k(\aleph)\|\leqq\|\psi-\aleph\|+c(r)\{\nu_1(\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|)+\nu_2(\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|_*)\tag{49}$$
$$+\nu_2(\|\psi_{-1}-\aleph_{-1}\|_*+c_1(r)\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|^{(p-1)(1-s)/(ps+1-s)})\}.$$

Неравенство (49) доказывает равностепенную по k равномерную непрерывность операторов r_k на любом шаре из X.

Этап 5. Для любого $\psi\in X$ и $|\alpha|\leqq m$ определяем

$$\mathscr{T}_\alpha^k(\psi)=a_\alpha^k(t,\ x,\ \widehat{r}_k(\psi)).$$

Докажем некоторые свойства операторов $\mathcal{T}^k_\alpha(.)$.

а) Равномерная ограниченность. Пользуясь предположением (H1) и неравенством (42), доказываем

$$\|\mathcal{T}^k_\alpha(\psi)\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} \leqq c_1 \|\widehat{r}_k(\psi)\|^p + \iint_Q \mu_1 dx dt \leqq d.(\|\psi_{-1}\|^{p'}_* + \|\widehat{\psi}\|^p + K(Q)), \tag{50}$$

где постоянная $d>0$ и зависит только от параметров класса П.

б) Равностепенная непрерывность. При помощи предположения (H4) проверяем, что

$$\|\mathcal{T}^k_\alpha(\psi) - \mathcal{T}^k_\alpha(\aleph)\|^{p'} \leqq c_4[\iint_Q \mu_3 dx dt + \|\widehat{r}_k(\psi)\|^p + \|\widehat{r}_k(\aleph)\|^p]^s \|\widehat{r}_k(\psi) - \widehat{r}(\aleph)\|^{(1-s)p}. \tag{51}$$

Если продолжим это неравенство при помощи неравенств (49) и (42) докажем, что операторы $\mathcal{T}^k_\alpha(\psi)$, равностепенно по k, равномерно непрерывны на любом ограниченном множестве из X.

в) Определения операторов $\mathcal{T}_\alpha(\psi)$. Для любого α, рассмотрим последовательность операторов $\{\mathcal{T}^k_\alpha(\psi)\}$. Свойства а) и б) доказывают, что применима лемма 4 работы [16] и, следовательно, существуют подпоследовательность (которую снова обозначим через $\{\mathcal{T}^k_\alpha(\psi)\}$) и деминепрерывный оператор $\mathcal{T}_\alpha$, такие, что

$$\mathcal{T}^k_\alpha(\psi) \xrightarrow{L^{p'}(Q)} \mathcal{T}_\alpha(\psi) \text{ для любого } \psi \in X. \tag{52}$$

Тогда, если в (50) перейдем к пределу, получим

$$\|\mathcal{T}_\alpha(\psi)\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} \leqq d.(\|\psi_{-1}\|^{p'} + \|\widehat{\psi}\|^p + K(Q)), \tag{53}$$

кроме того, при помощи неравенств (51), (48) и (42) получаем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}^k_\alpha(\psi) - \mathcal{T}^k_\alpha(\aleph)\|^{p'} \leqq c[\|\psi_{-1}\|^{p'}_* + \|\aleph_{-1}\|^{p'}_* + \|\widehat{\psi}\|^p + \|\aleph\|^p + K(Q)]^s \{[f + \aleph_{-1} - \psi_{-1},\\ \Phi_k(\psi) - \Phi_k(\aleph)] + \|\widehat{\psi} - \widehat{\aleph}\|^{p/(ps+1-s)}(K(Q) + \|\psi_{-1}\|^{p'}_*\\ + \|\aleph_{-1}\|^{p'} + \|\widehat{\psi}\|^p + \|\widehat{\aleph}\|^p)^{s(p-1)/(ps+1-s)}\}^{1-s},\end{aligned}$$

