Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

PROBLEMES UNIVERSELS RELATIFS AUX CLASSES POLAIRES

DEKO V. DEKOV

Des problèmes universels sont considerés dans la catégorie des classes polaires. Nous utilisons les notions et les notations introduites par Ch. Ehresmann [6].

Certains resultats de ce travail ont été résumés dans deux Notes aux Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences [3,4].

1. Classes polaires. Les notations de ce travail sont ceux du livre [6]. En particulier, $\mathcal{M}$ désigne la catégorie des applications associée à un univers $\mathcal{M}_0$; $\mathcal{G}$ (resp.. $\mathcal{N}$) désigne la catégorie des homomorphismes entre graphes orientés (resp. entre classes multiplicatives) associée à $\mathcal{M}_0$.

Une classe polaire est un quadruplet $P^\cdot=(C, k, \beta, \alpha)$ tel que $[C]=(C, \beta, \alpha)$ soit un graphe orienté et que $C^\cdot=(C, k)$ soit une classe multiplicative. Soient $P^\cdot=(C, k, \beta, \alpha)$ et $\widehat{P}^\cdot=(\widehat{C}, \widehat{k}, \widehat{\beta}, \widehat{\alpha})$ deux classes polaires; on appelle homomorphisme de $P^\cdot$ vers $\widehat{P}^\cdot$ un triplet $(\widehat{P}^\cdot, \varphi, P^\cdot)$ tel que

$$([\widehat{C}], \varphi, [C])\in\mathcal{G} \quad \text{et} \quad (\widehat{C}^\cdot, \varphi, C^\cdot)\in\mathcal{N}.$$

Soit $\mathcal{N}_g$ la classe des homomorphismes entre classes polaires $(\widehat{P}^\cdot, \varphi, P^\cdot)$ tels que $(\widehat{C}, \varphi, C)\in\mathcal{M}$. La classe $\mathcal{N}_g$ est une catégorie pour la loi de composition:

$$(\widehat{P}_1^\cdot, \varphi_1, P_1^\cdot).(\widehat{P}^\cdot, \varphi, P^\cdot)=(\widehat{P}_1^\cdot, \varphi_1\varphi, P^\cdot) \text{ si, et seulement si, } P_1^\cdot=\widehat{P}^\cdot.$$

Nous identifions la classe d'objets de $\mathcal{N}_g$ à la classe d'unités de $\mathcal{N}_g$ notée $(\mathcal{N}_g)_0$. Pour simplifier l'écriture, nous désignons $C^\cdot=(C, k, \beta, \alpha)$ au lieu de $P^\cdot=(C, k, \beta, \alpha)$.

Soit $p_{\mathcal{N}_g}$ le foncteur canonique de $\mathcal{N}_g$ vers $\mathcal{M}$. On définit sous-classes polaires et classes polaires quotient comme $p_{\mathcal{N}_g}$-sous-structures et $p_{\mathcal{N}_g}$-structures quotients.

Soient $C^\cdot=(C, k, \beta, \alpha)$ une classe polaire et r une relation d'équivalence sur C. On dira que r est bicompatible sur $C^\cdot$ si r est compatible avec α et β ([6], chap. III, déf. 12) et si r est compatible sur (c, k) ([6], chap. III, déf. 10). Pour qu'il existe une classe polaire qotient $C^\cdot/r$ de $C^\cdot$ par r, il faut et il suffit que r soit bicompatible sur $C^\cdot$. Soit R la classe des relations d'équivalence bicompatibles sur $C^\cdot$ et contenant r. La relation intersection des toutes r', $r'\in R$ est une relation d'équivalence bicompatible sur $C^\cdot$ appelée relation d'équivalence bicompatible sur $C^\cdot$ engendrée par la relation r.

Soit $(\widehat{C}^\cdot, \varphi, C^\cdot)\in\mathcal{N}_g$. Soit r_φ la relation d'équivalence sur C associée à φ. La relation r_φ est bicompatible sur $C^\cdot$. Soit r une relation sur C et soit $\widehat{r}$ la relation d'équivalence bicompatible sur $C^\cdot$. engendrée par r. Si l'application φ est compatible avec r (c'est-à-dire si $r\subset r_\varphi$), alors φ est compatible avec $\widehat{r}$ (c'est-à-dire $\widehat{r}\subset r_\varphi$).

2. Précatégories quotient. Soit $[C]=(C, \beta, \alpha)$ un graphe orienté. Comme dans [9] nous désignons par $*[C]$ la classe des couples (g, f) tels que $f\in C$, $g\in C$ et $\alpha(g)=\beta(f)$.

Définition. *On appelle précatégorie une classe polaire* $C^{\cdot}=(C, k, \beta, \alpha)$ *dans laquelle sont vérifiés les axiomes suivants:*

(P. 1) $*[C]\subset C.*C^{\cdot}$.

(P. 2) $(f, \alpha(f))\in C^{\cdot}*C^{\cdot}$, $(\beta(f), f)\in C^{\cdot}*C^{\cdot}$ *et* $f.\alpha(f)=\beta(f).f=f$ *pour tout* $f\in C$.

(P. 3) *Les conditions* $(g, f)\in C^{\cdot}*C^{\cdot}, (h, g)\in C^{\cdot}*C^{\cdot}$, $(h, g.f)\in C^{\cdot}*C^{\cdot}$ *et* $(h.g, f)\in C^{\cdot}*C.$ *entraînent* $h.(g.f)=(h.g).f$.

Nous désignons par $\mathcal{N}_p$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$ ayant pour unités les précatégories et par $p_{\mathcal{N}_p}$ le foncteur canonique de $\mathcal{N}_g$ vers $\mathcal{M}$. On définit sous-précatégories et précatégories quotient comme $p_{\mathcal{N}_p}$-sous-structures $p_{\mathcal{N}_p}$-structures quotients. Pour que $G^{\cdot}\in(\mathcal{N}_p)_0$ soit une sous-précatégorie de $H^{\cdot}\in(\mathcal{N}_p)_0$, il faut et il suffit que $G.$ soit une sous-classe polaire de $H^{\cdot}$. Remarquons que dans un cas général $G^{\cdot}$ peut ne pas être une sous-classe multiplicative stable de $H^{\cdot}$.

Soit $q_{\mathcal{N}_p}$ le foncteur de $\mathcal{N}p$ vers $\mathcal{G}$ associant $[C^{\cdot}]\in\mathcal{G}_0$ à $C^{\cdot}\in(\mathcal{N}_p)_0$.

Théorème 1. *Le foncteur* $q_{\mathcal{N}_p}$ *admet un adjoint à gauche* $L_{\mathcal{N}_p}$.

