Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ГАЛЬТОНА—ВАТСОНА С ИММИГРАЦИЕЙ, В СЛУЧАЕ РАВНОМЕРНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

И. РАХИМОВ

В работе доказывается локальная предельная теорема для процесса Гальтона—Ватсона с убывающей иммиграцией в случае равномерного предельного распределения.

Пусть $\mu(n)$, $n=0, 1, \dots$, $\mu(0)=1$ — критический процесс Гальтона—Ватсона с производящей функцией числа потомков $f(s)$, $|s|\leqq 1$; в моменты времени $n=0, 1, \dots$ независимо от наличия какого-либо числа частиц иммигрирует случайное число $\xi_0, \xi_1, \dots$ частиц, которые в дальнейшем претерпевают превращения по процессу $\mu(n)$. Здесь последовательность независимых неотрицательных целочисленных случайных величин ξ_n. Через $Z(n)$ обозначим процесс с иммиграцией.

Локальные предельные теоремы для критических процессов без иммиграции или с однородной иммиграцией изучены довольно подробно. Так, в [1, 2] доказывались локальные теоремы для процессов без иммиграции с непрерывным и дискретным временем, используя представление локальных вероятностей через характеристическую функцию процесса при помощи „формулы обращения". В [3] предложен другой подход, основанный на представлении производящей функции в виде произведения дробно линейной производящей функции и некоторого абсолютно сходящегося степенного ряда.

В работе [4], используя методы [3], доказаны локальные теоремы для $Z(n)$ в случае однородной иммиграции. Обобщение результата на процесс Беллмана—Харриса с дискретным временем имеется в [5]. В этих работах предельными распределениями являлись показательное и гамма распределения.

Здесь рассматривается случай, когда $\alpha(n)=M\xi_n\to 0$, $n\to\infty$ и медленно меняется. Точнее, предполагая, что $\liminf n^{\alpha(n)}>1$, доказывается локальная предельная теорема, при этом предельным будет равномерное распределение. Соответствующие интегральные теоремы были получены в [6] (и в [7] для непрерывного времени). Результаты, относящиеся к случаю $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha(n)}=1$, будут опубликованы отдельно.

Пусть

$$f_n(s)=f(f_{n-1}(s)),\ f_0(s)=s,\ h_n(s)=MS^{\xi_n},\quad g_n(s)=M[s^{Z(n)}\,|\,z(0)=0],$$

$$A=f'(1),\ B=f''(1),\ \alpha(n)=h_n'(1),\ \beta(n)=h_n''(1),\ \gamma_n=2\alpha(n)/B,$$

$$Q_{ij}(n)=P\{\mu(n)=j\,|\,\mu(0)=i\},\quad Q_j(n)=Q_{1j}(n),\ P_{ij}(n)=P\{z(n)=j\,|\,z(0)=i\}.$$

Всюду в дальнейшем предположим, что процесс $\mu(n)$ критический и непериодический, т. е. $A=1$, Н. О. Д. $\{k\colon Q_k(1)>0\}=1$, $Q_1(1)\neq 1$, $\sup\limits_k \alpha(k)<\infty$, $\sup\limits_k \beta(k)<\infty$.

Дополнительно потребуем, чтобы

$$\sum_k k^2 P\{\mu(1)=k\}\ln k<\infty, \tag{1}$$

$\alpha(n)$ медленно меняется в бесконечности и

$$\liminf_{n\to\infty} n^{\alpha(n)}>1,\ \lim_{n\to\infty}\alpha(n)\left|\frac{\alpha(n\varepsilon)}{\alpha(n)}-1\right|\ln n=0 \tag{2}$$

для любого $0<\varepsilon<1$.

Будем говорить, что функция $\varphi(x, y)$ принадлежит классу $\mathscr{K}(a, b)$, если $a<\varphi(x, y)<b$, $x, y\in(0, \infty)$ и

$$a<\liminf_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\varphi(x, y)\leqq\limsup_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\varphi(x, y)<b.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда, если* $\alpha(n)\to 0$, $\beta(n)\to 0$, $j\to\infty$, $n\to\infty$ *таким образом, что* $(i/n)^{\gamma_n}\in\mathscr{K}(0, 1)$, *то при любом фиксированном* i

$$\frac{i}{\gamma_n}\left(\frac{i}{n}\right)^{-\gamma_n}P_{ij}(n)\to 1.$$

Замечание. Очевидно, что второе условие в (2) выполняется, когда $\alpha(n)\ln n=0(1)$. В общем случае, если $\alpha(n)\ln n$ представить в виде [8].