где постоянная C зависит только от параметров класса П. Учитывая (52) и (45), мы получаем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_\alpha(\psi) - \mathcal{T}_\alpha(\aleph)\|^{p'} \leqq C(K(Q) + \|\psi_{-1}\|^{p'}\\ + \|\aleph_{-1}\|^{p'} + \|\widehat{\psi}\|^p + \|\widehat{\aleph}\|^p)^{sp/(sp-s+1)} \|\widehat{\psi} - \widehat{\aleph}\|^{p(1-s)/(sp-s+1)}.\end{aligned}$$

Следовательно, если $\widehat{\psi} = \widehat{\aleph}$ п. в. на Q, то и $\mathcal{T}_\alpha(\psi) = \mathcal{T}_\alpha(\aleph)$ для п. в. $(t, x) \in Q$, т. е. $\mathcal{T}_\alpha(\psi)$ не зависит от ψ_{-1}. Тем самым мы доказали

$$\begin{cases}\|\mathcal{T}_\alpha(\widehat{\psi})\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} \leqq d(\|\widehat{\psi}\|^p + K(Q))\\ \|\mathcal{T}_\alpha(\widehat{\psi})\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} \leqq \mu_5(\|\widehat{\psi}\|, \|\widehat{\aleph}\|).\|\widehat{\psi} - \widehat{\aleph}\|^{p(1-s)/(sp-s+1)},\end{cases} \tag{54}$$

где $\mu_5(s_1, s_2) = c(K(Q) + s_1^p + s_2^p)^{sp/(sp-s+1)}$ и постоянные d и C зависят только от параметров класса П.

Этап 6. Связь между операторами $\mathcal{T}_\alpha$ и $\mathcal{P}$. Пусть ψ — произвольный фиксированный элемент пространства X. Из равенства (46) и определения (3) следует, что для $v \in \mathcal{V}$

$$[\mathscr{P}(\psi),\ v]=[\mathscr{P}_k(0\,;\ r_k(\psi)),\ v]=[\psi_{-1}+\frac{\partial\Phi_k}{\partial t},\ v]+\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint\limits_Q a^k_\alpha(t,\ x,\ \widehat{r}_k(\psi))D^\alpha v\,dxdt$$

$$=[\psi_{-1},\ v]+[\frac{\partial\Phi_k}{\partial t},\ v]+\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint\limits_Q \mathscr{T}^k_\alpha(\psi)D^\alpha v\,dxdt.$$

В полученном равенстве устремляем $k\to\infty$ и при помощи (45) и (52) получаем

$$[\mathscr{P}(\psi),\ v]=[\psi_{-1},\ v]+\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint\limits_Q \mathscr{T}_\alpha(\widehat{\psi})D^\alpha v\,dxdt. \tag{55}$$

Следовательно, для любого $u\in Z$ имеет место равенство

$$P(u)=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{|\alpha|\leqq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\mathscr{T}_\alpha(\partial u). \tag{56}$$

Этап 7. Локальность операторов $\mathscr{P}$ и $\mathscr{T}_\alpha$. Пусть $Q_1=(t_1,\ t_2]\times\Omega_1$ — произвольная цилиндрическая область, для которой $\Omega_1\subset\Omega$ и $0\leqq t_1<t_2\leqq T$. Для любого k при помощи равенств (3) и вектора $\{a^k_\alpha(t,\ x,\ \zeta);\ |\alpha|\leqq m\}$ определяем оператор $P_{1,k}(\psi\,;.)\colon \mathscr{W}_0(Q_1)\to\mathscr{V}'(Q_1)$, где $\psi\in X$. Повторяя рассуждения этапов $1\div 6$, выделяем подпоследовательность (которую снова обозначим через $\{P_{1,k}(\psi\,;.)\}$) и определяем операторы $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{T}^k_{1,\alpha}$, $\mathscr{T}_{1,\alpha}$ и т. д. Нижний индекс 1 означает, что рассмотрения ведутся на цилиндре Q_1. Тем самым будут доказаны неравенства (54) и т. д., где интегрирование берется по области Q_1, а все параметры, зависящие только от класса П, остаются теми же самыми.