Démonstration: Supposons $[G]=(G, \beta, \alpha)\in\mathcal{G}_0$. Soit $L_2[G]$ la classe des chemins propres de $[G]$ avec un longue 2, c'est-à-dire la classe des couples (g, f) tels que $f\in G$, $f\notin[G]_0$, $g\in G$, $g\notin[G]_0$ et $\alpha(g)=\beta(f)$. Associerons à $[G]$ un graphe orienté $\overline{[\overline{G}]}=(\overline{G}, \overline{\beta}, \overline{\alpha})$, $G\cap\overline{G}=\emptyset$, définit comme suit: $\overline{G}\setminus[\overline{G}]_0$ est la classe des éléments $\overline{(g, f)}$ tels que $\underline{(g, f)\in L_2[G]}$; $[\overline{G}]_0$ est la classe $A\cup B$ où A (resp. où B) est la classe des élements $\overline{\alpha(g, f)}$ (resp. des éléments $\overline{\beta(g, f)}$) tels que $(g, f)\in L_2[G]$. On a $(\overline{G}, \overline{\beta}, \overline{\alpha})\in\mathcal{G}_0$, en definissant: $\overline{\alpha}(\overline{(g, f)})=\overline{\alpha(g, f)}$ et $\overline{\beta}(\overline{(g, f)})=\overline{\beta(g, f)}$ si $\overline{(g, f)}\in\overline{G}\setminus[\overline{G}]_0$ et $\overline{\alpha}(e)=\overline{\beta}(e)=e$ si $e\in[\overline{G}]_0$. Posons $L_{\mathcal{N}_p}[G]=G\cup\overline{G}$. La classe $L_{\mathcal{N}_p}[G]$ est munie d'une structure de graphe orienté comme suit: $\widetilde{\alpha}(h)=\alpha(h)$ et $\widetilde{\beta}(h)=\beta(h)$ si $h\in G$; $\widetilde{\alpha}(h)=\overline{\alpha}(h)$ et $\widetilde{\beta}(h)=\overline{\beta}(h)$ si $h\in\overline{G}$. Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droit et à gauche étant:

$$k(g, f)=\overline{(g, f)} \text{ si, et seulement si, } (g, f)\in L_2[G].$$

Les axiomes d'une précatégorie sont vérifiés par $(L_{\mathcal{N}_p}[G], k, \widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha})$. Soit j l'application de $[G]$ vers $L_{\mathcal{N}_p}[G]$ définie par: $j(f)=f$ si $f\in G$. On a $\overline{j}=((L_{\mathcal{N}_p}[G], \widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}), j, [G])\in\mathcal{G}$ Soient $\widehat{C}^{\cdot}=(\widehat{C}, \widehat{k}, \widehat{\beta}, \widehat{\alpha})$ une précatégorie et $\underline{\psi}=([\widehat{C}^{\cdot}], \underline{\psi}, [G])\in\mathcal{G}$. Si $\overline{(g, f)}\in\overline{G}\setminus[\overline{G}]_0$, il existe un et un seul élément $(g, f)\in L_2[G]$ tel que $k(j(g), j(f))=\overline{(g, f)}$. La relation $(g, f)\in L_2[G]$ entraîne $\widehat{\alpha}(\psi(g))=\widehat{\beta}(\psi(f))$ d'où $(\psi(g), \psi(f))\in\widehat{C}^{\cdot}*\widehat{C}^{\cdot}$. Définissons l'application $(C, \underline{\psi}', L_{\mathcal{N}_p}[G])$ comme suit: $f\longrightarrow\psi(f)$, si $f\in G$, $\overline{(g, f)}\longrightarrow\psi(g).\psi(f)$, si $\overline{(g, f)}\in\overline{G}\setminus[\overline{G}]_0$, $\overline{\alpha(g, f)}\longrightarrow\widehat{\alpha}(\psi(g).\psi(f))$, si $\overline{\alpha(g, f)}\in A$, $\overline{\beta(g, f)}\longrightarrow\widehat{\beta}(\psi(g).\psi(f))$, si $\overline{\beta(g,f)}\in B$. On obtient

$$\psi'=(\widehat{C}^{\cdot};\ \underline{\psi}',\ L_{\mathcal{N}_p}[G]^{\cdot})\in\mathcal{N}_p \quad \text{et} \quad \psi=q_{\mathcal{N}_p}(\psi').\overline{j}.$$

Il en résulte, d'après le théorème 2, n° 1, chap. IV, [10], que le foncteur $q_{\mathcal{N}_p}$ admet un adjoint à gauche $L_{\mathcal{N}_p}$.

Une $q_{\mathcal{N}_p}$-structure libre engendrée par un graphe orienté sera appelée précatégorie libre. La précatégorie libre construite dans la démonstration du théorème 1 sera appellée précatégorie libre des chemins de $[G]$.

Soit $\mathscr{F}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_g$ formée par les homomorphismes entre catégories. Soit $L[G]^{\cdot}$ une catégorie libre engendrée par $[G] \in \mathscr{G}_0$. Alors $L[G]^{\cdot}$ est une $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projection de $L_{\mathscr{N}_p}[G]^{\cdot}$ pour tout $[G]$.

On appelle base de précatégorie une classe polaire $C^{\cdot} = (C, k, \beta, \alpha)$ dans laquelle sont vérifiés les axiomes (P. 2) et (P. 3).

Supposons $C^{\cdot} = (C, k, \beta, \alpha) \in (\mathscr{N}_g)_0$. Soit $r(C^{\cdot})$ la relation (C, A, C) où A est la classe des couples $(h.(g.f), (h.g).f)$ tels que $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, $(h, g) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, $(h, g.f) \in C^{\cdot} * C$. et $(h.g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$. Soit $\widehat{r}(C^{\cdot})$ la relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par la relation $r(C^{\cdot})$. Soit r_p la relation $(L_{\mathscr{N}_p}[C^{\cdot}], B, L_{\mathscr{N}_p}[G^{\cdot}])$ où B est la classe des couples $((\overline{g, f}), g.f)$ tels que $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$. Soit $\widehat{r_p}$ la relation d'équivalence compatible avec α et β engendrée par la relation r_p. Soit $\overline{j} = ([L_{\mathscr{N}_p}[C^{\cdot}]], j, [C^{\cdot}]) \in \mathscr{G}$ le homomorphisme universel construit dans la démonstration du théorème 1. Soit $\overline{r}_p = (L_{\mathscr{N}_p}[C^{\cdot}]^{\cdot} / \widehat{r}_p, \widetilde{r}_p, L_{\mathscr{N}_p}[C^{\cdot}])$ le $p_{\mathscr{N}_g}$-épimorphisme canonique. Posons $\zeta = \widetilde{r}_p j$. On a $\zeta = ([L_{\mathscr{N}_p}[C^{\cdot}]^{\cdot} / \widehat{r}_p], \underline{\zeta}, [C^{\cdot}]) \in \mathscr{G}$. On montre que ζ est injectif, c'est-à-dire ζ admet un inverse à gauche $\overline{\zeta}$. Désignons $K(C^{\cdot})^{\cdot} = L_{\mathscr{N}_p}[C^{\cdot}]^{\cdot} / \widehat{r}_p = (K(C^{\cdot}), \widehat{k}, \widehat{\beta}, \widehat{\alpha})$ et posons $K(C^{\cdot})^{\perp} = K(C^{\cdot}/, \overline{k})$ où la loi de composition $\overline{k}$ est définie par: $\overline{k}(\xi) = k(\xi)$, si $\xi \in K(C^{\cdot})^{\cdot} * K(C^{\cdot})^{\cdot}$ et $\overline{k}(\xi) = \underline{\zeta} . k . (\overline{\zeta} * \overline{\zeta})(\xi)$, si $\xi \in (\zeta * \zeta)(C^{\cdot} * C^{\cdot})$, $\xi \notin K(C^{\cdot})^{\cdot} * K(C^{\cdot})^{\cdot}$. Soit $C^{\cdot}$ une base de précatégorie. Soit $\underline{\iota} = (K(C^{\cdot})^{\perp}, \iota, K(C^{\cdot})^{\cdot}) \in \mathscr{N}_g$ où ι est l'identité de $K(C^{\cdot})$. Désignons $\widehat{r} = \widehat{r}(K(C^{\cdot})^{\perp})$. Soit $\overline{r} = (K(C^{\cdot})^{\perp} / \widehat{r}, \widetilde{r}, K(C^{\cdot})^{\perp})$ le $p_{\mathscr{N}_g}$-épimorphisme canonique. Posons $\underline{\varphi(C^{\cdot})} = \widetilde{r}\, \iota\, \underline{\zeta}$. On montre que

$$\varphi(C^{\cdot}) = (K(C^{\cdot})^{\perp} / \widehat{r}, \underline{\varphi(C^{\cdot})}, C^{\cdot}) \in \mathscr{N}_g.$$

Définition. *Si l'homomorphisme $\varphi(C^{\cdot})$ est injectif, on dira que $C^{\cdot}$ est une base régulière de précatégorie.*

Nous désignons par $\mathscr{F}'_p$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_g$ formée par les homomorphismes entre bases régulières de précatégories et par $p_{\mathscr{F}'_p}$ le foncteur canonique de $\mathscr{F}'_p$ vers $\mathscr{M}$.

