Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

СИЛОВСКИЕ p-ПОДГРУППЫ КОММУТАТИВНЫХ МОДУЛЯРНЫХ СКРЕЩЕННЫХ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ p-ГРУПП

НАКО А. НАЧЕВ, ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть G — конечная абелева p-группа, K — поле характеристики p и K_tG — коммутативная скрещенная групповая алгебра группы G над полем K. В настоящей работе дается описание силовской p-подгруппы $S(K_tG)$ мультипликативной группы алгебры K_tG, т. е. силовской p-подгруппы мультипликативной группы фактор-алгебры $K[x_1,\ldots,x_k]/\langle x_1^{p^{n_1}}-a_1,\ldots,x_k^{p^{n_k}}-a_k\rangle$, где $a_i\in K$, $i=1,\ldots,k$ и $\langle x_1^{p^{n_1}}-a_1,\ldots,x_k^{p^{n_k}}-a_k\rangle$ — идеал алгебры $K[x_1,\ldots,x_k]$, порожденный полиномами $x_i^{p^{n_i}}-a_i$, $i=1,\ldots,k$.

Пусть K_tG — коммутативная скрещенная групповая алгебра абелевой группы G над полем K, т. е. система факторов алгебры K_tG симметрична [3]. В [3] построены минимальные идемпотенты алгебры $K_t\langle g\rangle$, где $\langle g\rangle$ — циклическая p-группа нечетного порядка, а K — поле с характеристикой, отличной от p. Пусть G — конечная абелева p-группа и K — поле с характеристикой p. В настоящей работе дается описание силовской p-подгруппы $S(K_tG)$ мультипликативной группы коммутативной скрещенной групповой алгебры K_tG. Для скрещенной групповой алгебры будем использовать определение, данное в [3[. Умножение в группе G будем обозначать через „ · ", а в алгебре K_tG — без точки, т. е. без знака. Введем еще следующие обозначения: $g^{(n)}$ — n-ая степень элемента g в группе G; g^n — n-ая степень элемента g в алгебре K_tG, 1 — единица алгебры K_tG, N_0 — множество неотрицательных целых чисел, K^* — мультипликативная группа поля K, Π — знак прямого произведения групп, $\Pi_\lambda(p^i)$ — прямое произведение λ групп, изоморфных циклической группе порядка p^i, $|M|$ — мощность множества M, $G[p]=\{g\in G\,|\,g^p=1\}$, $\cong$ — знак изоморфизма групп или K-алгебр и L_p — силовская p-подгруппа мультипликативной группы L^* поля L.

Пусть $G=\langle g\rangle$ — циклическая группа порядка p^n и K_tG определена равенством $g^{p^n}=a$, $a\in K^*$ (см. [3]. Тогда степени $1, g,\ldots, g^{p^n-1}$ алгебры K_tG образуют новый базис алгебры K_tG, причем умножение этих элементов в K_tG получается по правилу

$$(1)\qquad g^kg^l=\begin{cases} g^{k+l}, & \text{если}\quad 0\leq k+l<p^n,\\ ag^{k+l-p^n}, & \text{если}\quad p^n\leq k+l,\ 0\leq k,\ l<p^n.\end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть $G=\langle g\rangle$ — циклическая группа порядка p^n. Тогда множество $\mathsf{A}=\{1, g,\ldots, g^{p^n-1}\}$, где g^i — i-ая степень элемента g в алгебре $K_t\langle g\rangle$, является группой порядка p^n относительно операции „∘", введенной следующим образом:*

$$(2)\qquad g^k\circ g^l=\begin{cases} g^{k+l}, & \textit{если}\quad 0\leq k+l<p^n,\\ g^{k+l+p^n}, & \textit{если}\quad p^n\leq k+l\,;\ 0\leq k, l<p^n,\end{cases}$$

т. е. A — *скрещенный групповой базис алгебры* K_tG *и правило умножения его элементов в алгебре* K_tG *дается формулой* (*1*).

Доказательство. Очевидно „$\circ$“ — алгебраическая операция в G. Докажем, что для операции „$\circ$“ выполняется ассоциативный закон, используя формулу (2). Именно, нетрудно увидеть, что для элемента $x=(g^i\circ g^j)\circ g^k$ имеют место следующие случаи ($0\leq i,\ j,\ k<p^n$):

1) если $i+j+k<p^n$, то $x=g^{i+j+k}$;

2) если $i+j<p^n$ и $i+j+k\geqq p^n$, то $x=g^{i+j+k-p^n}$;

3) если $i+j\geqq p^n$ и $i+j+k<2p^n$, то $x=q^{i+j+k-p^n}$ и

4) если $i+j\geqq p^n$ и $i+j+k\geqq 2p^n$, то $x=g^{i+j+k-2p^n}$.

Аналогично для элемента $y=g^i\circ(g^j\circ g^k)$ справедливы следующие возможности:

1′) если $i+j+k<p^n$, то $y=g^{i+j+k}$;

2′) если $j+k<p^n$ и $i+j+k\geqq p^n$, то $y=g^{i+j+k-p^n}$;

3′) если $j+k\geqq p^n$ и $i+j+k<2p^n$, то $y=g^{i+j+k-p^n}$;

4′) если $j+k\geqq p^n$ и $i+j+k\geqq 2p^n$, то $y=g^{i+j+k-2p^n}$.