а) Докажем, что для любого $\psi\in X$ выполнено

$$\mathscr{P}(\psi)\,|_{Q_1}=\mathscr{P}_1(\psi\,|_{Q_1}), \tag{57}$$

$$\mathscr{T}_\alpha(\psi)\,|_{Q_1}=\mathscr{T}_{1,\alpha}(\psi\,|_{Q_1}),\quad |\alpha|\leqq m. \tag{58}$$

Пользуясь равенствами (45) и (46), получаем, что

$$\Phi_k(\psi)\xrightarrow{\mathscr{W}(Q)}0,\quad P_k(\psi\,;\ \Phi_k(\psi))=\mathscr{P}(\psi), \tag{59}$$

$$\Phi_{1,k}(\psi\,|_{Q_1})\xrightarrow{\mathscr{W}(Q_1)}0,\ P_{1,k}(\psi\,|_{Q_1};\ \Phi_{1,k}(\psi\,|_{Q_1}))=\mathscr{P}_1(\psi\,|_{Q_1}), \tag{60}$$

где $\Phi_{1,k}(\psi\,|_{Q_1})=P^{-1}_{1,k}(\psi\,|_{Q_1};\ \mathscr{P}_1(\psi\,|_{Q_1}))$.

Из предложения 2 и леммы 6 работы [16] следует, что для фиксированного ψ существует подпоследовательность $\{k'\}$, для которой:

$\lim\Phi_{k'}(\psi)=0$ в топологии пространства $C(0,\ T\,;\ L^2(\Omega))$ и

$\lim\Phi_{1,k'}(\psi\,|_{Q_1})=0$ в топологии пространства $C(t_1,\ t_2\,;\ L^2(\Omega_1))$.

Тем более, $\omega_{k'}=\Phi_{k'}(\psi)-\Phi_{1,k'}(\psi\,|_{Q_1})\in C(t_1,\ t_2\,;\ L^2(\Omega_1))$ и $\lim\omega_{k'}(t_1)=0$. Далее снова будем писать k вместо k'. Заметим, что из определения операторов $P_{1,k}(\psi\,|_{Q_1};.)$ и $P_k(\psi\,;.)$ следует

$$P_k(\psi\,;\ \Phi_k(\psi))\,|_{Q_1}=P_{1,k}(\psi\,|_{Q_1};\ \Phi_{1,k}(\psi\,|_{Q_1})).$$

Тогда к последовательности операторов $\{P_{1,k}(\psi\,|_{Q_1};.)\}$ и последовательности функций $\{\Phi_k(\psi)\,|_{Q_1}\}$ и $\Phi_{1,k}(\psi\,|_{Q_1})\}$ применима лемма 2. Легко заметить, что $P_{1,k}(\psi\,|_{Q_1};\ \Phi_k(\psi)\,|_{Q_1})=\mathscr{P}(\psi)\,|_{Q_1}$ и тогда из леммы 2 следует (57). Кроме того, если положим

$$b_k(t,\ x,\ \zeta)=a^k_\alpha(t,\ x,\ \widehat{\psi}+\zeta),$$

то функции $b_k(t, x, \zeta)$ удовлетворяют условиям (H1) и (H4), возможно, с другими параметрами. Следовательно, лемма 2 доказывает, что

$$b_k(t, x, \partial(\Phi_k(\psi)|_{Q_1}))-b_k(t, x, \partial(\Phi_{1,k}(\psi|_{Q_1}))) \xrightarrow{L^{p'}(Q_1)} 0.$$

Кроме того, подпоследовательность $\{k\}$ была выбрана так, что

$$b_k(t, x, \partial(\Phi_k(\psi))) \xrightarrow{L^{p'}(Q)} \mathscr{T}_\alpha(\widehat{\psi}) \text{ и}$$

$$b_k(t, x, \partial(\Phi_{1,k}(\psi|_{Q_1}))) \xrightarrow{L^{p'}(Q_1)} \mathscr{T}_{1,\alpha}(\widehat{\psi}|_{Q_1})$$

и, следовательно, (58) выполнено для п. в. $(t, x)\in Q_1$.