$$\alpha(n)\ln n=c(n)\exp\left\{\int_a^n\frac{\varepsilon(x)}{x}dx\right\},$$

где $\varepsilon(x)\to 0$, $c(x)\to c>0$ при $x\to\infty$, то (2) выполнено, если для любого $0<\varepsilon<1$

$$\left|\frac{c(n\varepsilon)}{c(n)}-1\right|\alpha(n)\ln n\to 0.$$

Доказательство теоремы следует из четырех лемм. Лемма 1 дает так называемое [3] „продукт представление" для процессов с убывающей иммиграцией. Лемма 2, как нам кажется, представляет и самостоятельный интерес. Известно [3], что при условиях (1) для функции Грина процесса $\mu(n)$ $G(i, j)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_{ij}(k)$, $i\geqq 0$, $j\geqq 1$, справедлива асимптотика

$$\lim_{j\to\infty}H(i, j)j=\frac{2i}{B}\cdot \tag{3}$$

Через $\mathscr{D}$ обозначим единичный круг $\mathscr{D}=[s;\ |s|\leqq 1]$. Всюду в дальнейшем $c_1, c_2, \ldots$ $M_1, M_2, \ldots$ означают различные положительные постоянные.

Для степенных рядов вида $a(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ks^k$, сходящихся абсолютно в единичном круге $\mathscr{D}$, введем l_1 норму соотношением

$$\|a(s)\|_{N_1}^{N_2}=\sum_{k=N_1}^{N_2}|a_k|,\quad \|a(s)\|=\|a(s)\|_0^{\infty}.$$

Положим также $[a(s)]_j=|a_j|$. Тогда нетрудно проверить, что

$$\sup_{s\in\mathscr{D}}|a(s)|\leqq\|a(s)\|,\quad \|ab\|\leqq\|a\|\,.\,\|b\|,$$

если $a_i^{(k)}(s)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}^{(k)}s^j$, $i=1,\ldots m$, $k=1, 2$, и имеет место соотношение $a(s)=\sum_{i=1}^{m}a_i^{(1)}(s)\times a_i^{(2)}(s)$, то

$$\sup_{N_1 \leq j \leq N_2} |a_j| \leq \sum_{i=1}^{m} \| a_i^{(1)}(s) \|_{N_1}^{N_2} \sup_{N_1 \leq j \leq N_2} |a_{ij}^{(2)}|. \tag{4}$$

Лемма 1. *Если выполнены условия (1), (2),* $\alpha(n) \to 0$, $\beta(n) \to 0$ *при* $k \to \infty$, *то найдется такое целое число* N, *что имеет место равенство*

$$g_n(s) = \widehat{g}_N(n, s) \left[\frac{1 + (N-1) \frac{B}{2} (1-S)}{1 + \frac{Bn}{2} (1-s)} \right]^{\gamma_n} \prod_{k=N}^{n} (1 + F_n(k, s)), \tag{4'}$$

где

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in \mathcal{D}} |1 - \widehat{g}_N(n, s)| = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=N}^{n} \| F_n(k, s) \| = 0.$$

Доказательство.

Выберем N таким, что

$$2 \sup_{k \geq 0} \alpha(k) \max \{1 - f_N(0), \ (1 + \frac{BN}{2})^{-1}\} \leq 2^{-1}. \tag{5}$$

Используя соотношения $g_n(s) = \prod_{k=1}^{n} h_{n-k}(f_k(s))$, $h_k(s) = 1 - \alpha(k)(1-s) + \widehat{\beta}_k(s)(1-s)^2$, где

$$\widehat{\beta}_k(s) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{l=0}^{m-1} s^l q_j(k),$$

имеем

$$g_n(s) = \widehat{g}_N(n, s) \prod_{k=N}^{n} [1 - \alpha(n-k)(1 - f_k(s)) \prod_{k=N}^{n} (1 + Q_n(k, s)), \tag{6}$$

где

$$\widehat{g}_N(n, s) = \prod_{k-n-N+1}^{n-1} h_k(f_{n-k}(s)), \quad a_n(k, s) = \frac{(1 - f_k(s))^2 \widehat{\beta}_{n-k}(f_k(s))}{1 - \alpha(n-k)(1 - f_k(s))}.$$

Очевидно, что $|1 - \widehat{g}_N(n, s)| \leq \sum_{k=n-k+1}^{n-1} \alpha(k)(1 - f_{n-k}(0))$ и сумма в правой части стремится к нулю при $n \to \infty$ и фиксированном N.

В силу выбора N, для любого $N \leq k \leq n$

$$\| (1 - \alpha(n-k)(1 - f_k(s)))^{-1} \| \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} < \infty,$$

$$\| (1 - f_k(s))^2 \widehat{\beta}_{n-k}(f_k(s)) \| \leq 2\beta(n-k)(1 - f_k(0))^2$$

и, следовательно, $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=N}^{n} \| a_n(k, s) \| = 0$.