Une base de précatégorie peut ne pas être une base régulière de précatégorie comme le montre exemple suivant: Soit $C^{\cdot}$ la base de précatégorie ayant 6 sommets distincts e_{τ}, $\tau \leq 6$ et 9 autres homomorphismes f_j, $j \leq 9$ tels que l'on ait:

$$f_1 \in e_2 . C^{\cdot} . e_1,\ f_2 \in e_3 . C^{\cdot} . e_2,\ f_3 \in e_4 . C^{\cdot} . e_3,\ f_4 \in e_3 . C^{\cdot} . e_1,\ f_5 \in e_4 . C^{\cdot} . e_2,$$
$$f_6 \in e_5 . C^{\cdot} . e_1,\ f_7 \in e_3 . C^{\cdot} . e_5,\ f_8 \in e_6 . C^{\cdot} . e_2,\ f_9 \in e_4 . C^{\cdot} . e_6.$$

Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droit et à gauche étant:

$$f_2 . f_1 = f_4,\ f_3 . f_2 = f_5,\ f_7 . f_6 = f_4,\ f_3 . f_7 = e_5,\ f_9 . f_8 = f_5,\ f_8 . f_1 = e_6.$$

Désignons $\varphi(C^{\cdot})(f_j) = \widetilde{f}_j$. On obtient $\widetilde{f}_6 \sim \widetilde{f}_9 \pmod{r_{\varphi(C^{\cdot})}}$. Ceci montre que l'homomorphisme $\varphi(C^{\cdot})$ n'est pas injectif et que $C^{\cdot}$ n'est pas une base régulière de précatégorie.

Soit $C^{\cdot}$ une précatégorie. Dans ce cas, $K(C^{\cdot})^{\perp}$ est une précatégorie et l'homorphisme $\varphi(C^{\cdot})$ est injectif. Il en résulte que $\mathscr{N}_p$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}'_p$. Si de plus $C^{\cdot}$ est une catégorie, on montre que $K(C^{\cdot})^{\perp} = K(C^{\cdot})^{\cdot}$. On a donc: Tout catégorie $C^{\cdot}$ est une précatégorie quotient d'une précatégorie libre, à savoir la précatégorie, libre $L_{\mathscr{N}_p}[C^{\cdot}]^{\cdot}$.

On appelle précatégorie non-associative une classe polaire $C^{\cdot}=(C, k, \beta, \alpha)$ dans laquelle sont vérifiées les axiomes (P. 1) et (P. 2). Nous désignons par $\mathcal{N}'_p$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$ formée par les homomorphismes entre précatégories non-associatives et par $p_{\mathcal{N}'_p}$ le foncteur canonique de $\mathcal{N}'_p$ vers $\mathcal{M}$.

Supposons $C^{\cdot}\in(\mathcal{N}'_p)_0$. Soit $\widehat{r}(C^{\cdot})$ la relation définie au-dessus. Désignons $\widehat{r}=\widehat{r}(C^{\cdot})$.

Proposition 1. *Si la classe polaire quotient $C^{\cdot}/\widehat{r}$ est une précatégorie, $C^{\cdot}/\widehat{r}$ est une $(\mathcal{N}_p, \mathcal{N}'_p)$-projection de $C^{\cdot}$.*

Démonstration: Soit j le $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme canonique de C vers $C^{\cdot}/\widehat{r}$. Supposons $\psi=(\widehat{C}^{\cdot}, \psi, C^{\cdot})\in\mathcal{N}'_p$ et $\widehat{C}^{\cdot}=(\widehat{C}, \widehat{k}, \widehat{\beta}, \widehat{\alpha})\in\mathcal{N}_p)_0$. La relation $(h.(g.f), (h.g).f)\in A$ entraîne $\psi(h.(g.f))=\psi(h).\psi(g.f)=\psi(h).\psi(g).\psi(f)=(\psi(h).\psi(g)).\psi(f)=\psi(h.g).\psi(f)$ $=\psi((h.g).f)$. Il en résulte que l'application $\underline{\psi}$ est compatible avec r, c'est-à-dire il existe une surjection $\underline{\psi}'$ telle que $\underline{\psi}'j=\underline{\psi}$. Puisque j est un $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme, on ait $\underline{\psi}'=(\widehat{C}^{\cdot}, \psi', C^{\cdot}/\widehat{r})\in\mathcal{N}'_p$. De plus, par hypothèse, $C^{\cdot}$ est une précatégorie. Donc j est un $(\mathcal{N}_p, \mathcal{N}'_p)$-projecteur

Remarquons que la classe polaire quotient $C^{\cdot}/\widehat{r}$ peut ne pas être une précatégorie.

Théorème 2. *$\mathcal{F}'_p$ est une catégorie à $\mathcal{N}_p$-projections et il existe un foncteur $(\mathcal{N}_p, \mathcal{F}'_p)$-projection naturalisé $(N_{\mathcal{N}_p}, \nu_{\mathcal{N}_p})$ tel que $N_{\mathcal{N}_p}(C^{\cdot})$ soit la classe polaire quotient de $K(C^{\cdot})^{\perp}$ par $\widehat{r}$ pour tout $C^{\cdot}\in(\mathcal{F}'_p)_0$.*