б) Пусть $\psi\in X$, $\aleph\in X$ и $\psi|_{Q_1}=\aleph|_{Q_1}$. Если обозначим через f_1 вектор $\psi|_{Q_1}=\aleph|_{Q_1}$, то, пользуясь равенствами (57) и (58), получаем

$$\begin{cases} \mathscr{P}(\psi)|_{Q_1}=\mathscr{P}_1(f_1)=\mathscr{P}(\aleph)|_{Q_1} \\ \mathscr{T}_\alpha(\widehat{\psi})|_{Q_1}=\mathscr{T}_{1,\alpha}(\widehat{f}_1)=\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\aleph})|_{Q_1}. \end{cases} \tag{61}$$

Этап 8. Локальные свойства функций $\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\psi})$. Пусть $Q_1=(t_1, t_2]\times\Omega_1$, $0\leqq t_1<t_2\leqq T$ и $\Omega_1\subset\Omega$.

Из равенства (58) и неравенств (54) следует

$$\begin{cases} \|\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\psi})\|^{p'}_{L^{p'}(Q_1)}=\|\mathscr{T}_{1,\alpha}(\widehat{\psi}|_{Q_1})\|^{p'}_{L^{p'}(Q_1)}\leqq d(\|\widehat{\psi}\|^p_{L^p(Q_1)}+K(Q_1)), \\ \|\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\psi})-\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\aleph})\|^{p'}_{L^{p'}(Q_1)}\leqq\mu_5(\|\widehat{\psi}\|_{L^p(Q_1)}, \|\widehat{\aleph}\|_{L^p(Q_1)})\|\widehat{\psi}-\widehat{\aleph}\|^{p(1-s)/(ps-s+1)}, \end{cases} \tag{62}$$

где $\mu_5(s_1, s_2)=c(K(Q_1)+s_1^p+s_2^p)^{sp/(ps-s+1)}$, постоянные c и d зависят только от параметров класса П, а $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\aleph}$ произвольные элементы пространства $(L^p(Q))^N$. Кроме того, для любых ψ и $\aleph$ из X можно доказать, что

$$\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_{Q_1}\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\psi})\psi_\alpha\,dxdt\geqq c_2\iint_{Q_1}\sum_{|\alpha|\leqq m}|\psi_\alpha|^p dxdt-\iint_{Q_1}\mu_2\,dxdt \text{ и} \tag{63}$$

$$\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_{Q_1}[\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\psi})-\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\aleph})](\psi_\alpha-\aleph_\alpha)dxdt\geqq c_3\iint_{Q_1}\sum_{|\alpha|\leqq m}|\psi_\alpha-\aleph_\alpha|^p dxdt. \tag{64}$$

Докажем неравенство (64). (Неравенство (63) доказывается вполне аналогично.) Пусть $\varphi\in C_0^\infty(Q)$ и $0\leqq\varphi(t, x)\leqq 1$. Пользуясь равенством (46) и леммой 2 работы [16], можно проверить, что

$$\mathscr{I}_k=\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_Q[\mathscr{T}^k_\alpha(\psi)-\mathscr{T}^k_\alpha(\aleph)]\,[(\psi_\alpha-\aleph_\alpha)+D^\alpha(\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph))]\varphi(t, x)dxdt=\mathscr{I}^1_k+\mathscr{I}^2_k+\mathscr{I}^3_k,$$

где

$$\mathscr{I}^1_k=\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_Q[\mathscr{T}^k_\alpha(\psi)-\mathscr{T}^k_\alpha(\aleph)](\psi_\alpha-\aleph_\alpha)\varphi(t, x)dxdt,$$

$$\mathscr{I}^2_k=-\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_Q[\mathscr{T}^k_\alpha(\psi)-\mathscr{T}^k_\alpha(\aleph)]\sum_{1\leqq|\beta|}^{\beta\leqq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\alpha\varphi\, D^{\alpha-\beta}(\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph))dxdt,$$

$$\mathscr{I}^3_k=[\mathscr{P}(\psi)-\mathscr{P}(\aleph)+\aleph_{-1}-\psi_{-1}, \varphi(t, x)(\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph))]+\iint_Q\varphi_t(t, x)(\Phi_k(\psi)-\Phi_k(\aleph))^2dxdt.$$