Если для элемента x имеет место случай 1), то для y следует случай 1′), т. е $x=y$. Пусть имеет место случай 2). Тогда, очевидно, случаи 1′) и 4′) не имеют место, т. е. остаются случаи 2′) и 3′) и тогда $x=y$. Пусть имеет место случай 3). Тогда, очевидно, случаи 1′) и 3′) невозможны, т. е. остаются случаи 2′) и 3′) и тогда $x=y$. Пусть имеет место случай 4). Очевидно случаи 1′) и 3′) невозможны. Если допустим, что имеет место случай 2′), то из $i<p^n$ и $j+k<p^n$ вытекает $i+j+k<p^n$, что является противоречием. Следовательно, имеет место случай 4′) и $x=y$. Очевидно 1 — единица множества A и, если $g^i\in\mathsf{A}$, $i>0$, то g^{p^n-i} — его обратный элемент. Следовательно, A — группа относительно операции (2). Лемма доказана.

Далее, ввиду этого результата и изоморфизма между группами G и A, мы отождествим группу A с первоначальной группой G, а операцию „$\circ$“ — с операцией „$\circ$“ группы G, т. е. будем считать, что $g^i=g^{(i)}$, $i=0,1,\ldots,p^n-1$ и что система факторов группы G (т. е. группы A) получается из (1) или, что то же самое, для этих систем факторов $(g^{(i)},\ g^{(j)})$ (см. [3]) имеет место

$$(g^{(i)},\ g^{(j)})=\begin{cases}1, & \text{если}\quad 0\leqq i+j<p^n;\\ a, & \text{если}\quad i+j\geqq p^n.\end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть* $\langle g\rangle$ — *циклическая группа порядка* p^n, K — *поле характеристики* p *и алгебра* $K_t\langle g\rangle$ *определена равенством* $g^{p^n}=a$. *Тогда для каждого* $\in\mathsf{N}_0$ *имеет место*

$$(K_t\langle g\rangle)^{p^i}=(K^{p^i})\ (a^{p^r})_t\langle g^{p(i)}\rangle,\quad r=\max(i-n,\ 0). \tag{3}$$

Доказательство. Любой элемент $x\in K_t\langle g\rangle$ записывается в виде

$x=\sum\limits_{j=0}^{p^n}x_jg^j,\ x_j\in K.$ Тогда $x^{p^i}=\sum\limits_{j=0}^{p^n-1}x_j^{p^i}g^{jp^i}.$

1) Пусть $0\leqq i<n$. Тогда $r=0$. Пусть $j=kp^{n-i}+l$, $0\leqq l<p^{n-i}$, $0\leqq k<p^i$. Тогда

$$x^{p^i}=\sum_{l=0}^{p^{n-i}-1}\left(\sum_{k=0}^{p^i-1}x^{p^i}_{kp^{n-i}+l}a^k\right)g^{lp^i}\in(K^{p^i})\ (a)_t\langle g^{(p^i)}\rangle, \tag{4}$$

т. е. $(K_t\langle g\rangle)^{p^i}\subseteq(K^{p^i})(q)_t\langle g^{(p^i)}\rangle$.

Докажем обратное включение. Любой элемент $y \in (K^{p^i})(a)_t\langle g^{(p^i)}\rangle$ представляется в виде $y=\Sigma_{l=0}^{p^{n-i}-1}\lambda_l\, g^{l\, p^i}$, $\lambda_l \in (K^{p^i})(a)$.
Так как

$$\lambda_l = \sum_{k=0}^{p^i-1} \mu_{l,k}^{p^i} a^k, \quad \mu_{lk} \in K, \quad \text{то} \quad y=\sum_{l=0}^{p^n-1}\sum_{k=0}^{p^i-1}\mu_{l,k}^{p^i} a^k g^{l\,p^i}.$$

Отсюда, ввиду формулы (4), вытекает $y \in (K_t\langle g\rangle)^{p^i}$. Следовательно, имеет место указанное обратное включение, чем формула (3) доказана для $0\leq i<n$.

2) Пусть $n\leq i$. Тогда $r=i-n$ и $x^{p^i}=\Sigma_{j=0}^{p^n-1} x_j^{p^i} a_{jp^{i-n}} \in (K^{p^i})(a^{p^r})$, т. е. $(K_t\langle g\rangle)^{p^i} \subseteq (K^{p^i})(a^{p^r})$. Докажем обратное включение. Пусть $y \in (K^{p^i})(a^{p^r})$. Так как элемент a^{p^r} — корень полинома $x^{p^n}-a^{p^i}$ над K^{p^i}, от любой элемент $y \in (K^{p^i})(a^{p^r})$ записывается в виде

$$y=\sum_{j=0}^{p^n-1} x_j^{p^i} a^{jp^r}=(\sum_{j=0}^{p^n-1} x_j g^j)^{p^i} \in (K_t\langle g\rangle)^p,$$

где второе равенство получается из $a=g^{p^n}$ и $r+n=i$. Таким образом упомянутое включение установлено и $(K_t\langle g\rangle)^{p^i}=(K^{p^i})(a^{p^r})$. Так как $\langle g(^{p^i})\rangle=1$, то формула (3) установлена. Лемма доказана.

Далее будем считать, что если A — коммутативная алгебра с единицей, то для силовской p-подгруппы $S(A)$ ее мультипликативной группы $U(A)$ имеет место $S^{p^i}(A)=S(A^{p^i})$, $i \in \mathrm{N}_0$. В частности, если $A=K_tG$, то

$$S^{p^i}(K_tG)=S((K_tG)^{p^i}), \quad i \in \mathrm{N}_0. \tag{5}$$

Пусть $f_i(G)$ — i-ый инвариант Ульма—Капланского группы G, $i \in \mathrm{N}_0$. Тогда $f_i(S(K_t\langle g\rangle))=f_0(S^{p^i}(K_t\langle g\rangle))=f_0(S(K_t\langle g\rangle)^{p^i}))$, где второе равенство следует из (5). Из последнего равенства, ввиду фомулы (3), получается

$$f_i(S(K_t\langle g\rangle)) = f_0(S((K^{p^i})(a^{p^r})_t\langle g^{(p^i)}\rangle, \quad r=\max_{i\in \mathrm{N}_0}(i-n, 0). \tag{6}$$

В следующей теореме, которая описывает $S(K_t\langle g\rangle)$, предполагается, что K — бесконечное поле, так как если поле K конечно, то $K_t\langle g\rangle$ изоморфна групповой алгебре KG группы $G=\langle g\rangle$ над полем K [3], т. е. $S(K_tG)\cong S(KG)$ и описание $S(KG)$ известно [2].