Démonstration: Nous utilisons les notations précédentes. Désignons $\nu_{\mathcal{N}_p}(C^{\cdot})$ $=\varphi(C^{\cdot})$. Montrons que $\nu_{\mathcal{N}_p}(C^{\cdot})$ est un $(\mathcal{N}_p, \mathcal{F}'_p)$-projecteur. Puisque l'homomorphisme $\nu_{\mathcal{N}_p}(C^{\cdot})$ est injectif, $K(C^{\cdot})^{\perp}/\widehat{r}$ est une précatégorie. Supposons $\psi=(\widehat{C}^{\cdot}, \psi, C^{\cdot}\in\mathcal{F}'_p$ et $\widehat{C}^{\cdot}=(\widehat{C}, \widehat{K}, \widehat{\beta}, \widehat{\alpha})\in(\mathcal{N}_p)_0$. D'après le théorème 1 il existe un et un seul $L(\psi)=(\widehat{C}^{\cdot}, L(\psi), L_{\mathcal{N}_p}[C^{\cdot}]^{\cdot})\in\mathcal{N}_p$ tel que $L(\psi)j=\psi'$. La relation $\overline{((g, f), g.f)}\in B$ entraîne $\overline{L}(\psi)\ ((g, \overline{f}))$ $=\psi(g).\psi(f)=\psi(g.f)=L(\underline{\psi})\ (g.f)$. On en déduit qu'il existe une surjection $\underline{v}$ telle que $\underline{v}\,r_p=L(\underline{\psi})$. Puisque $\underline{r_p}$ est un $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme, on ait $v=(\widehat{C}^{\cdot}, \underline{v}, K(C^{\cdot})^{\cdot})\in\mathcal{N}_g$. De plus, on montre que $\overline{v}=(\widehat{C}^{\cdot}, v, K(C^{\cdot})^{\perp}\in\mathcal{N}_g$. Désignons $\eta=\bar{\iota}\zeta$. Il en résulte qu'il existe un et un seul $\overline{v}\in\mathcal{N}_g$ tel que $\overline{v}.\eta=\psi$. On a $K(C^{\cdot})^{\perp}\in(\mathcal{N}'_p)_0$ et, puisque $K(C^{\cdot})^{\perp}/r$ est une précatégorie, d'après la proposition 1, $\overline{r}$ est un $(\mathcal{N}_p, \mathcal{N}'_p)$-projecteur. On en déduit qu'il existe un et un seul ψ' tel que $\psi'.\nu_{\mathcal{N}_p}(C^{\cdot})=\psi$. Ceci montre que $\nu_{\mathcal{N}_p}(C^{\cdot})$ est un $(\mathcal{N}_p, \mathcal{F}'_p)$-projecteur et, d'après la proposition 25, chap. III, [6], il existe un foncteur $(\mathcal{N}_p, \mathcal{F}'_p)$-projection naturalisé $(N_{\mathcal{N}_p}, \nu_{\mathcal{N}_p})$ tel que $N_{\mathcal{N}_p}(C^{\cdot})$ soit la classe polaire quotient de $K(C^{\cdot})^{\perp}$ par $\widehat{r}$.

Soit $\mathcal{F}_p$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$ ayant pour unités les bases de précatégories. Soit j un $(\mathcal{N}_p, \mathcal{F}_p)$-projecteur de source $C^{\cdot}$. Pour que $C^{\cdot}$ soit une base de précatégorie régulière, il faut et il suffit que j soit injectif.

Soit $(N_{\mathcal{N}_p}, \nu_{\mathcal{N}_p})$ le foncteur $(\mathcal{N}_p, \mathcal{F}'_p)$-projection naturalisé construit dans le théorème 2.

Théorème 3. *Soient $C^{\cdot}$ une précatégorie et r une relation d'équivalence sur C. Pour qu'il existe une précatégorie quotient $\overline{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ par r, il faut et il suffit que r*

soit bicompatible sur $C^\cdot$, que $C^\cdot/r$ soit une base de précatégorie régulière et que l'homomorphisme $\nu_{\mathcal{N}_p}(C^\cdot/r)$ soit surjectif. Dans ce cas, $\overline{C}^\cdot$ est isomorphe à $N_{\mathcal{N}_p}(C^\cdot/r)$.

Démonstration Soit $C^\cdot$ une précatégorie et soit r une relation d'équivalence sur C. Supposons qu'il existe une précatégorie quotient $\overline{C}^\cdot$ de $C^\cdot$ par r. Soit $\overline{r}$ le $p_{\mathcal{N}_p}$-épimorphisme canonique de $C^\cdot$ vers $\overline{C}^\cdot$. Puisque $\overline{r} \in \mathcal{N}_g$, la relation r est bicompatible sur $C^\cdot$. La précatégorie $C^\cdot$ verifie l'axiome (P. 2), par consequent la classe polaire C/r aussi verifie l'axiome (P. 2). De plus, puisque $\overline{C}^\cdot$ verifie l'axiome (P. 3), la relation $C^\cdot/r * C^\cdot/r \subset \overline{C}^\cdot * \overline{C}^\cdot$ entraîne que $C^\cdot/r$ verifie l'axiome (P. 3). Il en résulte que $C^\cdot/r$ est une base de précatégorie. On montre que $\overline{\iota} = (\overline{C}^\cdot, \iota, C^\cdot/r)$ est un $(\mathcal{N}_p, \mathcal{F}_p)$-projecteur. Il en résulte que $C^\cdot/r$ est une base régulière de précatégorie et que $\nu_{\mathcal{N}_p}(C^\cdot/r)$ est surjectif. Le reste du théorème est évident.

Soit $J_{\mathcal{N}_g}$ la sous-classe de $\mathcal{N}_g$ formée par les homomorphismes $F = (\widehat{C}^\cdot, F, C)$ tels que $F(C) \subset \widehat{C}_0^\cdot$. Désignons $J_{\mathcal{N}_p} = \mathcal{N}_p \cap J_{\mathcal{N}_g}$. On montre que $J_{\mathcal{N}_g}$ (resp. que $J_{\mathcal{N}_p}$) est un idéal de $\mathcal{N}_g$ (resp. de $\mathcal{N}_p$). Soit $\mathcal{U}$ une des catégories $\mathcal{N}_g$, $\mathcal{N}_p$. Soit $H^\cdot \in \mathcal{U}_0$ et soit $G^\cdot$ une $p_{\mathcal{U}}$-sous-structure de $H^\cdot$.

Une $(p_{\mathcal{U}}, J_{\mathcal{U}})$-structure quotient de $H^\cdot$ par $G^\cdot$ sera appelée classe polaire (resp. précatégorie) quotient de H par $G^\cdot$ si $\mathcal{U} = \mathcal{N}_g$ (resp. si $\mathcal{U} = \mathcal{N}_p$).

Soient $H^\cdot$ une classe polaire et $G^\cdot$ une sous-classe polaire de $H^\cdot$. Soit r_G la relation (H, A_G, H) où A_G est la classe des couples $(g, \alpha(g))$ tels que $g \in G$ ([7]).

Théorème 4. *Il existe toujours une classe polaire quotient $H^\cdot/G^\cdot$ de $H^\cdot$ par $G^\cdot$, à savoir la classe polaire quotient $H^\cdot/\widehat{r}_G$ de $H^\cdot$ par $\widehat{r}_G$ où $\widehat{r}_G$ est la relation d'équivalence bicompatible sur $H^\cdot$ engendrée par r_G.*

Démonstration. Soit $\overline{r}_G = (H^\cdot/\widehat{r}_G, \widetilde{r}_G, H^\cdot)$ le $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme canonique. Supposons $\varphi = (\widehat{H}^\cdot, \varphi, H) \in \mathcal{N}_g$ et $\varphi(H) \subset \widehat{H}_0^\cdot$. La relation $(g, \alpha(g) \in A$ entraîne $\varphi(g) = \varphi(\alpha(g))$ d'où $r_G \subset r_\varphi$ or on a $\widehat{r}_G \subset r_\varphi$; r_φ est la relation d'équivalence sur H associée à φ. Il en résulte qu'il existe une surjection $\underline{\psi}$ telle que $\underline{\psi}\, \widetilde{r}_G = \underline{\varphi}$. Puisque $\overline{r}_G$ est un $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme, on a $\psi = (\widehat{H}^\cdot, \psi, H^\cdot) \in \mathcal{N}_g$. Ceci montre que $H^\cdot/\widehat{r}_G$ est une classe polaire quotient de $H^\cdot$ par $G^\cdot$.

Soient $H^\cdot$ une précatégorie et $G^\cdot$ une sous-précatégorie de $H^\cdot$. Soit $\widehat{r}_G$ la relation construite au-dessus.