Кроме того, если оценим $\mathscr{I}_k$ при помощи (H3), получим

$$\begin{aligned}&\sum_{|\alpha|\leqq m}\iint_Q[\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\psi})-\mathscr{T}_\alpha(\widehat{\aleph})](\psi_\alpha-\aleph_\alpha)\varphi(t, x)dtdx \\ &=\lim\mathscr{I}^1_k+\lim(\mathscr{I}^2_k+\mathscr{I}^3_k)\geqq c_3\iint_Q\varphi(t, x)\sum_{|\alpha|\leqq m}|\psi_\alpha-\aleph_\alpha|^p dxdt.\end{aligned} \tag{65}$$

Так как φ была произвольная финитная функция, то (65) доказывает (64).

Этап 9. Аналитическая запись операторов $\mathcal{T}_\alpha(\hat{\psi})$. Пусть $\mathcal{B}$—произвольное счетное, всюду плотное множество в R^N. Для любого $\xi \in \mathcal{B}$ вектор-функция $\psi(t, x) \equiv (0, \zeta)$ принадлежит пространству X и $\mathcal{T}_\alpha(\hat{\psi}(t, x)) \equiv \mathcal{T}_\alpha(\xi) \in L^{p'}(Q)$. Определяем функции $a_\alpha(t, x, \zeta)$ при помощи

$$a_\alpha(t, x, \xi) = \mathcal{T}_\alpha(\xi) \tag{66}$$

для $(t, x) \in Q$ и $\xi \in \mathcal{B}$.

а) Докажем, что

$$|a_\alpha(t, x, \xi)|^{p'} \leqq d(|\xi|^p + \mu_1^1(t, x)), \tag{67}$$

$$|a_\alpha(t, x, \xi) - a_\alpha(t, x, \zeta)|^{p'} \leqq c(\mu_1^1 + |\xi|^p + |\zeta|^p)^{sp/(sp-s+1)}(|\xi - \zeta|^p)^{(1-s)/(sp-s+1)}, \tag{68}$$

$$\sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(t, x, \xi)\xi_\alpha \geqq c_2|\xi|^p - \mu_2(t, x), \tag{69}$$

$$\sum_{|\alpha| \leqq m} [a_\alpha(t, x, \xi) - a_\alpha(t, x, \zeta)](\xi_\alpha - \zeta_\alpha) \geqq c_3|\xi - \zeta|^p \tag{70}$$

для п. в. $(t, x) \in Q$ и любых векторов ξ и ζ из $\mathcal{B}$ и $\mu_1^1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, а постоянные d и c зависят только от параметров класса Π.

Обозначим через U множество точек Лебега функций μ_1, μ_2, μ_3 и $a_\alpha(t, x, \xi)$. Тогда $\operatorname{mes}(Q \setminus U) = 0$. Фиксируем произвольную точку $(t^0, x^0) \in U$ и рассмотрим систему цилиндров $\{Q(\varepsilon)\}$, которая правильно стягивается к точке (t^0, x^0) при $\varepsilon \to 0$. Для любого цилиндра $Q(\varepsilon)$ имеют место неравенства (62), (63) и (64). Умножаем эти неравенства на $(\operatorname{mes} Q(\varepsilon))^{-1}$. Из теоремы Лебега — Витали (см. [21]) следуют (67)$\div$(70). Заметим, что, благодаря неравенству (68), можно доопределить по непрерывности функций $a_\alpha(t, x, \xi)$ на множестве $\bar{\mathcal{B}} = \mathrm{R}^N$. Тем самым мы доказали, что вектор $\{a_\alpha(t, x, \xi); |\alpha| \leqq m\}$ принадлежит классу $\Pi_1(d, c_2, c_3, c, sp/(sp-s+1), \mu_1^1, \mu_2, \mu_1^1)$.

