Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ $\vec{G}/M/r$ С КОНЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

ЯНОШ СТРИК

В настоящее время при изучении поведения сложных систем все шире используются методы теории массового обслуживания. Часто возникают ситуации, когда требования, поступающие на обслуживание, прибывают из конечного источника (например, конечное число станков, выходящих из строя, которые закреплены за оператором, случаи телефонной и телеграфной нагрузки или проблемы из теории надежности). Такие ситуации, при которых требования поступают на обслуживание из конечного источника и после обслуживания возвращаются в источник, можно описать математической моделью, называемой „моделью обслуживания очередей с конечным источником требований". Как известно, исследование функционирования таких систем может быть либо с помощью кусочно-линейных марковских процессов [3, 4, 5, 6, 9], либо при использовании метода вложенных цепей Маркова [15].

В последние годы в связи с быстрым развитием АСУ, информационных и вычислительных систем особую актуальность приобрели вопросы исследований вышеуказанных систем. Этим проблемам посвящены, например [1, 2, 7, 11].

В статье рассмотрена система $\vec{G}/M/r$ с конечным числом неоднородных источников требований. Предполагаем, что система управляется эргодической цепью Маркова, т. е. она принадлежит к классу сложных систем, изучаемых в [8, 10]. Основной целью настоящей статьи является обобщение результатов [12, 14] и получение важных стационарных характеристик системы. Читатель заметит, что система представляет собой замкнутую сеть массового обслуживания, которая содержит два узла и функционирует в случайной среде.

Постановка задачи и математическая модель. Рассмотрим систему массового обслуживания, состоящую из r идентичных обслуживающих приборов. Требования возникают в $n>r$ источниках. Предполагаем, что имеется необходимость в выполнении некоторых операций, связанных с пребываниями заявок в источнике. Если в данный момент требование некоторого источника обслуживается, то новое требование данный источник послать не может. Величина работы i-й операции — случайная величина с плотностью вероятности $f_i(x)$ и математическим ожиданием $1/\lambda_i$ $i=\overline{1, n}$. По окончании i-й операции, i-я заявка поступит в систему, где обслуживание происходит по дисциплине первым пришел — первым ушел (FIFO). Величина работы, связанная с обслуживанием заявок — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром μ для всех требований. Величины работ, соответствующие всем операциям и обслуживаниям, будем считать независимыми.

Предполагается, что система управляется состояниями некоторого эргодического марковского процесса $Z(t)$, заданного на конечном множестве состояний $\{1, 2, \dots, m\}$ с матрицей интенсивностей вероятностей переходов $\{\eta_{ij}, i, j=\overline{1, m}\}$, $\eta_i=\sum_{j\neq i}\eta_{ij}$.

Введем обозначения:

$\nu(t)$ — число требований в источнике в момент t;

$(\alpha_1(t), \dots, \alpha_{\nu(t)}(t))$ — их индексы в лексикографическом порядке;

$\xi_{\alpha i(t)}$ — величина работы, выполненной до момента t по $\alpha_i(t)$-й операции, $i=1, \dots, \nu(t)$;

$(\beta_1(t), \ldots, \beta_{n-\nu(t)}(t)$ — индексы требований, находящихся в центре обслуживания в порядке поступления;

$a(k, s)$ — темп выполнения операций при условии $\nu(t)=k$, $Z(t)=s$;

$r(k, s)$ — скорость выполнения обслуживаний при условии $\nu(t)=k$, $Z(t)=s$.