Théorème 5 *Pour qu'il existe une précatégorie quotient $H^\cdot/G^\cdot$ de $H^\cdot$ par G. il suffit qu'il existe une précatégorie quotient $\overline{H}^\cdot$ de $H^\cdot$ par $\widehat{r}_G$. Dans ce cas, $H^\cdot/G$. est identique à $\overline{H}^\cdot$.*

Remarquons que l'existence d'une précatégorie quotient $H^\cdot/G^\cdot$ de $H^\cdot$ par G. n'entraîne pas l'existence d'une précatégorie quotient $\overline{H}^\cdot$ de $H^\cdot$ par $\widehat{r}_G$.

3. Classes polaires quotient. Soit $\mathcal{N}''$ (resp. $\mathcal{N}'$, $\mathcal{F}^\#$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$, $\mathcal{F}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$ formée par les homomorphismes entre quasi-graphes multiplicatifs (resp. entre graphes multiplicatifs, quasi-catégories non-associatives, quasi-catégories, catégories non-associatives, catégories).

Soit $\mathcal{U}$ une des catégories $\mathcal{F}^\#$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$, $\mathcal{F}$. Désigonons par $q_{\mathcal{U}}$ le foncteur de $\mathcal{U}$ vers $\mathcal{G}$ associant $[C^\cdot] \in \mathcal{G}_0$ à $C^\cdot \in \mathcal{U}_0$ et par $L_{\mathcal{U}}[C]$ la $q_{\mathcal{U}}$-structure libre des chemins de

$C]$ Supposons $C^{\cdot} \in \mathscr{N}''_0$. Soit $r'_{\mathscr{U}}(C^{\cdot})$ la relation $(L_{\mathscr{U}}[C^{\cdot}], B, L_{\mathscr{U}}[C^{\cdot}])$ définie dans le n⁰ 4. [9], si $n=2$. Soit $\mathscr{V}$ une des catégories $\mathscr{F}''$, $\mathscr{F}$. Soit $r''_{\mathscr{V}}(C^{\cdot})$ la relation $(L_{\mathscr{V}}[C^{\cdot}], A, L_{\mathscr{V}}[C^{\cdot}])$ où A est la classe des couples $(f, \beta(f).f)$ et des couples $(f, f.\alpha(f))$. Posons

$$r_{\mathscr{F}^{\#}}(C^{\cdot}) = r'_{\mathscr{F}^{\#}}(C^{\cdot}),\ r_{\mathscr{F}'}(C^{\cdot}) = r'_{\mathscr{F}'}(C^{\cdot}),$$

$$r_{\mathscr{F}''}(C^{\cdot}) = r'_{\mathscr{F}''}(C^{\cdot}) \cup r''_{\mathscr{F}''}(C^{\cdot}),\ r_{\mathscr{F}}(C^{\cdot}) = r'_{\mathscr{F}}(C^{\cdot}) \cup r''_{\mathscr{F}}(C^{\cdot}).$$

Théorème 6. *$C^{\cdot}$ admet pour $(\mathscr{U}, \mathscr{N}'')$-projection la $p_{\mathscr{U}}$-structure quotient de $L_{\mathscr{U}}[C^{\cdot}]$ par $\widehat{r}_{\mathscr{U}}(C^{\cdot})$ où $\widehat{r}_{\mathscr{U}}(C^{\cdot})$ est la relation d'équivalence bicompatible sur $L_{\mathscr{U}}[C^{\cdot}]$ engendrée par $r_{\mathscr{U}}[C^{\cdot}]$.*

Supposons $C^{\cdot} = (C, k, \beta, \alpha) \in (\mathscr{N}_g)_0$. Soit $r_{\mathscr{N}''}$ la relation (C, A, C) où A est la classe des couples (e', e) dans laquelle est vérifiée la condition: il existe un élément $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ tel que $\alpha(g) = e'$ et $\beta(f) = e$ ou $\alpha(g.f) = e'$ et $\alpha(f) = e$ ou $\beta(g.f) = e'$ et $\beta(g) = e$. Soit $\widehat{r}_{\mathscr{N}''}$ la relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par la relation $r_{\mathscr{N}''}$.

Théorème 7. *$\mathscr{N}_g$ est une catégorie à $\mathscr{U}$-projections et il existe un foncteur $(\mathscr{U}, \mathscr{N}_g)$-projection naturalisé $(N_{\mathscr{U}}, \nu_{\mathscr{U}})$ tel que $N_{\mathscr{U}}(C^{\cdot})$ soit la $p_{\mathscr{U}}$-structure quotient de $L_{\mathscr{U}}[C^{\cdot} / \widehat{r}_{\mathscr{N}''}]$ par $\widehat{r}_{\mathscr{U}}(C^{\cdot} / \widehat{r}_{\mathscr{N}''})$ pour tout $C^{\cdot} \in (\mathscr{N}_g)_0$.*

Ce théorème résulte de la proposition 25, chap. III, [6], du théorème 6 et du théorème 7, chap. III, [6].

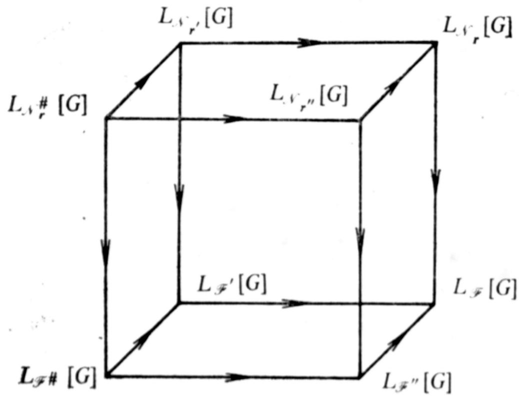

Fig. 1

Si $(N_{\mathscr{F}}, \nu_{\mathscr{F}})$ est un foncteur $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_g)$-projection naturalisé, pour simplifier l'écriture, parfois nous désignons (N, ν) au lieu de $(N_{\mathscr{F}}, \nu_{\mathscr{F}})$. Soit $C^{\cdot}$ une précatégorie.

Définition. *On dira que $\nu(C^{\cdot})$ est un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur strict, si $N(C^{\cdot})$ est une classe polaire quotient de $C^{\cdot}$.*

E x e m p l e s: 1° Si $C^{\cdot}$ est une catégorie, $\nu(L_{\mathscr{N}_p}[C^{\cdot}]^{\cdot})$ est un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur strict.

2° Soit $\overline{\mathscr{R}}_2$ la précatégorie des relations construite dans le théorème 4, [2, 5]. Alors $\nu(\overline{\mathscr{R}}_2)$ est un $(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{N}}_p)$-projecteur strict.

3° Soit $\mathscr{N}_r$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_p$ ayant pour unités les précatégories verifiées la condition: Les relations $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, $(h, g) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, $f \in C \setminus [C]_0$, $g \in C \setminus [C]_0$ et $h \in C \setminus [C]_0$ entraînent $(h, g . f) \in C^{\cdot} * C$ et $(h . g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$. Soit $q_{\mathscr{N}_r}$ le foncteur de $\mathscr{N}_r$ vers $\mathscr{G}$ associant $[C^{\cdot}] \in \mathscr{G}_0$ à $C^{\cdot} \in (\mathscr{N}_r)_0$. Alors le foncteur $q_{\mathscr{N}_r}$ admet un adjoint à gauche $L_{\mathscr{N}_r}$ tel que $\nu(L_{\mathscr{N}_r}[C^{\cdot}])$ soit un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur strict pour tout $C^{\cdot} \in (\mathscr{N}_r)^{\cdot}$

R e m a r q u e. Supposons que $\nu(C^{\cdot})$ soit un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur et que $N(C^{\cdot})$ soit une précatégorie quotient de $C^{\cdot}$. Dans ce cas $\nu(C^{\cdot})$ peut ne pas être un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur strict, comme le montre l'exemple suivant: Soit $C^{\cdot}$ la précatégorie ayant 12 sommets distincts e_i et $\overline{e}_i$, $i \leqq 6$ et 6 autres homomorphismes f_j, $f_j \in \overline{e}_j . C^{\cdot} . e_j$, $j \leqq 6$. Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droit et à gauche étant:

$$f_2 . f_1 = f_4,\ f_3 . f_2 = f_5 \text{ et } f_3 . f_4 = f_6.$$

Alors $N(C^{\cdot})$ est une précatégorie quotient de $C^{\cdot}$, mais $\nu(C)$ n'est pas un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur strict.