Рассмотрим теперь соотношение

$$\prod_{k=N}^{n} [1 - \alpha(n-k)(1 - f_k(s))] = \prod_{k=N}^{n} [1 - \alpha(n-k) \frac{1-s}{1 + \frac{Bk}{2}(1-s)}] \sum_{k=N}^{n} [1 - b_n(k, s)], \tag{7}$$

где

$$b_n(k, s)=\alpha(n-k)\left[\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}-1+f_k(s)\right]\left[1-\alpha(n-k)\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}\right].$$

Учитывая выбор N убедимся в том, что

$$\left\|\left[1-\alpha(n-k)\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}\right]^{-1}\right\|\leqq\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}=2.$$

Тогда

$$\sum_{k=N}^{n}\|b_n(k, s)\|\leqq 2\sum_{k=N}^{n}\alpha(n-k)\left\|\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}-1+f_k(s)\right\|,$$

и так как при условии (1) ряд $\Sigma_{k=1}^{\infty}\|(1-s)/(1+(Bk(1-s)/2))-1+f_k(s)\|$ сходится [3], то последняя сумма стремится к нулю при $n\to\infty$. Пусть теперь $0<\varepsilon<1$ и

$$\prod_{k=N}^{n}\left[1-\alpha(n-k)\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}\right]=\prod_{k=N}^{n}\left[1-\alpha(n)\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}\right]\prod_{k=N}^{n}[1+c_n(k, s)], \tag{8}$$

где

$$c_n(k, s)=\left[\alpha(n)-\alpha(n-k)\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}\right]\left[1-\alpha(n)\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}\right]^{-1}.$$

Тогда

$$\sum_{k=N}^{n}\|c_n(k, s)\|\leqq 2\sum_{k=N}^{n}|\alpha(n)-\alpha(n-k)|.\left\|\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}\right\|$$

$$=4\sum_{k=N}^{[n(1-\varepsilon)]}|\alpha(n)-\alpha(n-k)|\frac{1}{1+\frac{Bk}{2}}+4\sum_{k=[n(1-\varepsilon)]+1}^{n}|\alpha(n)-\alpha(n-k)|\frac{1}{1+\frac{Bk}{2}}=J_1+J_2.$$

Так как

$$J_1=0(\alpha(n)\sup_{\varepsilon\leqq\theta n\leqq 1}\left|\frac{\alpha(n\theta_n)}{\alpha(n)}-1\right|(\ln n),\quad J_2\leqq c_1\,\varepsilon/(1-\varepsilon),$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=N}^{n}\|c_n(k, s)\|=0$, если выполнено условие (2).

Подобными рассуждениями убедимся в том, что для $a_n(k, s)$, определяемой из соотношения

$$\prod_{k=N}^{n}\left[1-\alpha(n)\frac{1-s}{1+\frac{Bk}{2}(1-s)}\right]=\prod_{k=N}^{n}\left[1-\frac{B2^{-1}(1-s)}{1+B2^{-1}(1-s)}\right]^{\gamma_n}\prod_{k=N}^{n}(1+d_n(k, s)) \tag{9}$$

при некотором $c_2\in(0, \infty)$, справедлива оценка

$$\sum_{k=N}^{n}\|d_n(k, s)\|\leqq c_2\gamma_n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{B}{1+B2^{-1}K}\right)^2=0(1)$$

при $n\to\infty$.

Таким образом, полагая $F_n(k,s)=(1+a_n(k,s))(1+b_n(k,s))\times(1+c_n(k,s))(1+d_n(k,s))$ и учитывая равенство

$$\prod_{k=N}^{n}\left(1-\frac{B2^{-1}(1-s)}{1+Bk2^{-1}(1-s)}\right)^{\gamma_n}=\left(\frac{1+B(N-1)2^{-1}(1-s)}{1+Bn2^{-1}(1-s)}\right)^{\gamma_n}$$

из (6), (7), (8), (9) получим утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $m\to\infty$, $i\to\infty$ так, что i/m остается ограниченным и выполнено условие (1).*

Тогда для любого целого $N_0\geqq 0$

$$\sum_{k=N_0}^{m}P\{\mu(k)=i/\mu(0)=1\}\sim\frac{2}{Bi}\left(1-\frac{2}{Bm}\right)^i.$$

Доказательство. Пусть $\limsup mi^{-1}<\infty$. Известно, что [3], если выполнено условие (1), то можно подобрать некоторое целое N, что для $S\in\mathscr{D}$ и всех $k\geqq N$ справедливо соотношение

$$f_k(s)-f_k(0)=(1-f_k(0))\frac{1+(N-1)\alpha-(N-1)\alpha s}{1+(k-1)\alpha-(k-1)\alpha s}A(k,n,s), \tag{10}$$