Легко видеть, что

$$\underline{X}(t)=\{\nu(t);\ \alpha_i(t),\ \ \xi_{\alpha_i(t)},\ i=\overline{0, \nu(t)};\ \beta_j(t),\ j=\overline{0, n-\nu(t)};\ Z(t)\}$$

является кусочно-линейным марковским процессом с множеством состояний

$$\mathbf{E}=\{(i_1, \ldots, i_k;\ x_1, \ldots, x_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s),\ (i_1, \ldots, i_k)\in C_k^n,\ i_0=0,\ k=\overline{0, n},$$

$$(j_1, \ldots, j_{n-k})\in V_{n-k}^n,\ \ j_0=0,\ \ s=\overline{1, m},\ \ x_i\in\mathbf{R}_+\}.$$

Обозначим через $Q_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s}(x_1, \ldots, x_k;\ t)$ распределение $\underline{X}(t)$, т. е.

$$Q_{0;\ j_1, \ldots, j_n;\ s}(t)=P\{\nu(t)=0;\ \beta_r(t)=j_r;\ v=\overline{1, n};\ Z(t)=s\},$$

$$Q_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s}(x_1, \ldots, x_k;\ t)$$

$$=P\{\nu(t)=k;\ \alpha_l(t)=i_l,\ \ \xi_{i_l}<x_l,\ l=\overline{1, k};\ \beta_r(t)=j_r,\ \ v=\overline{1, n-k};\ Z(t)=s\}.$$

Будем рассматривать только стационарный режим работы системы, т. е. найдем функции

$$Q_{0;\ j_1, \ldots, j_n;\ s}=\lim_{t\to\infty} Q_{0;\ j_1, \ldots, j_n;\ s}(t); \tag{1}$$

$$Q_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s}(x_1, \ldots, x_k)=\lim_{t\to\infty}\ Q_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s}(x_1, \ldots, x_k;\ t),$$

которые существуют, если

$$0<1/\lambda_i<\infty;\ \ a(k, s)>0;\ \ v(k-1, s)>0;\ \ \eta_s>0;\ \ 0<1/\mu<\infty;$$

$$i=\overline{1, n};\ \ k=\overline{1, n};\ \ s=\overline{1, m}\ \ \text{(согласно [4], с. 211).}$$

Обозначим:

$$q_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s}(x_1, \ldots, x_k)=\frac{\partial_k}{\partial x_1\cdots\partial x_k}\,Q_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s}(x_1, \ldots, x_k) \tag{2}$$

$$q^*_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s}(x_1, \ldots, x_k)=\frac{q_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s}(x_1, \ldots, x_k)}{[1-F_{i_1}(x_1)]\cdots[1-F_{i_k}(x_k)]}, \tag{3}$$

где

$$F_l(x)=\int_0^x f_l(u)du,\quad l\in\{1, \ldots, n\}.$$

Аналогично [13] нетрудно проверить, что функции (3) удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений (4), (4a), (5), (5a) и граничным условиям (4b), (5b)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^*_{a(n, s)} q^*_{1, \ldots, n;\ 0;\ s}(x_1, \ldots, x_n)=-\eta_s q^*_{1, \ldots, n;\ 0;\ s}(x_1, \ldots, x_n) \tag{4}$$
$$+\sum_{l\neq s}\eta_{ls}q^*_{1, \ldots, n;\ 0;\ l}(x_1, \ldots, x_n);$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_k}\right]^*_{a(k, s)} q^*_{i_1, \ldots, i_k;\ j_1, \ldots, j_{n-k};\ s}(x_1, \ldots, x_k)$$

$$(4a)\qquad =[(n-k)\mu(k,s)+\eta_s]q^*_{i_1,\ldots,i_k;\,j_1,\ldots,j_{n-k};\,s}(x_1,\ldots,x_k)$$

$$+\int_0^\infty q^*_{i'_1,\ldots,j'_{n-k},\ldots,i'_k;\,j_1,\ldots,j_{n-k-1};\,s}(x'_1,\ldots,y',\ldots,x'_k)a(k+1,s)f_{j_{n-k}}(y)dy$$

$$+\sum_{l\neq s}\eta_{ls}q^*_{i_1,\ldots,i_k;\,j_1,\ldots,j_{n-k};\,l}(x_1,\ldots,x_k);$$

$$(4b)\qquad q^*_{i_1,\ldots,i_k;\,j_1,\ldots,j_{n-k};\,s}(x_1,\ldots,x_{l-1},0,x_{l+1},\ldots,x_k)a(k,s)=$$