Supposons $C^{\cdot} \in (\mathscr{N}_p)_0$. Soit $\widehat{r}_{\mathscr{N}''}$ la relation définie au-dessus. Soit $j = (C^{\cdot} / \widehat{r}_{\mathscr{N}''}, \widetilde{r}_{\mathscr{N}''}, C^{\cdot})$ le $p_{\mathscr{N}_g}$-épimorphisme canonique.

P r o p o s i t i o n 2. *Si* $j \in \mathscr{N}_p$, *alors* j *est un* $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-*projecteur strict.*

D é m o n s t r a t i o n. $C^{\cdot} / \widehat{r}_{\mathscr{N}''}$ est un quasi-graphe multiplicatif et, par hypothèse $C^{\cdot} / \widehat{r}_{\mathscr{N}''}$ est une précatégorie; il en résulte que $C^{\cdot} / \widehat{r}_{\mathscr{N}''}$ est une catégorie. De plus, j est un $(\mathscr{N}'', \mathscr{N}_g)$-projecteur et puisique $\beta(j)$ est une catégorie, j est un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur. Ceci montre que j est un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur strict, puisque j est un $p_{\mathscr{N}_g}$-épimorphisme.

Soit $\mathscr{N}_s$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_p$ ayant pour unités les précatégories $C^{\cdot}$ telles que $\nu(C^{\cdot})$ soit un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur strict. Soit $q_{\mathscr{N}_s}$ le foncteur canonique de $\mathscr{N}_s$ vers $\mathscr{G}$. Remarquons que $\mathscr{N}_s$ n'est pas une catégorie à $q_{\mathscr{N}_s}$-structures libres, comme le montre l'exemple suivant: Soit $C^{\cdot}$ la précatégorie ayant 8 unités distinctes e_i, $i \leqq 8$ et 5 autres homomorphismes f_j, $j \leqq 5$ tels que l'on ait: $f_1 \in e_2 . C^{\cdot} . e_1$, $f_2 \in e_3 . C^{\cdot} . e_2$, $f_3 \in e_4 . C^{\cdot} . e_3$, $f_4 \in e_6 . C^{\cdot} . e_5$, $f_5 \in e_8 . C^{\cdot} . e_7$. Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droit et à gauche étant:

$$f_2 . f_1 = f_4,\ f_3 . f_2 = f_5,\ e_2 . e_1 = f_1,\ e_3 . e_1 = f_2,\ e_4 . e_1 = f_3.$$

Soit $[G]$ le sous-graphe orienté de $[C^{\cdot}]$ définit par la sous-classe $\{f_1, f_2, f_3\}$. On ait $C^{\cdot} \in (\mathscr{N}_s)_0$ et $j'' = ([C^{\cdot}], \iota, [G]) \in \mathscr{G}$. Supposons qu'il existe une $q_{\mathscr{N}_s}$-structure libre $L_{\mathscr{N}_s}[G]$. La relation $L_{\mathscr{N}_r}[G] \in (\mathscr{N}_s)_0$ entraîne que $L_{\mathscr{N}_r}[G]$ est une sous-classe polaire de $L_{\mathscr{N}_s}[G]$. Désignons $j' = ([L_{\mathscr{N}_s}[G]], \iota, [G])$. Il en résulte qu'il n'existe pas un homomorphisme ψ de $L_{\mathscr{N}_s}[G]$ vers $C^{\cdot}$ tel que $\psi . j' = j''$. Donc $\mathscr{N}_s$ n'est pas une catégorie à $q_{\mathscr{N}_s}$-structures libres.

On appelle quasi-précatégorie non-associative une classe polaire $C^{\cdot}$ dans laquelle est vérifiée l'axiome (P. 1) Désignons:

(P. 4) Les relations $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $(g, h) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ entraînent $(h, g.f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $(h . g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$.

(P. 4′) Les relations $f \in C \setminus [C]_0$, $g \in C \setminus [C]_0$, $h \in C \setminus [C]_0$, $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $(h, g) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ entraînent $(h, g.f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $h . g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$.

On appelle quasi-précatégorie non-associative (resp. quasi-précatégorie, précatégorie non-associative, précatégorie) régulière une quasi-précatégorie non-associative $C^{\cdot} = (C, k, \beta, \alpha)$ dans laquelle est verifié l'axiome (P. 4) (resp. (P. 3) et (P. 4); (P. 2) et (P. 4′); (P. 2), (P. 3) et (P. 4′)). Nous désignons par $\mathcal{N}_r^{\#}$ (resp. par. $\mathcal{N}'_r$, $\mathcal{N}''_r$, $\mathcal{N}_r$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$ formée par les homomorphismes entre quasi-précatégories non-associatives (resp. entre quasi-précatégories, précatégories non-associatives, précatégories) régulières. Soit $\mathcal{U}$ une de ses catégories et soit $q_{\mathcal{U}}$ le foncteur canonique de $\mathcal{U}$ vers $\mathcal{G}$.

Proposition 3. *Le foncteur $q_{\mathcal{U}}$ admet un adjoint à gauche $L_{\mathcal{U}}$.*

A tout graphe orienté $[G]$ est associé canoniquemment un cube commutatif (Fig. 1) ayant pour sommets les $q_{\mathcal{V}}$-structures libres $\mathcal{V} = \mathcal{N}_r^{\#}$, $\mathcal{N}'_r$, $\mathcal{N}''_r$, $\mathcal{N}_r$, $\mathcal{F}^{\#}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$, $\mathcal{F}$ et tel que pour tout flèche f de ce cube $\beta(f)$ est une classe polaire quotient de $\alpha(f)$.

Soit $\mathcal{U}$ une des catégories $\mathcal{F}^{\#}$, $\mathcal{F}'$ $\mathcal{F}''$. Soit $(\mathcal{N}_{\mathcal{F}'}, \nu_{\mathcal{F}'})$ un foncteur $(\mathcal{F}', \mathcal{N}'')$-projection naturalisé. Soient $C^{\cdot}$ une quasi-catégorie non-associative et r une relation d'équivalence sur $C^{\cdot}$.