где $\alpha=B/2$, $A(k,N,s)=\sum_{j=1}^{\infty}r_j(k,N)s$ сходится равномерно в $S\in\mathscr{D}$ и для некоторого $M>\infty$

$$\|A(k,N,s)\|\leqq M,\quad k\geqq N. \tag{11}$$

Рассмотрим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=N}^{m}Q_i(k)s^i=\sum_{k=N}^{m}[f_k(s)-f_k(0)]. \tag{12}$$

Используя (10), получим из (12) для каждого $i\geqq 1$ равенство

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{m}Q_i(k)&=(1+(N-1)\alpha)\sum_{k=N}^{m}\frac{1-f_k(0)}{1+(k-1)\alpha}r_i(k,N)\\&+\sum_{k=N}^{m}\frac{1-f_k(0))(k-N)}{(1+(k-1)\alpha)(k-1)}\sum_{j=1}^{i-1}r_j(k,N)\left[\frac{(k-1)\alpha}{1+(k-1)\alpha}\right]^{i-j}=J_1+J_2.\end{aligned} \tag{13}$$

Так как

$$SA'(k,n,s)(1-f_k(0))\frac{Sf_k'(s)(1+(k-1)\alpha-(k-1)\alpha s)}{1+(N-1)\alpha-(N-1)\alpha s}-\frac{(f_k(s)-f_k(0))(k-N)\alpha s}{(1+(N-1)\alpha-(N-1)\alpha s)^2},$$

используя (4), получим для любых целых $2\leqq N_1<N_2\leqq\infty$

$$\sup_{N_1\leqq j\leqq N_2}|jr_j(k,N)|\leqq\frac{k-N}{(1-f_k(0))(N-1)}\left[\frac{(N-1)\alpha}{1+(N-1)\alpha}\right]^{N_1}\sup_{j\leqq 1}jQ_j(k). \tag{14}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (13). Учитывая (14) для любого $2\leqq N_1\leqq i$ будем иметь неравенство

$$|iJ_1|\leqq\frac{1+\alpha}{\alpha}\left[\frac{(N-1)\alpha}{1+(N-1)\alpha}\right]^{N_1}\sup_{j\geq 1}jG(1,j),$$

правая сторона которого может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора N_1. Поэтому при $i\to\infty$

$$J_1=0(i^{-1}). \tag{15}$$

Пусть целочисленная функция $L(m)$ такая, что $L(m)\to\infty$, $L(m)m^{-1}\to 0$ при $m\to\infty$, но $i/L(m)\to\infty$, $i/L(m)\ln i\to 0$. Тогда в соотношении

$$J_2=\sum_{k=N}^{L(m)}\frac{(1-f_k(0))\,(k-N)}{(1+(k-1)\alpha)\,(k-1)}\sum_{j=1}^{[i/\ln i]}r_j(k,N)\,[\frac{(k-1)\alpha}{1+(k-1)\alpha}]^{i-j}$$

$$(16)\qquad +\sum_{k=N}^{m}\frac{(1-f_k(0))\,(k-N)}{(1+(k-1)\alpha)(k-1)}\sum_{j=[i/\ln i]+1}^{i-1}r_j(k,N)\,[\frac{(k-1)\alpha}{1+(k-1)\alpha}]^{i-j}$$

$$+\sum_{k=L(m)+1}^{m}\frac{(1-f_k(0))\,(k-N}{(1+(k-1)\alpha)(k-1)}\sum_{j=1}^{[i/\ln i]}r_j(k,N)\,[\frac{(k-1)\alpha}{1+(k-1)\alpha}]^{i-i}=R_1+R_2+R_3$$

для первого слагаемого (с учетом (11)) имеем оценку

$$(17)\qquad |R_1|\leqq c_3\sum_{k=N}^{L(m)}(1+(k-1)\alpha)^{-2}[\frac{(k-1)\alpha}{1+(k-1)\alpha}]^{i-[i/\ln i]}\leqq c_4 i^{-4}(1-\frac{1}{\alpha L(m)})^{i}=0(i^{-1}),$$

при $i\to\infty$, $m\to\infty$.
Используя (3) и (14) с $N_1=[i/\ln i]$, $N_2=i-1$ получаем, что

$$|R_2|\leq\frac{1+(m-1)\alpha}{\alpha(N-1)}\sup_{j\leq 1}jG(1,j)\frac{\ln i}{i}[\frac{(N-1)\alpha}{1+(N-1)\alpha}]^{[i/\ln i]}.$$