Кроме того, из неравенства (68) следует, что

$$\mathcal{T}_\alpha(\xi) = a_\alpha(t, x, \xi) \tag{71}$$

для $|\alpha| \leqq m$, $(t, x) \in U$ и $\xi \in R^N$.

б) Докажем, что для любого $\hat{\psi} \in (L^p(Q))^N$ имеет место равенство

$$\mathcal{T}_\alpha(\hat{\psi}) = a_\alpha(t, x, \hat{\psi}) \quad \text{для п. в. } (t, x) \in Q. \tag{72}$$

При помощи аналога леммы 17.1 из [17] находим последовательность множеств $\{u_n\}$, такую, что $\operatorname{mes}(Q \setminus U_n) < 1/n$ и функции $a_\alpha(t, x, \xi)$ непрерывны на $U_n \times R^N$. Тогда множество $U' = \prod_{n=1}^{\infty} U_n$ является множеством полной меры, а любая точка $(t, x) \in U'$ является точкой Лебега для функций $a_\alpha(t, x, \xi)$, где $|\alpha| \leqq m$ и $\xi \in \mathrm{R}^N$. Пусть $\hat{\psi} \in (C^0(\mathrm{Q}))^N \cap (L^p(Q))^N$. Обозначим через U'' множество точек Лебега функций μ_1, μ_2, μ_3 и $\mathcal{T}_\alpha(\hat{\psi})$. Для любой точки $(t^0, x^0) \in U' \cap U''$ докажем, что

$$\mathcal{T}_\alpha(\hat{\psi}(t^0, x^0)) = a_\alpha(t^0, x^0, \hat{\psi}(t^0, x^0)).$$

Обозначим, через $\xi = \hat{\psi}(t^0, x^0)$. Пусть последовательность цилиндров $\{Q(\varepsilon)\}$ правильно стягивается к (t^0, x^0). Для любого $\varepsilon > 0$ при помощи (62) проверяется, что

$$\|\mathcal{T}_\alpha(\hat{\psi}) - a_\alpha(t, x, \hat{\psi})\|_{L^{p'}(Q(\varepsilon))}^{p'} \leqq c(I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)), \tag{73}$$

где постоянная c зависит только от параметров класса П,

$$I_1(\varepsilon)=\|\widehat{\psi}-\xi\|^{p(1-s)/(ps+1-s)}_{L^p(Q(\varepsilon))}(K(Q(\varepsilon))+\|\widehat{\psi}\|^p_{L^p(Q(\varepsilon))}+\|\xi\|^p_{L^p(Q(\varepsilon))})^{sp/(ps+1-s)} \text{ и}$$

$$I_2(\varepsilon)=\|a_\alpha(t,\ x,\ \xi)-a_\alpha(t,\ x,\ \widehat{\psi})\|^{p'}_{L^{p'}(Q(\varepsilon))}.$$

Если неравенство (73) поделим на $\operatorname{mes} Q(\varepsilon)$ и рассмотрим предел $\varepsilon\to 0$, то получим

$$\mathcal{T}_\alpha(\widehat{\psi}(t^0,\ x^0))-a_\alpha(t^0,\ x^0,\ \widehat{\psi}(t^0,\ x^0))=0$$

для $\widehat{\psi}\in(C^0(Q))^N\cap(L^p(Q))^N$ и $(t^0,\ x^0)\in U'\cap U''$.

Мы закончим доказательство (72), если воспользуемся непрерывностью операторов $\mathcal{T}_\alpha(.)$ и $a_\alpha(t,\ x,.)$ в пространстве $(L^p(Q))^N$, так как множество $(C^0(Q))^N \cap(L^p(Q))^N$ всюду плотно в $(L^p(Q))^N$.