Теорема 3. *Пусть $\langle g\rangle$ — циклическая группа порядка p^n, K — бесконечное поле с характеристикой p, алгебра $K_t\langle g\rangle$ определена равенством $g^{p^n}=a$, $a\in K^*$ и s — наибольшее целое число интервала $[0, n]$, для которого $a\in K^{p^s}$. Если $s=0$, то $S(K_t\langle s\rangle)=1$, а если $s>0$, то*

$$S(K_t\langle g\rangle)\cong\prod_{|K|}(p)\times\cdots\times\prod_{|K|}(p^s).$$

Доказательство. Пусть $s=0$. Так как $K_t\langle g\rangle\cong K[x]/\langle x^{p^n}-a\rangle$ (см., например [4]) и полином $x^{p^n}-a$, ввиду $a\notin K^p$, неприводим над K [1, с. 254, следствие 1]), то алгебра $K_t\langle g\rangle$ изоморфна полю. Следовательно, $S(K_t\langle g\rangle)=1$. Пусть $s>0$. Если $s=n$, то $K_t\langle g\rangle\cong K\langle g\rangle$ [3] и теорема справедлива [2]. Поэтому предположим, что, $0<s<n$. Докажем, что $f_i(S)=|K|$ для $i=0, 1, \ldots, s-1$, где $S=S(K_t\langle g\rangle)$. Пусть $a=b^{p^s}$, $b\in K$. Образуем элементы $x_\lambda=1+\lambda^{p^i}g^{p^i}(g^{p^{n-1}}-b^{p^{s-1}})$, $\lambda\in K$ $(i=0, 1, \ldots, s-1)$. Так как $x_\lambda=y_\lambda^{p^i}$ и $x_\lambda^p=1$, то $x_\lambda\in S^{p^i}(K_t\langle g\rangle)$ $[p]$. При $\lambda\neq\mu$, $\mu\in K$, имеет место

$$x_\lambda S^{p^{i+1}}[p] \neq x_\mu S^{p^{i+1}}[p].$$

В противном случае выполняется $x_\lambda = x_\mu \Sigma_j \alpha_j^{p^{i+1}} g_j^{p^{i+1}}$, т. е.

$$1+\lambda^{p^i} g^{p^i}(g^{p^{n-1}}-b^{p^{s-1}}) = [1+\mu^{p^i} g^{p^i}(g^{p^{n-1}}-b^{p^{s-1}})]\Sigma_j \alpha_j^{p^{i+1}} g_j^{p^{i+1}}.$$

Классу $(\langle g\rangle)^{(p^{i+1})} = (\langle g\rangle)^{p^{i+1}}$ в левой части этого равенства принадлежит только элемент 1, а в его правой части — элементы $\Sigma_j \alpha_j^{p^{i+1}} g_j^{p^{i+1}}$ и только они. Следовательно, $\Sigma_j \alpha_j^{p^{i+1}} g_j^{p^{i+1}} = 1$ и

$$(\lambda^{p^i} - \mu^{p^i})\ g^{p^i}\ (g^{p^{n-1}} - b^{p^{s-1}}) = 0.$$

Отсюда вытекает $\lambda^{p^i} = \mu^{p^i}$, т. е. $\lambda = \mu$ и $f_i(S(K_t\langle g\rangle) \geqq |K|$. Таким образом $f_i(S) = |K|$ $i = 0, 1, \ldots, s-1$. Так как

$$S^{p^n}(K_t\langle g\rangle) = S((K_t\langle g\rangle)^{p^n}) = S((K^{p^n})\ (a^{p^r})_t\ \langle g^{(p^n)}\rangle) = S((K^{p^n})\ (a^{p^r})_t \langle 1\rangle) = 1,$$

где первое равенство следует из (5), и второе — из (3), то $f_i(S) = 0$ для каждого $i \geqq n$.

Покажем, что $f_i(S) = 0$ для каждого i, для которого $s \leqq i \leqq n-1$. Будем использовать формулу (6). При $i \leqq n-1$ имеет место $r = 0$ и

(7) $$(K^{p^i})\,(a)_t\langle g^{(p^i)}\rangle \cong (K^{p^i})\ (a)\,[x]/\langle x^{p^{n-i}} - a\rangle.$$

Докажем, что $a \notin ((K^{p^i})\,(a))^p$. Если допустим противное, то

$$a \in ((K^{p^i})(a))^p = (K^{p^{i+1}})\ (a^p) = ((K^{p^{i-s}})\ (b\,))^{p^{s+1}} \subseteqq K^{p^{s+1}},$$

т. е. $a \in K^{p^{s+1}}$, что ввиду $s<n$, является противоречием. Следовательно, $a \notin ((K^{p^i})(a))^p$ и, ввиду [1, с. 254, следствие 1], полином $x^{p^{n-s}} - a$ неприводим над $(K^{p^i})(a)$, т. е. вторая часть формулы (7) изоморфна полю. Из этого вытекает, что $S((K^{p^i})\,(a)_t\langle g^{p^i}\rangle) = 1$. Тогда, ввиду (6), имеет место $f_i(S) = 0$, $s \leqq i \leqq n-1$. Так как $S(K_t\langle g\rangle)$ имеет показатель p^s, то $S(K_t\langle g\rangle)$ разлагается в прямое произведение циклических групп и справедливо заключение теоремы.