Так как когда $\limsup mi^{-1}<\infty$ для любого фиксированного $Nm((N-1)\alpha/1+(N-1)\alpha))^{i/\ln i}.\ln i$ стремится к нулю, отсюда следует, что при $i,\ m\to\infty$

$$(18)\qquad R_2=0(i^{-1}).$$

Рассмотрим, наконец, R_3. Из (11) следует, что при $i\to\infty$ $\sup\limits_{k\leqq N}\sum\limits_{i=[i/\ln i]}^{\infty}|r_j(k,N)|\to 0$. Тогда при $i\to\infty$

$$(19)\qquad R_3'=\sum_{k=L(m)+1}\frac{1-f_k(0)}{1+(k-1)\alpha}(1-\frac{1}{1+(k-1)\alpha})^{i}\sum_{j=1}^{[i/\ln i]}r_j(k,N)$$

$$=(1+0(1))\sum_{k=L(m)+1}^{m}\frac{1-f_k(0)}{1+(k-1)\alpha}(1-(1+(k-1)\alpha^{-1})^{i}.$$

Так как в соотношении $R_3=R_3'(1+(R_3-R_3')/R_3')$ отношение в скобке стремится к нулю при i, $m\to\infty$ ввиду свойств функции $L(m)$ и (19), мы приходим к равенству

$$(20)\quad R_3=(1+0(1))\sum_{k=L(m)+1}^{m}(1+(k-1)\alpha)^{-2}(1-1/(1+(k-1)\alpha))^{i}=\frac{2}{Bi}(1-\frac{2}{Bm})^{i}(1+0(1)).$$

Из (13), (15)—(18) и (20) следует, что когда $m,\ j\to\infty$, $\sum\limits_{k=N}^{m}Q_i(k)\sim(2/B_i)(1-(2/Bm^{i})$.
Пусть теперь $i/m\to 0$. Тогда в равенстве

$$\sum_{k=N}^{m}Qi(k)=G(1,i)\,[1-\sum_{k=m+1}^{\infty}Q_i(k)/G(1,i)-\sum_{k=0}^{N-1}Q_i(k)/G(1,i)]$$

первое отношение стремится к нулю, поскольку при некотором постоянном c_5 и достаточно большом i, m $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}Q_i(k)/G(1,i)\leq c_5 i/m$. Далее, для любого целого K, достаточно большого i, $\varepsilon>0$ (см. [3] стр. 609)

$$\sum_{k=0}^{K} Q_i(K) \leqq \sum_{k=0}^{[\varepsilon i]} Q_i(k) \leqq c_6 [(\ln i/i^{3/2} + (\sqrt{\varepsilon}/i],$$

т. е. при $i \to \infty$

(22)
$$\sum_{k=0}^{K} Q_i(k) = 0(i^{-1}).$$

Таким образом, опять приходим к (21). Еще раз используя (22), получаем из (21) $\sum_{k=N_0}^{m} Q_i(k) \sim (2/Bi)(1-(2/Bm)^i$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если* $\gamma \to 0$, $k \to \infty$, *то*

1^0
$$\binom{\gamma+k-1}{k} = \gamma K^{\gamma-1}(1+0(k^{-1})),$$

2^0
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{\gamma+i-1}{i} = k^{\gamma}(1+0(1)).$$

Доказательство. Докажем 1^0. Очевидно, что

(23)
$$\binom{\gamma+k-1}{k} = \frac{\gamma\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(k-1)k(k-1)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма функция. Покажем, что

(24)
$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x) = x^a(1+0(x^{-1}))$$

при $x \to \infty$, $a \downarrow 1$. Используем формулу ([9] стр. 360).

(25)
$$\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \ x>0, \ y>0.$$

Итак, после замены переменного из (25) будем иметь

$$\Gamma(x)\Gamma(a)/\Gamma(x+a) = \Gamma(a)/x^a - \int_0^\infty [z^{a-1}-(1-l^{-z})^{a-1}]l^{-zx}dz.$$

Нетрудно видеть, что $\int_1^\infty [z^{a-1}-(1-l^{-z})^{a-1}]l^{-zx}dz < \int_1^\infty z^a l^{-zx}dz$.