$$\mu(k-1,s)\sum_{V^{i_l}_{j_1,\ldots,j_{n-k}}} q^*_{i_1,\ldots,i_{l-1},i_{l+1},\ldots,i_k;\,j_1,\ldots,i_l,\ldots,j_{n-k};\,s}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_k)$$

$$1\leq l\leq k,\quad 0\leq n-k<r;$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_k}\right]^*_{a(k,s)}q^*_{i_1,\ldots,i_k;\,j_1,\ldots,j_{n-k};\,s}(x_1,\ldots,x_k)$$

$$(5)\qquad -[r\mu(k,s)+\eta_s]q^*_{i_1,\ldots,i_k;\,j_1,\ldots,j_{n-k};\,s}(x_1,\ldots,x_k)$$

$$+\int_0^\infty q^*_{i'_1,\ldots,i'_{n-k},\ldots,i'_k;\,j_1,\ldots,j_{n-k-1};\,s}(x'_1,\ldots,y',\ldots,x'_k)a(k+1,s)f_{j_{n-k}}(y)dy$$

$$+\sum_{l\neq s}\eta_{ls}q^*_{i_1,\ldots,i_k;\,j_1,\ldots,j_{n-k};\,l}(x_1,\ldots,x_k);$$

$$(5a)\qquad [v\mu(0,s)+\eta_s]Q_{0;\,j_1,\ldots,j_n;\,s}\sum_{l\neq s}\eta_{ls}Q_{0;\,j_1,\ldots,j_n;\,l}$$

$$+\int_0^\infty q^*_{j_n;\,j_1,\ldots,j_{n-1};\,s}(y)a(1,s)f_{j_n}(y)dy;$$

$$(5b)\qquad q^*_{i_1,\ldots,i_k;\,j_1,\ldots,j_{n-k};\,s}(x_1,\ldots,x_{l-1},0,x_{l+1},\ldots,x_k)a(k,s)=$$

$$\mu(k-1,s)\sum_{V^{i_l}_{j_1,\ldots,j_{r-1}}} q^*_{i_1,\ldots,i_{l-1},i_{l+1},\ldots,i_k;\,j_1,\ldots,i_l,\ldots,j_{n-k}\,s}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_k),$$

где $(i'_1,\ldots,j'_{n-k},\ldots,i'_k)$ — индексы $(i_1,\ldots,i_k,j_{n-k})$ в лексикографическом порядке; $(x'_1,\ldots,y',\ldots,x'_k)$ — соответствующие величине работы;

$$V^{i_l}_{j_1,\ldots,j_s}=\{(i_l,j_1,\ldots,j_s),(j_1,i_l,\ldots,j_s),\ldots,(j_1,\ldots,j_s,i_l)\},\quad \mu(k,s)=\mu r(k,s);$$

$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_k}\right]^*_{a(k,s)}$ — производный по направлению $(a(k,s),\ldots,a(k,s))$ оператор.

Обозначим $Q_0=\lim_{t\to\infty}P\{\nu(t)=0\}$, $Q_{i_1,\ldots,i_k}=\lim_{t\to\infty}P\{\nu(t)=k;\ \alpha_l(t)=i_l,\ l=\overline{1,k}\}$, $(i_1,\ldots,i_k)\in\overline{C^n_k}$, $k=1,n$.

Теорема 1. *Стационарные вероятности* Q_0, $Q_{i_1,\ldots,i_k}$ *имеют вид*

$$(6)\qquad Q_0=n!\sum_{s=1}^m c(0,s),$$

$$(7)\qquad Q_{i_1,\ldots,i_k}=\begin{cases}\dfrac{r^k(n-k)!}{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}}\sum\limits_{s=1}^m\dfrac{\mu(k-1,s)\cdots\mu(0,s)}{a(k,s)\cdots a(1,s)}c(0,s), & 1\leq k\leq n-r;\\[2ex] \dfrac{r!\,r^{n-r}}{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}}\sum\limits_{s=1}^m\dfrac{\mu(k-1,s)\cdots\mu(0,s)}{a(k,s)\cdots a(1,s)}c(0,s), & n-r\leq k\leq n,\end{cases}$$