Далее будем считать, что

(8) $$G = \prod_{i=1}^{k} \langle g_i\rangle,\ 0(g_i) = p^{n_i},\ n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots \leqq n_k,$$

где $0(g_i)$ — порядок элемента g_i и алгебры $K_t\langle g\rangle$ определяются равенствами

(9) $$g_i^{p^{n_i}} = a_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Очевидно элементы $g_1^{j_1} \ldots g_k^{j_k}$, $0 \leqq j_i < p^{n_i}$, образуют K-базис алгебры K_tG. Используя равенства (9) видно, что любой элемент $g_1^{l_1} \ldots g_k^{l_k}$ записывается в виде

$$g_1^{l_1} \ldots g_k^{l_k} = a_1^{q_1} \ldots a_k^{q_k} g_1^{j_1} \ldots g_k^{j_k}, \quad l_i = p^{n_i} q_i + j_i,\ 0 \leqq j_i < p^{n_i}.$$

Эту запись будем называть канонической. Поэтому будем говорить, что равенства (9) определяют алгебру K_tG. Во всех следующих утверждениях будем предполагать, что абелева группа G и алгебра K_tG определены соответственно формулами

(8) и (9). Произведение любых двух элементов алгебры K_tG, взятых в канонических записях, получается по правилу

$$(1') \qquad (g_1^{j_1}\dots g_k^{j_k})\ (g_1^{l_1}\dots g_k^{l_k}) = a_1^{\lambda_1}\dots a_k^{\lambda_k}\, g_1^{t_1}\dots g_k^{t_k},$$

$$\begin{cases} \lambda_i = 0 \quad t_i = j_i + l_i, & \text{если } j_i + l_i < p^{n_i}, \\ \lambda_i = 1 \quad t_i = j_i + l_i - p^{n_i}, & \text{если } j_i + l_i \geqq p^{n_i}; \quad i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Лемма 1′. *Пусть группа G определяется формулой (8). Тогда множество* $\mathsf{A} = \{g_1^{j_1}\dots g_k^{j_k} \mid 0 \leqq j_i < p^{n_i}\}$ *где* g^{j_i} — j_i*-ая степень элемента* g_i *в алгебре* K_tG, *является группой относительно операции „$\circ$“, введенной следующим образом:*

$$(g_1^{j_1}\dots g_k^{j_k}) \circ (g_1^{l_1}\dots g_k^{l_k}) = g_1^{t_1}\dots g_k^{t_k}, \qquad t_i = \begin{cases} j_i + l_i, & j_i + l_i < p^{n_i}; \\ j_i + l_i - p^{n_i}, & j_i + l_i \geqq p^{n_i}; \end{cases}$$

и произведение элементов группы G получается по правилу (1′).

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Ввиду этого результата мы отождествим группу A с первоначальной группой G а операцию „$\circ$“ — операцией „$\cdot$“ группы G, т. е. будем считать, что $g_1^{(j_1)}\dots g_k^{(j_k)}$, $= g_1^{j_1}\dots g_k^{j_k}$, $0 \leqq j_i < p^{n_i}$ и что система факторов группы G (т. е. групы A) получается из (1′).

Лемма 2′. *Для каждого $i \in \mathsf{N}_0$ имеет место*

$$(3') \qquad (K_tG)^{p^i} = (K^{p^i})\ (a_1^{p^{r_1}}, \dots, a_k^{p^{r_k}})_t G^{(p^i)}, \quad r_j = \max(i - n_j, 0), \ j = 1, \dots, k.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Пусть s_j — максимальное целое число в интервале $[0, n]$, для которого $a_j \in K^{p^{s_j}}$ (a_j определяются формулой (9)). Тогда существуют элементы $b_j \in K$ со свойством $b_j^{p^{s_j}} = a_j$. Числа s_j будем использовать и в дальнейших рассмотрениях. Имеет место следующая формула, аналогичная формуле (6):

$$(6') \qquad f_i(S(K_tG)) = f_0[S((K^{p^i})(a_1^{p^{r_1}}, \dots, a_k^{p^{r_k}})_t G^{(p^i)}), \quad i \in \mathsf{N}_0,$$
$$r_j = \max(i - n_j, 0), \quad j = 1, \dots, k.$$

Далее рассмотрим формулу (3′) и (6′). Если $i \leqq s_j$, то $r_j = 0$ и $a_j^{p^{r_j}} = a_j^{p^0} = b_j^{p^{s_j}}$ поглощается полем K^{p^i}, а если $i > s_j$, то $a_j^{p^{r_j}}$ не поглощаются полем K^{p^i} в (3′).

Лемма 4. *Если K — бесконечное поле характеристики p, и $S(K_tG) \neq 1$, то* $|S(K_tG)| = |K|$.

Доказательство. Рассмотрим элементы $x_\lambda = 1 + \lambda(1 - y_0)$, $\lambda \in K$, $1 \neq y_0 \in S(K_tG)$. Очевидно $x_\lambda \in S(K_tG)$. Если $\lambda \neq \mu$, $\mu \in K$, то $x_\lambda \neq x_\mu$. В противном случае получается $(\lambda - \mu)\,(1 - y_0) = 0$. Следовательно, $y_0 = 1$. Таким образом $|S(K_t\langle g_1\rangle)| = |K|$. Тогда $|K| = |S(K_t\langle g_1\rangle)| \leqq |S(K_tG)| \leqq |K|$, откуда вытекает $|S(K_tG)| = |K|$.