Так как, когда $z \in (0,1)$ $0<1-(1-z/2)^{a-1} \leqq (1-a)\ln(1-z/2) \leqq 2z(a-1)$, то

$$\int_0^1 [z^{a-1}-(1-l^{-z})^{a-1}]\, l^{-zx}dz \leqq 2(a-1)\int_0^1 z^a l^{-zx}dz.$$

Собирая все эти оценки, получаем

$$0 \leqq \int_0^\infty [z^{a-1}-(1-l^{-z})^{a-1}]\, l^{-zx}dz \leqq \max\{1,\ 2(a-1)\frac{\Gamma(a)}{x^{a+1}}\}.$$

Учитывая последнее в (25), убедимся в справедливости (24), откуда, в силу (23), следует первая часть леммы. Покажем 2^0. Воспользуемся тем, что для $0 \leqq s \leqq 1$, $\gamma>0$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma+i-1}{i} s^i = (1-s)^{-\gamma}.$$

Пусть $0<\varepsilon<1$. Тогда

$$(1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{k}\binom{\gamma+i-1}{i}\leqq\sum_{i=0}^{k}l^{-\varepsilon i/k}\binom{\gamma+i-1}{i}\leqq(1-l^{-\varepsilon/k})^{-\gamma 1},$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{\gamma+i-1}{i}\geqq(1-l^{-1/k})^{-\gamma}-\sum_{i=k+1}^{\infty}l^{-i/k}\binom{\gamma+i-1}{i}.$$

Учитывая, что $\binom{\gamma+i-1}{i}$ убывает по i, когда $\gamma<1$, и используя первую часть леммы, убедимся, что при $k\to\infty$, $\gamma\to 0$ сумма правой части последнего неравенства имеет порядок $0(k^{\gamma})$. Таким образом, для любого $0<\varepsilon<1$

$$1\leqq\liminf_{\substack{k\to\infty\\ \gamma\to 0}}k^{-\gamma}\sum_{i=0}^{k}\binom{\gamma+i-1}{i}\leqq\limsup_{\substack{k\to\infty\\ \gamma\to 0}}k^{-\gamma}\sum_{i=0}^{k}\binom{\gamma+i-1}{i}\leqq\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Отсюда и следует утверждение 2^0. Лемма доказана.

Так как $\alpha(n)$ медленно меняется в бесконечности, то ([7]) найдется функция $\lambda_\alpha(n)\longrightarrow\infty$, $n\longrightarrow\infty$ такая, что

$$\alpha(n/\lambda_\alpha(n))\sim\alpha(n)$$

при $n\longrightarrow\infty$. Для упрощения записи в дальнейшем иногда будем писать λ_α вместо $\lambda_{\alpha(n)}(n)$ и n/λ_α вместо $[n/\lambda_{\alpha(n)}(n)]$. Положим

$$T_n(N,s)=\widehat{g}_N(n,s)(1+(N-1)B2^{-1}(1-s))^{\gamma_n}\prod_{k=N}^{n}(1+F_n(k,s))=\sum_{j=0}^{\infty}R_j(,N)s^j.$$

Лемма 4. *Если выполнены условия леммы 1, то найдется такое $M_1<\infty$ что при достаточно большом n и любом $\varepsilon>0$*

$$\sup_{N_1\leqq j\leqq N_2}|jR_j(n,N)|\leqq\varepsilon\alpha(n)+M_1\Big[\frac{N_2}{n}+N_1^{-1}\sup_{n/\lambda_\alpha\leqq k\leqq n}\beta(k)$$

$$+\alpha(n)\sup_{N_1\leqq j\leqq N_2}\Big|1-2B^{-1}\big(j\sum_{k=N}^{n}Q_j(k)\big)^{-1}\big(1-\frac{2}{Bn}\big)^j\Big|\Big].$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$T_n(N,s)=\Big(1+\frac{Bn}{2}(1-s)\Big)^{\gamma_n}g_n(s). \tag{26}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}ST'_n(N,s)={}&T_n(N,s)\sum_{k=N}^{n}\frac{\partial h_{n-k}(f_k(s))}{\partial f_k(s)}s\frac{\partial f_k(s)}{\partial s}\Big(\frac{1}{h_{n-k}(f_k(s))}-1\Big)\\&+T_n(N,s)\sum_{k=N}^{n}\Big(\frac{\partial h_{n-k}(f_k(s))}{\partial f_k(s)}-\alpha(n-k)\Big)\frac{\partial f_k(s)}{\delta s}s\\&+T_n(N,s)\sum_{k=N}^{n}(\alpha(n-k)-\alpha(n))\frac{\partial f_k(s)}{\partial s}s\\&+T_n(N,s)\Big[\sum_{k=N}^{n}s\frac{\partial f_k(s)}{\partial s}-\frac{B2^{-1}ns}{1+2^{-1}Bn(1-s)}\Big]\alpha(n)=J_1+J_2+J_3+J_4.\end{aligned} \tag{27}$$