Théorème 8. *Pour qu'il existe une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot} \in \mathcal{U}_0$ par r, il faut et il suffit que r soit une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ et que $p_{\mathcal{N}_g}(\nu_{\mathcal{U}}(C^{\cdot}/r))$ soit une bijection (resp. que r soit une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ et que $C^{\cdot}/r \in \mathcal{U}_0$) si $\mathcal{U} = \mathcal{F}'$ (resp. si $\mathcal{U} = \mathcal{F}''$, $\mathcal{F}^{\#}$).*

Démonstration. Supposons $\mathcal{U} = \mathcal{F}^{\#}$. Soient $C^{\cdot} \in \mathcal{F}_0^{\#}$ et r une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$. Alors le quotient $C^{\cdot}/r$ est un quasi-graphe multiplicatif. Soit $(N_{\mathcal{F}^{\#}}, \nu_{\mathcal{F}^{\#}})$ un foncteur $(\mathcal{F}^{\#}, \mathcal{N}'')$-projection naturalisé. D'une manière analogue comme dans la démonstration du théorème 11, chap. III, [6], on montre qu'il existe une $p_{\mathcal{F}^{\#}}$-structure quotient $\bar{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ par r si, et seulement si, r est une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ et si $p_{\mathcal{N}_g}(\nu_{\mathcal{F}^{\#}}(C^{\cdot}/r))$ est une bijection. Supposons $H^{\cdot} \in \mathcal{N}''_0$. Dans ce cas, l'homomorphisme $\nu_{\mathcal{F}^{\#}}(H^{\cdot})$ est injectif et $\nu_{\mathcal{F}^{\#}}(H^{\cdot})$ est surjectif si, et seulement si, $H^{\cdot}$ est une quasi-catégorie non-associative. Il en résulte qu'il existe une $p_{\mathcal{F}^{\#}}$-structure quotient $\bar{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ par r si, et seulement si, r est une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ et si $C^{\cdot}/r \in \mathcal{F}_0^{\#}$. Dans ce cas, $\bar{C}^{\cdot}$ est identique à $C^{\cdot}/r$. Le reste de la démonstration est évident.

Remarque. Si $C^{\cdot}$ est une catégorie et si r est une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$, $C^{\cdot}/r$ ne vérifie pas les axiomes (G. 3) et (G. 4) (conformement déf. 11, chap. I, [6]) dans un cas général. Par exemple: Soit $C^{\cdot}$ la catégorie ayant 16 unités distinctes e_i, $i \leq 16$ et 14 flèches f_j, $j \leq 9$ et f'_j, $t \leq 5$ telles que l'on ait (Fig. 2)

$$f_1 \in e_2 . C^{\cdot} . e_1,\ f_2 \in e_3 . C^{\cdot} . e_2,\ f_3 \in e_6 . C^{\cdot} ._5,\ f_4 \in e_3 . C^{\cdot}\ e_1,$$

$$f_5 \in e_{12} . C^{\cdot} . e_{10},\ f_6 \in e_6 . C^{\cdot} . e_4,\ f_7 \in e_9 . C^{\cdot} . e_7,\ f_8 \in e_{14} . C^{\cdot} . e_{13},$$

$$f_9 \in e_{16} . C^{\cdot} . e_{15},\ f_1' . \in e_8 . C^{\cdot} . e_7,\ f_2' \in e_{11} . C^{\cdot} . e_{10},\ f_3' \in {}_{12} . C^{\cdot} . e_{11},$$
$$f_4' \in e_5 . C^{\cdot} . e_4,\ f_5' . \in e_9 . C^{\cdot} . e_8 .$$

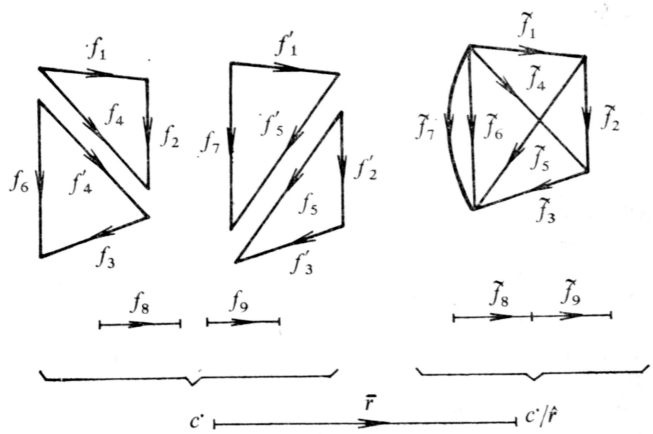

Fig. 2

Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droit et à gauche étant:

$$f_2 . f_1 = f_4,\ f_3 . f_4' = f_6,\ f_5' . f_1' = f_7,\ f_3' . f_2' = f_5 .$$

Soit r la relation (C, A, C) où A est la classe des couples (f_j', f_j), $j \leqq 5$ et (e_{15}, e_{14}). Soit $\widehat{r}$ la relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par la relation r. Alors, le quotient $C^{\cdot} / \widehat{r}$ ne vérifie pas les axiomes (G. 3) et (G. 4). En effet, soit $\bar{r}$ le $p_{\mathscr{N}_g}$-épimorphisme canonique de $C^{\cdot}$ vers $C^{\cdot} / \widehat{r} = (C / \widehat{r}, \tilde{k}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$. Désignons $\bar{r}(f_j) = \tilde{f}_j$. L'axiome (G. 3): On a $\tilde{f}_3 . (\tilde{f}_2 . \tilde{f}_1) \neq (\tilde{f}_3 . \tilde{f}_2) . \tilde{f}_1$. L'axiome (G. 4): On ait $\tilde{\alpha}(\tilde{f}_9) = \tilde{\beta}(\tilde{f}_8)$ et $(\tilde{f}_9, \tilde{f}_8) \notin C^{\cdot} / \widehat{r} * C^{\cdot} / \widehat{r}$. Cet exemple montre aussi que si $C^{\cdot}$ est une quasi-catégorie (resp. une catégorie non-associative, une quasi-catégorie non-associative) et si r est une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ le quotient $C^{\cdot}/r$ ne vérifie pas les axiomes (G. 3) et (G. 4) (resp. l'axiome (G. 4)) dans un cas général.

Soit $J_{\mathscr{F}^{\#}}$ la sous-classe de $\mathscr{F}^{\#}$ formée par les homomorphismes $F = (\widehat{C}^{\cdot}, \underline{F}, C^{\cdot})$ tels que $\underline{F}(C) \subset \widehat{C}_0^{\cdot}$. On montre que $J_{\mathscr{F}^{\#}}$ est un idéal de $\mathscr{F}^{\#}$. Soient $H^{\cdot}$ une quasi-catégorie non-associative et $G^{\cdot}$ une sous-quasi-catégorie non-associative de $H^{\cdot}$. Soit $\widehat{r_G}$ la relation construite dans le théorème 4.

Une $(p_{\mathscr{F}^{\#}}, J_{\mathscr{F}^{\#}})$-structure quotient de $H^{\cdot}$ par $G^{\cdot}$ sera appellée quasi-catégorie non-associative quotient de $H^{\cdot}$ par $G^{\cdot}$.

Théorème 9. *Pour qu'il existe une quasi-catégorie non-associative quotient $H^{\cdot} / G^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ par $G^{\cdot}$, il faut et il suffit qu'il existe une quasi-catégorie non-associative quotient $H^{\cdot} / \widehat{r_G}$ de $H^{\cdot}$ par $\widehat{r_G}$. Dans ce cas, $H^{\cdot} / G^{\cdot}$ est identique à $H^{\cdot} / \widehat{r_G}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\overline{r}_G=(H^\cdot/\widehat{r}_G, \widehat{r}_G, H^\cdot)$ le $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme canonique. Supposons $\varphi=(\widehat{H}^\cdot, \underline{\varphi}, H^\cdot)$ et $\varphi(H)\subset\widehat{H}^\cdot_0$. La relation $\varphi\in\mathcal{N}_g$ entraîne $r_G\subset r_\varphi$ d'où $\widehat{r}_G\subset r_\varphi$. Il en résulte qu'il existe une surjection $\underline{\psi}$ telle que $\underline{\psi}\,\widetilde{r}=\underline{\varphi}$ et, puisque $\overline{r}_G$ est un $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme, on obtient $\psi=(\widehat{H}^\cdot, \underline{\psi}, H^\cdot/\widehat{r}_G)\in\mathcal{N}_g$. D'après la proposition du n° 1, [9], la classe polaire quotiont $H^\cdot/\widehat{r}_G$ est un quasi-graphe multiplicatif. D'une manière analogue comme dans la démonstration du théorème 15, chap. III, [6], on montre qu'il existe une quasi-catégorie non-associative quotient $H^\cdot/G^\cdot$ de $H^\cdot$ par $G^\cdot$ si, et seulement si, l'homomorphisme $\nu_{\mathcal{F}^\#}(H^\cdot/\widehat{r}_G)$ est surjectif. L'homomorphisme $\nu_{\mathcal{F}^\#}(H^\cdot/\widehat{r}_G)$ est toujours injectif; il en résulte, d'après le théorème 8, qu'il existe une quasi-catégorie non-associative quotient $H^\cdot/G^\cdot$ de H par $G^\cdot$ si, et seulement si, $H^\cdot/\widehat{r}_G\in\mathcal{F}_0^\#$. Dans ce cas, $H^\cdot/G^\cdot$ est identique à $H^\cdot/\widehat{r}_G$.