где $c(0, s)$ *удовлетворяют системе уравнений* $\eta_s c(0, s) = \sum_{l \neq s} \eta_{ls} c(0, l)$, *и условию нормировки*

$$Q_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{C_k^n} Q_{i_1, \ldots, i_k} = 1. \tag{8}$$

Доказательство. Легко видеть, что, если $Q_{0\,;\, j_1, \ldots, j_n\,;\, s} = c(0, s)$,

$$q^*_{i_1, \ldots, iu\,;\, j_1, \ldots, j_{n-k}\,;\, s}(x_1, \ldots, x_k) = c(k, s),$$

то из (4b) и (5b) получим

$$a(k, s)\, c(k, s) = (n-k+1)\mu(k-1, s) c(k-1, s), \quad 0 \leq n-k < r; \tag{9}$$

$$a(k, s) c(k, s) = r\mu(k-1, s)\, c(k-1, s), \quad r \leq n-k \leq n. \tag{10}$$

Также нетрудно убедиться в том, что $c(k, s)$ удовлетворяют (4), (4a) (5), (5a), если

$$\eta_s c(k, s) = \sum_{l \neq s} \eta_{ls} c(k, l). \tag{11}$$

Заметим, что соотношения (10) и (9) можно переписать следующим образом

$$c(k, s) = \frac{r^k \mu(k-1, s) \cdots \mu(0, s)}{a(k, s) \cdots a(1, s)}\, c(0, s), \quad 1 \leq k \leq n-r; \tag{12}$$

$$c(k, s) = \frac{r!}{(n-k)!}\, r^{n-r} \cdot \frac{\mu(k-1, s) \cdots \mu(0, s)}{a(k, s) \cdots a(1, s)}\, c(0, s), \quad n-r < k \leq n. \tag{13}$$

Итак, для (11) достаточно решить

$$\eta_s c(0, s) = \sum_{l \neq s} \eta_{l,} c(0, l). \tag{14}$$

Известно, что решение системы (14) зависит от одного параметра, скажем $c(0, 1)$ который определяется условием нормировки (8). Используя (2) и (3), из (12), (13) непосредственно следуют (6) и (7).

Теорема доказана.

Замечание. *Поскольку* $r(k-1, s) = 1$, $a(k, s) = 1$, $k = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, m}$, *то* $c(u, s) = c_k$ *и из (13) получим*

$$c_0 = c_n / (r^{n-r} r!\ \mu^n).$$

Таким образом (12) и (13) имеют вид

$$c_k = c_n / (r!\ r^{n-k-r} \mu^{n-k}), \quad k = \overline{0, n-r};$$

$$c_k = c_n / ((n-k)!\ \mu^{n-k}), \quad k = \overline{n-r+1, n},$$

которые были получены в [14].

Основные стационарные характеристики системы. Результаты теоремы 1 далее будут использованы для определения основных характеристик процесса обслуживания.

(i) Обозначив через U производительность центра обслуживания, т. е.

$$U = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi(\nu(t) > 0) dt,$$

получим $U = 1 - Q_{1, \ldots, n}$.

Поскольку $f_i(x)=\lambda_i e^{-\lambda_i x}$, $i=\overline{1, n}$, тогда средняя длительность периода занятости равна

$$\mathbf{E}\,\partial=\frac{1-Q_{1,\ldots,n}}{Q_{1,\ldots,n}}\sum_{s=1}^{m}\pi_s m_s,$$

где

$(\pi_1,\ldots,\pi_s,\ldots,\pi_m)$ — стационарное распределение цепи $Z(t)$; m_s — средняя длительность периода незанятости, начинающейся при $Z(t)=s$, определяемая из системы уравнений

$$m_s=\frac{1}{\eta_s+a(n, s)\Sigma\lambda_i}+\sum_{l\neq s}\frac{\eta_{sl}}{\eta_s+a(n, s)\Sigma\lambda_i}\,m_l.$$