Из определения $T_n(N,s)$ найдется такое M_0, что для $n\geqq N$

$$\|T_n(N,s)\|\leqq M_0<\infty. \tag{28}$$

Учитывая (28) и используя (4), получаем, что

$$\sup_{N_1\leq j\leq N_2}[J_1]_j\leq M_0\sum_{k=N}^{n}\alpha(n-k)\left\|\frac{1}{h_{n-k}(f_k(s))}-1\right\|\sup_{N_1\leq j\leq N_2}Q_j(k)$$

$$\leq c_7\sum_{k=N}^{n-n/\lambda_\alpha}\alpha_2(n-k)\sup_{1\leq j<\infty}jQ_j(k)+c_7\sum_{k=n-n/\lambda_\alpha}^{n}\alpha^2(n-k)k^{-2}N_2\sup_{j,k}k^2Q_j(k).$$

Отсюда для любого $\varepsilon>0$ при достаточно большом n

$$\sup_{N_1\leq j\leq N_2}[J_1]_j\leq\varepsilon\alpha(n)+c_8N_2n^{-1}. \tag{29}$$

Так как

$$\left\|\frac{\partial h_{n-k}(f_k(s))}{\partial f_k(s)}-\alpha(n-k)\right\|_{N_1}^{N_2}\leq\beta(n-k)\left\|1-f_k(s)\right\|_{N_1}^{N_2}\leq\beta(n-k)N_1^{-1},$$

для некоторого c_9

$$\sup_{N_1\leq j\leq N_2}[J_2]_j\leq\frac{c_9}{N_1}\Big[\sup_{\frac{n}{\lambda_\alpha}\leq k\leq n}\beta(k)+N_2n^{-1}\Big]. \tag{30}$$

Так же, как при оценке $[J_1]_j$, для любого $\varepsilon>0$ при достаточно большом n получим

$$\sup_{N_1\leq j\leq N_2}[J_3]_j\leq\varepsilon\alpha(n)+c_{10}N_2n^{-1}. \tag{31}$$

Рассмотрим J_4. Учитывая, что $2^{-1}Bns/(1+2^{-1}Bn(1-s))=\Sigma_{j=1}^{\infty}(2^{-1}Bn/(1+2^{-1}Bn))^js^j$ имеем

$$\sup_{N_1\leq j\leq N_2}[J_4]_j\leq c_{11}\alpha(n)\sup_{N_1\leq j\leq N_2}\Big|1-2B^{-1}\Big(j\sum_{k=N}^{n}Q_j(k)\Big)^{-1}\Big(1-\frac{2}{Bn}\Big)^j\Big|. \tag{32}$$

Собирая оценки (29)—(32) из (27) получим утверждение леммы 4.

Доказательство теоремы. Переходя к равенству коэффициентов (4) получаем, что

$$P_{0i}(n)=\sum_{j=0}^{i}R_j(n,N)\binom{\gamma_n+i-j-1}{i-j}\left(\frac{\frac{Bn}{2}}{1+\frac{Bn}{2}}\right)^{i-j}\left(1+\frac{Bn}{2}\right)^{-\gamma_n}. \tag{33}$$

Кроме того, в силу леммы 1

$$\lim_{n\to\infty}T_n(N,s)=1$$

равномерно в любом компактном подмножестве круга $\mathscr{D}$. Используя п. 1^0 леммы 3 и учитывая (34) убедимся в том, что первое слагаемое в (33) умноженное на $(i/\gamma_n)\,(n/i)^{\gamma_n}$ стремится к 1 при $i,n\to\infty$ и $(i/n)^{\gamma_n}\in\mathscr{K}(0,1)$. Рассмотрим теперь сумму

$$J=\sum_{j=1}^{i}R_j(n,N)b_{ji}^{(n)},\quad b_{ji}^{(n)}=\binom{\gamma_n+i-j-1}{i-j}\frac{i^{1-\gamma_n}}{\gamma_n}.$$

Поскольку $b_{ji}^{(n)}$ растет по j когда $\gamma_n<1$ и $b_{(i/2i)}^{(n)}\sim 2$ при $i,n\to\infty$, найдется такое M_2, что $|b_{ji}^{(n)}|\leq M_2$, $0\leq j\leq i/2$. Тогда, учитывая (28) и (34), имеем

$$\lim_{i,\, n\to\infty} \sum_{j=1}^{[i/2]} R_j(n,\, N)\, b_{ji}^{(n)} = 0. \tag{35}$$

Далее

$$\Big| \sum_{j=[i/2]}^{i} R_j(n, N)\, b_{ji}^{(n)} \Big| \leqq \frac{2}{\gamma_n} \sup_{i/2\leqq j\leqq i} | jR_j(n, N) | \Big| \sum_{j=0}^{i} \binom{\gamma_n+j-1}{j} \Big).$$