Soit (N, ν) un foncteur $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$-projection naturalisé. Rappellons ([8]) qu'une base de catégorie est un graphe multiplicatif $C^\cdot$ tel que l'homomorphisme $\nu(C^\cdot)$ soit injectif.

Nous désignons par $\mathcal{N}^\#$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}'$ ayant pour unités les bases de catégories.

Remarquons qu'un graphe multiplicatif vérifiant l'axiome d'associativité (l'axiome (G. 3) conformément déf. 11 chap. I, [6]) peut ne pas être une base de catégorie dans un cas général.

Soient $C^\cdot$ une base de catégorie et r une relation d'équivalence sur C. On dira que r est admissible sur $C^\cdot$ si r est bicompatible sur $C^\cdot$ et si le graphe multiplicatif quotient $C^\cdot/r$ est une base de catégorie. Pour qu'il existe une base de catégorie quotient $\overline{C}^\cdot$ de $C^\cdot\in\mathcal{N}_0^\#$ par r, il faut et il suffit que r soit admissible sur $C^\cdot$. Dans ce cas $\overline{C}^\cdot$, est identique à $C^\cdot/r$.

Supposons $C^\cdot\in\mathcal{N}'_0$ Soit r la relation (C, A, C) où A est la classe des couples (w, w') où w et w' sont des composés finis formées par des mêmes éléments mais groupés par des parenthèses disposées differemment ([1]). Soit $\widehat{r}$ la relation d'équivalence bicompatible sur $C^\cdot$ engendrée par la relation r.

T h é o r è m e 10. *Si $C^\cdot/\widehat{r}$ est une base de catégorie, $C^\cdot/\widehat{r}$ est une $(\mathcal{N}^\#, \mathcal{N}')$-projection de $C^\cdot$.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.

R e m a r q u e. Le graphe multiplicatif quotient $C^\cdot/\widehat{r}$ peut ne pas être une base de catégorie comme le montre l'exemple suivant: Soit $C^\cdot$ le graphe multiplicatif ayant 8 unités distinctes e_i, $i\leq 8$ et 19 autres homomorphismes f_j, $j\leq 19$ tels que l'on ait (Fig. 3):

$$f_1\in e_1.C^\cdot.e_2,\quad f_2\in e_5.C^\cdot.e_1,\quad f_3\in e_6.C^\cdot.e_5,\quad f_4\in e_5.C^\cdot.e_2,$$

$$f_5\in e_6.C^\cdot.e_1,\quad f_6\in e_6.C^\cdot.e_2,\quad f_7\in e_6.C^\cdot.e_2,\quad f_8\in e_4.C^\cdot.e_3,$$

$$f_9\in e_8.C^\cdot.e_4,\quad f_{10}\in e_7.C^\cdot.e_8,\quad f_{11}\in e_8.C^\cdot.e_3,\quad f_{12}\in e_7.C^\cdot e_4,$$

$$f_{13}\in e_7.C^\cdot.e_3,\quad f_{14}\in e_7.C^\cdot.e_3,\quad f_{15}\in e_3.C^\cdot.e_2,\quad f_{16}\in e_6.C^\cdot.e_3,$$

$$f_{17}\in e_7.C^\cdot.e_6,\quad f_{18}\in e_7.C^\cdot.e_2,\quad f_{19}\in e_7.C.e_2.$$

Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droit et à gauche étant:

$$f_2.f_1=f_4,\quad f_3.f_2=f_5,\quad f_3.f_4=f_6,\quad f_5.f_1=f_7,$$

$$f_9 \cdot f_8 = f_{11}, \quad f_{10} \cdot f_9 = f_{12}, \quad f_{10} \cdot f_{11} = f_{13}, \quad f_{12} \cdot f_8 = f_{14},$$
$$f_{16} \cdot f_{15} = f_6, \quad f_{17} \cdot f_7 = f_{18}, \quad f_{17} \cdot f_{16} = f_{13}, \quad f_{14} \cdot f_{15} = f_{19}.$$

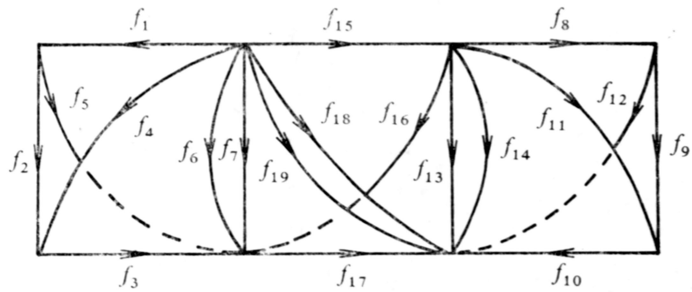

Fig. 3

Soit φ le $p_{\mathcal{N}'}$-épimorphisme de $C^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}/\widehat{r}$. Désignons $\varphi(f_j) = \tilde{f}_j$. Alors on a $\tilde{f}_{17} \cdot (\tilde{f}_{16} \cdot \tilde{f}_{15}) \neq (\tilde{f}_{17} \cdot \tilde{f}_{16}) \cdot \tilde{f}_{15}$. Ceci montre que $C^{\cdot}/\widehat{r}$ n'est pas une base de catégorie.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Dedecker, J. Mersch. Précatégories et relations d'équivalence dans les catégories. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256**, 1963, 4811—4814.
2. D. V. Dekov. Projections des classes n-polaires. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **30**, 1977, 801—804.
3. D. V. Dekov. Précatégories quotient. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **32**, 1979, 1619—1622.
4. D. V. Dekov. Classes polaires quotient. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **33**, 1980, 11—14.
5. D. V. Dekov. Sur les structures algébriques des relations. *Revue roum. math. pures et appl.*, **27**, 1982, 1, 15—24.
6. Ch. Ehresmann. Catégories et structures. Paris, 1965.
7. Ch. Ehresmann. Structures quasi-quotient. *Math. Ann.*, **171**, 1967, 293—363.
8. Ch. Ehresmann. Esquisses et types des structures algébriques. *Bul. Inst. Politehn. Iaşi*, **14**, 1968, 1—2, 1—14.
9. Ch. Ehresmann. Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires. *C. R. Acad. Sci. Paris*' **264**, 1967, **6**, 273—276.
10. S. Mac Lane. Categories for the working mathematician. Berlin, 1971.

Georgi Kolev 81
6000 Stara Zagora, Bulgaria

Received 7. 7. 1986