Лемма 5. *Имеет место следующий изоморфизм K-алгебр:*

$$(10) \qquad K_tG \cong K[x_1, \dots, x_k]/\langle x_1^{p^{n_1}} - a_1, \dots, x_k^{p^{n_k}} - a_k\rangle,$$

где $I = \langle x_1^{p^{n_1}} - a_1, \dots, x_k^{p^{n_k}} - a_k\rangle$ — *идеал алгебры* $K[x_1, \dots, x_k]$, *порожденный элементами* $x_i^{p^{n_i}} - a_i$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Определим отображение $\varphi: K[x_1, \ldots, x_k] \to K_tG$, полагая $\varphi(x_i) = g_i$, $i = 1, \ldots, k$ и продолжая φ по линейности и мультипликативности. Очевидно φ — сюръективный гомоморфизмом K-алгебр. Так как $\varphi(x_i^{p^{n_i}} - a_i) = 0$, то $I \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Докажем обратное включение. Действительно, пусть $f(x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $f(g_1, \ldots, g_k) = 0$. Отметим, что, если R — кольцо, то в алгебре $R[x_1]$ имеет место алгорифм деления с частным и остатком на $x_1^{p^n} - a$. Таким образом, полагая сначала $K[x_2, \ldots, x_n] = R$, получим

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \psi_1(x_1, \ldots, x_k)(x_1^{p^{n_1}} - a_1) + r_1(x_1, \ldots, x_k), \quad \deg_{x_1} r_1(x_1, \ldots, x_k) < p^{n_1},$$

где $\deg_{x_1} r_1(x_1, \ldots, x_k)$ — степень полинома $r_1(x_1, \ldots, x_k)$ относительно x_1. Рассуждая индуктивно, получим

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(x_1, \ldots, x_k)(x_i^{p^{n_i}} - a_i) + \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \\ 0 \leq i_j < p^{n_j}}} a_{i_1, \ldots, i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}. \tag{11}$$

Следовательно,

$$0 = f(g_1, \ldots, g_k) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \\ 0 \leq i_j < p^{n_j}}} a_{i_1, \ldots, i_k} g_1^{i_1} \ldots g_k^{i_k}.$$

Так как $g_1^{i_1} \ldots g_k^{i_k}$, $0 \leq i_j < p^{n_j}$ $(j = 1, \ldots, k)$ образуют K-базис алгебры K_tG, то каждое $a_{i_1 \ldots i_k}$ равняется нулю. Тогда из (11) вытекает, что $f(x_1, \ldots, x_k) \in I$, т. е $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq I$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Алгебра K_tG обладает единственным максимальным идеалом J и радикал $J(K_tG)$ Джекобсона алгебры K_tG совпадает с J.*

Доказательство. Так как K_tG — артиновая алгебра, то она разлагается в прямую сумму локальных алгебр (с единственными максимальными идеалами) и число t этих алгебр при $t \geqq 2$ равняется числу ее нетривиальных минимальных идемпотентов. Ввиду того, что K_tG не обладает нетривиальных идемпотентов, то имеет место $t = 1$, т. е. K_tG — локальная алгебра. Следовательно, $J(K_tG) = J$. Лемма доказана.

Отметим, что, если поле K совершенно, то $a_i = \alpha_i^{p^{n_i}}$, $\alpha_i \in K$ и $G \cong \Pi_{i=1}^{k} \langle \alpha_i^{-1} g_i \rangle$, т. е. $K_tG \cong KG$. Поэтому далее будем предполагать, что поле K несовершенно. Так как элементы

$$g_1^{p^{i_1}} \ldots g_k^{p^{i_k}}, \quad 0 \leq i_j \leq p^{n_j}, \quad j = 1, \ldots, k$$

образуют базис алгебры K_tG, то $\dim_K K_tG = p^{n_1 + \cdots + n_k}$. Пусть $\mathscr{A} = K[x_1, \ldots, x_k] / \langle x_1^{p^{n_1}} - a_1, \ldots, x_k^{p^{n_k}} - a_k \rangle$. Если рассматриваем поле $K(u, \ldots, u_k)$ как K-алгебру, где u_j — корень полинома $x_j^{p^{n_j}} - a_j$, то

$$\dim_K K(u_1, \ldots, u_k) \leq p^{n_1 + \cdots + n_k} = \dim_K \mathscr{A} = \dim_K K_tG.$$

Существует K-гомоморфизм $\theta\colon K_tG \to K(u_1, \ldots, u_k)$, определенный формулой $\theta(g_j) = u_j$, $j = 1, \ldots, k$ и продолженный по линейности и мультипликативности. Следовательно, θ — сюръективный гомоморфизм. Отсюда вытекает, что

$$K_tG / \operatorname{Ker}\theta \cong K(u_1, \ldots, u_k). \tag{12}$$

Так как $K(u_1, \ldots, u_k)$ — поле, то из (12) следует, что $\operatorname{Ker}\theta$ — максимальный идеал алгебры K_tG. Таким образом, ввиду леммы 6, выполняется

$$\operatorname{Ker}\theta = J(K_tG). \tag{13}$$

В следующей лемме будем использовать обозначение $A+B=\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$, где A и B — подмножества K-алгебры C.

Лемма 7. *Имеет место равенство* $S(K_tG)=1+J(K_tG)$.

Доказательство. Так как K_tG — артиновая алгебра, то $J(K_tG)$ — нильпотентный идеал. Следовательно, $1+J(K_tG) \subseteq S(K_tG)$. Докажем обратное включение. Ввиду того, что $\theta: K_tG \to K(u_1, \ldots, u_k)$ — сюръективный гомоморфизм, то

$$\theta(S(K_tG)) = K(u_1, \ldots, u_k)_p = 1.$$

С другой стороны, подмножество M алгебры K_tG, для которого $\theta(M)=1$, совпадает с $1+\operatorname{Ker}\theta = 1+J(K_tG)$, где равенство вытекает из (13). Следовательно, $S(K_tG) \subseteq 1 + J(K_tG)$. Лемма доказана.