Если учесть здесь лемму 4 и п.2^0 леммы 3, то найдется такое M_3, что для любого $\varepsilon>0$ при достаточно большом n

$$\Big| \sum_{j=[i/2]}^{i} R_j(n, N) b_{ji}^{(n)} \Big| \leqq M_3 \frac{1}{\alpha(n)} [\varepsilon\alpha(n) + i/n + 1/i \sup_{n/\lambda_\alpha\leqq k\leqq n} \beta(k)$$

$$+\alpha(n) \sup_{i/2\leqq j\leqq i} | 1-2B (j \sum_{k=N}^{n} Q_j(k))^{-1} (1-\frac{2}{Bn})^j |].$$

Пусть $0<x_1=\liminf (i/n)^{\gamma_n} \leqq \limsup (i/n)^{\gamma_n} = x_2<1$. Тогда при $i, n\to\infty$, $(i/n)^{\gamma_n}\in\mathscr{K}(0, 1)$

$$\limsup (i/n\alpha(n)) \leqq \limsup (x_2^{1/\gamma_n}(1/\alpha(n))) = 0,$$

$$\limsup (1/i\alpha(n)) \leqq \limsup (1/x_1^{1/\gamma_n} n\alpha(n)]) = 0,$$

$$\limsup_{i,\, n\to\infty}\ \sup_{i/2\leqq j\leqq i} | 1-(2/B) (j \sum_{k=N}^{n} Q_j(k))^{-1} (1-(2/Bn))^j | = 0,$$

в силу леммы 2.

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших i, n $\sum_{j=[i/2]}^{i} | R_j(n, N) b_{ji}^{(n)} | <\varepsilon$, следовательно, это вместе с (35) дает нам, что

$$\lim_{\substack{i,\, n\to\infty \\ (i/n)^{\gamma_n}\in\mathscr{K}(0,\ )}} \sum_{j=1}^{i} R_j(n,\, N) b_{ji}^{(n)} = 0.$$

Так как, когда $(i/n)^{\gamma_n}\in\mathscr{K}(0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{1+(Bn/2)})^{\gamma_n} = 1,\quad \lim_{i,\, n\to\infty}\ \sup_{1\leqq j\leqq i} | 1-(\frac{(Bn/2)}{1+(Bn/2)})^{i-j} | = 0,$$

из последнего заключаем, что

$$(i/\gamma_n)\,(i/n)^{\gamma_n} P_{0i}(n) \to 1 \tag{36}$$

при $i, n\to\infty$ и $(i/n)^{\gamma_n}\in\mathscr{K}(0, 1)$.

В случае $z(0)=j$, j — фиксировано, воспользуясь равенством $P_{ji}(n) = \sum_{k=0}^{i} P_{0k}(n)\, Q_{ji-k}(n)$ и тем, что ([3] стр. 604) $\sup_{r\geq 1} O_{jr}(n) \leq jM_4 n^{-2}$ убедимся в том, что будет справедливым (36), если заменить $P_{0i}(n)$ на $P_{ji}(n)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Чистяков. Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов. *Теория вероятностей и ее применения*, **2**, 1957, № 3, 360—374.
2. С. В. Нагаев, Р. Мухамедханова. Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся процессов. *Предельные теоремы и статистические выводы*. Ташкент, 1966, 90—112.
3. H. Kesten, P. Ney, F. Spitzer. The Galton—Watson process with mean one and finite variance. *Теория вероятностей и ее применения*, 11, 1966, 579—611.
4. B. Mellein. Local limit theorems for the critical Galton—Watson process with immigration. *Revista colombiana de Matematicas*, **16**, 1982, 31—56.
5. В. А. Топчий. Локальная предельная теорема для критических процессов Беллмана—Харриса с дискретным временем. Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. Труды Института математики Сибирского отд. АН СССР, т. 1, Новосибирск, 1982, 97—122.
6. И. С. Бадалбаев, И. Рахимов. Предельные теоремы для критических процессов Гальтона—Ватсона с иммиграцией убывающей интенсивности. *Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук*, 1978, № 2, 9—14.
7. И. С. Бадалбаев, И. Рахимов. Критические ветвящиеся процессы с иммиграцией убывающей интенсивности. *Теория вероятностей и ее применения* **23**, 1978, 275—283.
8. Е. Сенета. Правильно меняющиеся процессы. М., 1985, 142.
9. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, II. М., 1970.
10. К. В. Митов, Н. М. Янев. Ветвящиеся процессы с убывающей иммиграцией, зависящей от состояния процесса. *Сердика*, **11**, 1985, 25—41.

СССР, 700143
г. Ташкент, ул. Ф. Ходжаева 29
Институт математики АН УзССР

Поступила 15. 9. 1986