в) Из равенств (72), (56) и (55) следует, что

$$\left\{\begin{aligned}&\mathcal{P}(\psi)=\psi_{-1}+\sum_{|\alpha|\leqq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha(t,\ \widehat{x,\ \psi}) \quad \text{для } \psi\in X \text{ и}\\ &P(u)=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{|\alpha|\leqq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha(t,\ x,\ \partial u) \quad \text{для } u\in Z(Q).\end{aligned}\right. \tag{74}$$

Тогда равенства (39) и (30) доказывают, что последовательность $\{P_{k'}\}$ G сходится к параболическому оператору P. Кроме того, из (46) следует, что для $u\in\mathcal{W}_0$ имеет место равенство $P(u)=P_k(u+\Phi_k(\delta u))$. Тогда при помощи (52) и определения операторов $\mathcal{T}^k_\alpha$ проверяем, что

$$\Gamma_\alpha(u+\Phi_k(\delta u),\ P_k)=\mathcal{T}^k_\alpha(\delta u)\xrightarrow{L^{p'}(Q)}\mathcal{T}_\alpha(\partial u)=\Gamma_\alpha(u,\ P)$$

для $|\alpha|\leqq m$.

Теорема 1 доказана.

Следующие свойства G-сходимости параболических операторов являются следствием основной теоремы 1.

Теорема 2 (локальность сильной G-сходимости). *Пусть последовательность дифференциальных операторов $\{P_k\}$ принадлежит классу* П *и $P_k\Rightarrow P$. Тогда для любой цилиндрической области $Q_1=(t_1,\ t_2]\times\Omega_1$, где $0\leqq t_1<t_2\leqq T$ и $\Omega_1\subset\Omega$ имеет место*

$$P_k|_{Q_1}\Rightarrow P|_{Q_1}.$$

Доказательство следует сразу из теоремы 1. Если обозначим через $P_{1,k}$ ограничение оператора P_k на Q_1, то к подпоследовательностям $\{P_k\}$ и $\{P_{1,k}\}$ применима теорема 1 и, следовательно, G-предельные операторы задаются при помощи коэффициентов $a_\alpha(t,\ x,\ \zeta)$ и $a_{1,\alpha}(t,\ x,\ \zeta)$ из равенств (71). Тогда при помощи равенств (57) и (58) завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2.3 (сходимость графиков). *Пусть последовательность параболических дифференциальных операторов $\{P_k\}$ принадлежит классу* П *и $P_k\Rightarrow P$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

а) *Если $u_k\xrightarrow{\mathcal{W}}u$ и $P_ku_k\xrightarrow{\mathcal{V}'}f$, то $P(u)=f$;*

б) *Если $u\in\mathcal{W}_0$ и $P(u)=f$, то существует подпоследовательность $\{u_k\}\subset\mathcal{W}_0$, такая, что*

$$u_k\xrightarrow{\mathcal{W}}u \quad \text{и} \quad P_ku_k\xrightarrow{\mathcal{V}'}f.$$

Доказательство. а) Пусть $g=P(u)$, $v_k=P_k^{-1}(g)$ и $f_k=P_k(u_k)$, для $k=1, 2, \ldots$ При помощи леммы 1 и леммы 3 работы [16] проверяем, что к последовательности операторов $\{P_k\}$ и к последовательностям функций $\{v_k\}$ и $\{u_k\}$ применима лемма 2 и, следовательно, $f=g=P(u)$.

б) Пусть $u_k=P_k^{-1}(f)$. Тогда из предположения $P_k\Rightarrow P$ следует $u_k\xrightarrow{\mathscr{W}}u$.

Теорема 4. *Пусть* $\{P_k\}\subset\Pi$ *и* $P_k\Rightarrow P$. *Пусть, кроме того,* $P_k u_k=Pu, u_k-u\in\mathscr{W}_0$ *и* $u\in Z(Q)$.

Тогда

а) $u_k-u\xrightarrow{\mathscr{W}}0$;

б) $\Gamma_\alpha(u_k, P_k)\xrightarrow{L^{p'}(Q)}\Gamma_\alpha(u, P)$.