В следующих утверждениях будем предполагать, что l_i, $0 \leqq i \leqq n_k$, является наименьшим целым в интервале $[1, k]$, для которого $i < n_{l_i}$.

$$L_i = (K^{p^i})(a_1^{p^{i-n_1}}, \ldots, a_{l_i-1}^{p^{i-n_{l_i-1}}}, a_{l_i}, a_{l_i+1}, \ldots, a_k),$$

каждый элемент u_{ij}, $l_i \leqq j \leqq k$ — некоторый корень полинома $x_{ij}^{p^{n_j-i}} - a_j$ в некотором расширении поля L_i, $S(K_tG)=S$ и $(L:K)$ — степень расширения L относительно K.

Предложение 8. *Пусть поле K бесконечно. Тогда I), если $i \geqq n_k$ или II) $0 \leqq i < n_k$ и* II. I) *имеет место*

$$(L_i(u_{il_i}, \ldots, u_{ik}) : L_i) = p^{n_{l_i} + \cdots + n_k - (k-l_i)i};$$

то $f_i(S)=0$:

II. II) если

$$(L_i(u_{il_i}, \ldots, u_{ik}) : L_i) < p^{n_{l_i} + \cdots + n_k - (k-l_i)i},$$

то $f_i(S)=|K|$.

Доказательство. I) Пусть $i \geqq n_k$. Так как $G^{(p^i)}=1$, то из формулы (6) вытекает, что $f_i(S)=0$.

II) Пусть $0 \leqq i < n_k$. Сначала вычислим $f_0(S)$. Для этой цели применим результаты, связанные с сюръективным гомоморфизмом θ, введенным в предварительных рассуждениях. Именно, при $i=0$ следует $l_0=1$ и $L_0=K$. Обозначим $x_{0j}=x_j$ и $u_{0j}=u_j$, $j=1, \ldots, k$.

Мы должны доказать, что

$$f_0(S) = \begin{cases} 0, \text{ если } (K(u_1, \ldots, u_k) : K) = p^{n_1 + \cdots + n_k}; \\ |K|, \text{ если } (K(u_1, \ldots, u_k) : K) < p^{n_1 + \cdots n_k}. \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим два подслучая: 1) $(K(u_1, \ldots, u_k) : K) = p^{n_1 + \cdots + n_k}$ и 2) $(K(u_1, \ldots, u_k) : K) < p^{n_1 + \cdots + n_k}$.

1) Пусть $(K(u_1, \ldots, u_k) : K) = p^{n_1 + \cdots + n_k}$. Тогда из $\dim K_tG = p^{n_1 + \cdots + n_k}$ и из формулы (12) вытекает $\operatorname{Ker}\theta = 0$. Следовательно, $K_tG \cong K(u_1, \ldots, u_k)$ и $S(K_tG) \cong K(u_1, \ldots, u_k)_p = 1$. Таким образом $f_0(S)=0$.

2) Пусть $(K(u_1, \ldots, u_k): K) < p^{n_1+\cdots+n_k}$. Положим $a_j = b_j^{p^{s_j}}$, $j = 1, \ldots, k$. Рассмотрим два подслучая.

2.1) Пусть существует элемент $s_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k$. Образуем элементы

$$x_\lambda = 1 + \lambda g_j \left(g_j^{p^{n_j-1}} - b_j^{p^{s_j-1}}\right) \in S(K_tG)\,[p], \quad \lambda \in K.$$

Как в доказательстве теоремы 3 видно, что для различных $\lambda \in K$ элементы x_λ принадлежат различным смежным классам группы $S(K_tG)$ по $S^p(K_tG)\,[p]$. Следовательно, $f_0(S) = |K|$.

2.2) Пусть $s_1 = \cdots = s_k = 0$. Из $(K(u_1, \ldots, u_k): K) < p^{n_1+\cdots+n_k} = \dim(K_tG)$, вытекает $\operatorname{Ker}\theta \neq 0$, т. е., ввиду (13), $J(K_tG) \neq 0$. Так как K_tG — артиновая алгебра, то $J(K_tG)$ — нильпотентный идеал. Выбираем такой элемент $v \in J(K_tG)$, что $v \neq 0$ и $1+v$ — элемент максимального конечного порядка p^ν, т. е. для которого $\vartheta^{p^\nu} = 0$, $\vartheta^{p^{\nu-1}} \neq 0$ и если $\vartheta_1 \in J(K_tG)$, то $\vartheta_1^{p^\nu} = 0$. Рассмотрим два подслучая случая 2.2, а именно: а) $\nu \neq 1$ и б) $\nu = 1$.

а) Пусть $\nu \neq 1$. Образуем элементы вида

$$y_\lambda = 1 + \lambda g_1 \vartheta^{p^{\nu-1}} \in S(K_tG)\,[p], \quad \lambda \in K.$$

При $\lambda \neq \mu$, $\mu \in K$ имеет место $y_\lambda S^p[p] \neq y_\mu S^p[p]$. В противном случае получится

$$1 + \lambda g_1 \vartheta^{p^{\nu-1}} = (1 + \mu g_1 v^{p^{\nu-1}}) \sum_{g \in G} \lambda_g^p g^p.$$

В левой части этого равенства классу G^p принадлежит только элемент 1. Следовательно, $\Sigma \lambda_g^p g^p = 1$. Тогда получится

$$(\lambda - \mu) g_1 \vartheta^{p^{\nu-1}} = 0, \quad \text{т. е.} \quad (\lambda - \mu)\vartheta^{p^{\nu-1}} = 0,$$

откуда вытекает противоречие $\vartheta^{p^{\nu-1}} = 0$. Следовательно, $f_0(S) \geqq |K|$ и ввиду леммы 4, имеем $f_0(S) = |K|$.

б) Пусть $\nu = 1$. Тогда, ввиду леммы 7, имеет место $S(K_tG) = 1 + J(K_tG)$. Следовательно, $S^p(K_tG) = 1$. Тогда $f_0(S) = |S| = |K|$, где последнее равенство вытекает из леммы 4.