(ii) Нетрудно убедиться в том, что производительность обслуживающего прибора имеет вид

$$U_s=\frac{1}{r}\,\Big(r\sum_{k=0}^{n-r}\widehat{Q}_k+\sum_{k=n-r+1}^{n}(n-k)\widehat{Q}_k\Big)$$

где

$$\widehat{Q}_k=\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in C_k^u}Q_{i_1,\ldots,i_k};$$

(iii) $\bar{r}$ — среднее число занятых приборов. В случае задачи о простоях станков коэффициент готовности станка — средняя доля времени пребывания станка в рабочем состоянии — является важной характеристикой. Обозначая через U_i коэффициент готовности i-го станка, имеем

$$U_i=Q^{(i)}=\sum_{k=1}^{n}\;\sum_{i\in(i_1,\ldots,i_k)\in C_k^n}Q_{i_1,\ldots,i_k}.$$

В частности, при $f_i(x)=\lambda_i\exp(-\lambda_i x)$ в силу формулы Литтла, получаем

$$\lambda_i\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}a(k, s)Q_{k,s}^{(i)}\Big)T_i=1-Q^{(i)},$$

где

$$Q_{k,s}^{(i)}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i\in(i_1,\ldots,i_k)}\frac{r^k(n-k)!}{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}}\prod_{l=1}^{k}\frac{\mu(l-1, s)}{a(l, s)}\,c(0, s), & 1\leq k\leq n-r;\\ \displaystyle\sum_{i\in(i_1,\ldots,i_k)}\frac{r!\,r^{n-r}}{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}}\prod_{l=1}^{k}\frac{\mu(l-1, s)}{a(l, s)}\,c(0, s), & n-r<k\leq n;\end{cases}$$

T_i — среднее время пребывания i-го станка в центре обслуживания. Следовательно, $T_i=(1-Q^{(i)})/(\lambda_i\sum_{k,s}a(k, s)\,Q_{k,s}^{(i)})$, которое в вычислительной литературе называется средним временем ответа i-го задания.

(iv) Наконец, среднее число требований, находящихся в центре обслуживания, имеет вид

$$\bar{n}=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\widehat{Q}_k=\sum_{i=1}^{n}(1-Q^{(i)}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. О. И. Авен, Я. А. Коган. Управление вычислительным процессом в ЭВМ. М., 1978.
2. Л. Б. Богуславский. Управление потоками данных в сетях ЭВМ. М., 1984.
3. Н. П. Бусленко, В. В. Калашников, И. Н. Коваленко. Лекции по теории сложных систем. М., 1973.
4. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. Введение в теорию массового обслуживания. М., 1966.
5. Б. В. Гнеденко (ред.) Вопросы математической теории надежности. М., 1983.
6. Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. Теория массового обслуживания. М., 1982.
7. Л. Клейнрок. Вычислительные системы с очередями. М., 1979.
8. В. В. Рыков. Управляемые системы массового обслуживания. ВИНИТИ, 12, 1975, 43—153.
9. Т. П. Саати. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М., 1971.
10. Д. С. Сильвестров. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. М., 1980.
11. Д. Феррари. Оценка производительности вычислительных систем. М., 1981.
12. B. D. Bunday, R. E. Scraton. The $G/M/r$ machine interference model. *Eur. J. Oper. Res.*, 4, 1980, 399—402.
13. J. W. Cohen. The multiple phase service network with generalized processor sharing. *Acta Inf.*, 12, 1979, 245—284.
14. J. Sztrik. A queueing model for multiprogrammed computer systems with different *I/O* times. *Acta Cyber.*, 7, 1984, 127—135.
15. L. Takacs. Introduction to the Theory of Queues. New York, 1962.

Поступила 2. 2. 1987

Институт математики
Дебреценский университет
Дебрецен, Венгрия