Доказательство. а) Учитывая равенства (44), (45) и (46), имеем

$$\Phi_k(\delta u)=P_k^{-1}(\delta u;\ \mathscr{P}(\delta u))\xrightarrow{\mathscr{W}}0 \text{ и}$$
$$\mathscr{P}(\delta u)=P_k(\delta u;\ \Phi_k(\delta u)).$$

Пусть $v_k=u_k-u$. Тогда из равенств (5), для любого k, следует

$$P(u)=P_k(u_k)=P_k(\delta u,\ v_k).$$

Из равенства (74) следует

$$P_k(\delta u,\ \Phi_k(\delta u))=P_k(\delta u,\ v_k).$$

Тогда лемма 1 доказывает, что

(75) $$v_k=\Phi_k(\delta u)$$

и, следовательно, $u_k-u=\Phi_k(\delta u)\xrightarrow{\mathscr{W}}0$.

б) По определению (см. этап 5 доказательства теоремы 1 и равенства (34) и (44)

$$\mathscr{T}_\alpha^k(\delta u) = a_\alpha^k(t,\ x,\ \widehat{r}_k(\delta u))=a_\alpha^k(t,\ x,\ \partial u+\partial\Phi_k(\delta u)).$$

Тогда при помощи равенства (75) получаем

$$\mathscr{T}_\alpha^k(\delta u)=\Gamma_\alpha(u_k,\ P_k).$$

Тогда, пользуясь равенством (72) и свойством (52), получаем

$$\Gamma_\alpha(u_k,\ P_k)\xrightarrow{L^{p'}(Q)}\mathscr{T}_\alpha(\partial u)=a_\alpha(t,\ x,\ \partial u)=\Gamma(u,\ P).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. E. De Giorgi. G-operators and Γ-convergence. *Proc. Int. Cong. Math.* Warszawa, 1983, 1175—1191.
2. A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou. Asymptotic analysis for periodic structure. Amsterdam, 1978.
3. Э. Санчес-Паленсия. Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.
4. В. В. Жиков и др. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов. *Успехи мат. наук*, **34**, 1979, № 5, 65—133.
5. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. О G-сходимости параболических операторов. *Успехи мат. наук*, **36**, 1981, № 1, 11—58.

6. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
7. В. В. Жиков. Вопросы сходимости, двойнственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления. *Известия АН СССР, сер. мат.*, 47, 1983, 961—999.
8. E. De Giorgi. Generalized limits in calculus of variations. Topics in functional analysis. Pisa, 1980—81.
9. C. Sbordone. La Г-convergenza e la G-convergenza. *Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino*, **44**, 1982, 2, 25—51.
10. S. Spagnolo. Sur limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 21, 1967, 651—699.
11. S. Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed elliptich. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 22, 1968, 573—597.
12. S. Spagnolo. Convergence of parabolic equations. *Bollet. U. M. I*, 5, 1977, 14-Б, 547—568.
13. У. Е. Райтум. К G-сходимости квазилинейных эллиптических операторов с неограниченными коэффициентами. *Доклады АН СССР*, 261, 1981, 30—34.
14. А. А. Панков. Об усреднении и G-сходимости нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида. *Доклады АН СССР*, 278, 1984, 37—41.
15. М. Л. Маринов. О G-сходимости квазилинейных параболических дифференциальных операторов. *Доклады БАН*, 39, 1986, № 5, 19—22.
16. М. Л. Маринов. О G-сходимости нелинейных параболических операторов I (Абстрактные параболические операторы). *Сердика*, 14, 1988, 130—140.
17. М. А. Красносельский и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
18. D. Gilbarg, N. S. Trudinger. Elliptic partial differential equation of second order. Berlin, 1977.
19. Ж. Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
20. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы (Общая теория). Т. 1., М., 1962.
21. Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. Интеграл, мера и производная. М., 1967.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. К. 373

Поступила 3. 12. 1986
В переработанном виде 24. 11. 1987