Теперь мы можем вычислить $f_i(S)$ в случае II) для любого i, $0 \leqq i < n_k$. Так как $G^{(p^i)} = G^{p^i}$ и

$$G^{p^i} = \langle g_{l_i}^{p^i} \rangle \times \cdots \times \langle g_k^{p^i} \rangle,$$

то, имея ввиду формулу (6′), приходим к

(15) $$(K_tG)^{p^i} = (K^{p^i})\left(a_1^{p^{i-n_1}}, \ldots, a_{l_i-1}^{p^{i-n_{l_i-1}}}, a_{l_i}, a_{l_i+1}, \ldots, a_k\right) = (L_i)_t\, G^{p^i}.$$

Определяющими равенствами алгебры $(L_i)_t G^{p^i}$ будут

(16) $$\left(g_j^{p^i}\right)^{p^{n_j-i}} = a_j, \quad l_i \leqq j \leqq k.$$

Из формул (5) и (15) получится

(17) $$f_i(S(K_tG)) = f_0(S((L_i)_t G^{p^i})).$$

Из леммы 5 и из (16) вытекает

$$(L_i)_t G^{p^i} \cong L_i[x_{il_i}, \ldots, x_{ik}] / \langle x_{il_i}^{p^{n_{l_i}-i}} - a_{l_i}, \ldots, x_{ik}^{p^{n_k-i}} - a_k \rangle. \tag{18}$$

Пусть справедливы предположения случая II. I). Отметим, что формула (14), которая относится к полю K, была получена на основании формулы (10). Если теперь заменим поле K полем L_i и вместо (10) используем (18), получим $f_0(S((L_i)_t G^{p^i})) = 0$, т. е. ввиду (17) — $f_i(S(K_t G)) = 0$.

Пусть имеют место предположения случая II. II). Тогда формула (14), в которой поле K заменено полем L_i, дает

$$f_0(S((L_i)_t G^{p^i})) = |L_i|.$$

Так так $|L_i| = |K|$, то из (17) получается $f_i(S) = |K|$. Предложение доказано.

Следствие 9. *Пусть u_i — корень полинома $x^{p^{n_i}} - a_i$, $i = 1, \ldots, k$. Алгебра $K_t G$ — поле тогда и только тогда, когда $(K(u_1, \ldots, u_k) : K) = p^{n_1 + \cdots + n_k}$.*

Доказательство. Достаточность рассмотрена в доказательстве случая 1) предложения 8.

Необходимость. Предположим, что $(K(u_1, \ldots, u_k) : K) < p^{n_1 + \cdots + n_k}$. Если некоторое $s_i \neq 0$, $1 \leqq i \leqq k$, то $g_i^{p^{n_i - 1}} - b_i^{p^{s_i - 1}}$ является ненулевым нильпотентным элементом алгебры $K_t G$, что есть противоречие. Пусть $s_1 = \cdots = s_k = 0$. Тогда, ввиду случая 2.2) доказательства предложения 8, имеет место $J(K_t G) \neq 0$, что является противоречием.

Следствие 10. *Если $f_i(S) = 0$, то $f_{i+1}(S) = 0$.*

Доказательство. Если $i \geqq n_k$, то $S^{p^i}(K_t G) = 1$. Следовательно, $f_i(S) = 0$ для каждого $i \geqq n_k$. Поэтому предположим, что $i < n_k$. Будем использовать обозначения предложения 8. Так как, ввиду данного условия и формулы (17), имеет место

$$0 = f_i(S) = f_0(S((L_i)_t G^{p^i})),$$

то из формулы (14) получится $(L_i(u_{il_i}, \ldots, u_{ik}) : L_i) = p^{n_{l_i} + \cdots + n_k}$.

Отсюда, ввиду следствия 9, вытекает, что алгебра $(L_i)_t G^{p^i}$ — поле, т. е. в силу формулы (15), что $(K_t G)^{p^i}$ — поле. Тогда $(K_t G)^{p^{i+1}}$ — поле. Из этого результата, из $f_{i+1}(S) = f_0(S^{p^{i+1}}(K_t G))$ и из формулы (5) следует $f_{i+1}(S) = 0$.

Определение 11. *Элементы $u_1, \ldots, u_k$ алгебраического замыкания $\bar{K}$ поля K называются относительно алгебраически зависимыми над K, если или 1) по крайней мере один из этих элементов принадлежит полю K или 2) эти элементы не принадлежат полю K и существует такой ненулевой полином $f(x_1, \ldots, x_k)$ над K, что $f(u_1, \ldots, u_k) = 0$ и $\deg_{x_i} f(x_1, \ldots, x_k) < \deg_K u_i$ для каждого $i = 1, \ldots, k$, где $\deg_K u_i$ — степень алгебраичности элемента u_i над полем K. В противном случае $u_1, \ldots, u_k$ называются относительно алгебраически независимыми.*

Лемма 12. *Пусть поле K бесконечно, имеют место формулы (8), $i \in \mathbf{N}_0$ и $0 \leqq i \leqq n_k$. Тогда формула*

$$(L_i(u_{il_i}, \ldots, u_{ik}) : L_i) = \lambda_i, \quad \lambda_i = p^{n_{l_i} + \cdots + n_k - (k - l_i) i} \tag{19}$$

справедлива тогда и толька тогда, когда элементы $u_{il_i}, \ldots, u_{ik}$ относительно алгебраически независимы над полем L_i.

Доказательство. Определим отображение

$$\theta_i : (L_i)_t G^{p^i} \to L_i(u_{il_i}, \ldots, u_{ik})$$

посредством формулы $\theta_i(g_j^{p^i})=u_{ij}$ и продолжая его по линейности и мультипликативности. Очевидно θ_i — сюръективный L_i-гомоморфизм. Следовательно,

$$(L_i)_t G^{p^i}/\mathrm{Ker}\,\theta_i \cong L_i(u_{il_i}, \ldots, u_{ik}). \tag{20}$$

Пусть имеет место формула (19). Так как размерность $\dim_{L_i}(L_i)_t G^{p^i}$ алгебры $(L_i)_t G^{p^i}$ над полем L_i равняется λ_i, то из (20) вытекает $\mathrm{Ker}\,\theta_i=0$. Следовательно,

$$(L_i)_t G^{p^i} \cong L_i(u_{il_i}, \ldots, u_{ik}). \tag{21}$$

Из (19) вытекает, что для элементов u_{ij} имеет место $u_{ij}\notin L_i$, $l_i\leq j\leq k$. Допустим что элементы u_{ij}, $l_i\leq j\leq k$ относительно алгебраически зависимы над L_i. Следовательно, существует такой полином $\psi(x_{il_i}, \ldots, x_{ik})=\psi$, что $\psi(u_{il_i}, \ldots, u_{ik})=0$ и $\deg_{x_{ij}}\psi<\deg_{L_i}u_{ij}$. Очевидно, отображение $\varphi: L_i(x_{il_i}, \ldots, x_{ik})\to(L_i)_t G^{p^i}$, определенное аналогично отображению φ леммы 5 посредством $\varphi(x_{ij})=g_j^{p^i}$, $l_i\leq j\leq k$ и продолженное по линейности и мультипликативности, является сюръективным L_i-гомоморфизмом с ядром

$$\mathrm{Ker}\,\varphi=\langle x_{il_i}^{p^{n_{l_i}-i}}-a_{l_i}, \ldots, x_{ik}^{p^{n_k-i}}-a_k\rangle.$$

Так как $\psi(x_{il_i}, \ldots, x_{ik})\notin \mathrm{Ker}\,\varphi$, то $\varphi(\psi(x_{il_i}, \ldots, x_{ik})\neq 0$, т. е. $\psi(g_{l_i}^{p^i}, \ldots, g_k^{p^i})\neq 0$ и $\psi(g_{l_i}^{p^i}, \ldots, g_k^{p^i})\in(L_i)_t G^{p^i}$. Тогда $\theta_i(\psi(g_{l_i}^{p^i}, \ldots, g_k^{p^i}))=\psi(u_{il_i}, \ldots, u_{ik})=0$, т. е. ненулевой элемент отображается изоморфизмом θ_i в 0, что является противоречием. Следовательно, элементы $u_{il_i}, \ldots, u_{ik}$ относительно алгебраически независимы над K.

Пусть, наоборот, элементы $u_{il_i}, \ldots, u_{ik}$ относительно алгебраически независимы над L_i. Следовательно, они не принадлежат полю L_i. Докажем, что L_i-гомоморфизм θ_i является изоморфизмом. Допустим противное, т. е. что существует ненулевой элемент $\psi(g_{l_i}^{p^i}, \ldots, g_k^{p^i})$, отображающийся через θ_i в 0. Тогда

$$\psi(u_{il_i}, \ldots, u_{ik})=\theta_i(\psi(g_{l_i}^{p^i}, \ldots, g_k^{p^i}))=0,$$

т. е. $\psi(u_{il_i}, \ldots, u_{ik})=0$. Отсюда и из $\deg_{x_{ij}}\psi<p^{n_j-i}=\deg_{L_i}u_{ij}$ вытекает, что элементы $u_{il_i}, \ldots, u_{ik}$ относительно алгебраически зависимы над L_i, что является противоречием. Следовательно, θ_i — изоморфизм, т. е. имеет место (21), откуда вытекает

$$\lambda_i=\dim_{L_i}(L_i)_t G^{p^i}=(L_i(u_{il_i}, \ldots, u_{ik}): L_i).$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 13. *Пусть K — бесконечное поле с характеристикой p, G — конечная абелева группа, заданная формулой (8), скрещенная групповая алгебра K_tG определена равенствами (9) и λ — наименьшее неотрицательное целое число, для которого элементы $u_{\lambda l_\lambda}, \ldots, u_{\lambda k}$ относительно алгебраически независимы над L_λ. Если $\lambda=0$, то $S(K_tG)=1$, а если $\lambda>0$, то $\lambda\leq n_k$ и*

$$S(K_tG)\cong \prod_{i=1}^{\lambda} \prod_{|K|} (p^i). \tag{22}$$

Доказательство. Для числа λ с указанным свойством, ввиду леммы 12 и предложения 8, имеет место $f_\lambda(S)=0$ и $\lambda\leqq n_k$. Тогда для каждого $i\geqq\lambda$, в силу следствия 10, справедливо $f_i(S)=0$. Из леммы 12, из определения числа λ и из леммы 8 вытекает, что $S(K_tG)$ имеет показатель p^λ. Если $\lambda=0$, то, очевидно, что $S(K_tG)=1$. Пусть $\lambda>0$. Так как $f_i(S)=|K|$ для каждого $i<\lambda$, то $S(K_tG)$ обладает разложением (22). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Ленг. Алгебра. М., 1968.
2. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. I. *Publ. Math.*, 18, 1971, 9—21.
3. Н. А. Начев, Т. Ж. Моллов. Минимальные идемпотенты полупростых скрещенных групповых алгебр циклических p-групп нечетного порядка. *Publ. Math.* (в печати).
4. Н. А. Начев, Т. Ж. Моллов. Изоморфизм полупростых скрещенных групповых алгебр циклических p-групп нечетного порядка. *Сердика* (в печати).

Пловдивский университет
„Паисий Хилендарски"
кафедра алгебры
4000 Пловдив

Поступила 4. 1. 1987 г.