Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, РЕАЛИЗУЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЯ ОДНОГО ЦИКЛА ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА $M/GI/1/k$ И $M/GI/1/\infty$

ХРИСТО ВАСИЛЕВ ПАВЛОВ

В работе рассматривается одноканальная система с ограниченной или неограниченной очередью. Входящий поток пуассоновский, а времена обслуживания непотерянных заявок независимы и не зависят от входящего потока. Рассматриваются системы типа $M/GI/1/k$ и $M/GI/1/\infty$ (см. [2]). Цель работы найти формулы математических ожиданий, ковариации, коэффициентов корреляции случайных величин, реализующихся во время одного цикла (время от поступления клиента в свободную систему до следующего такого момента) и применить эти формулы.

Введем определения и обозначения:

ξ_i — время от i-того до $(i+1)$-го прихода требования (потеряного или непотерянного) в систему, $i=1, 2, \dots$;

$\widehat{\xi}_s$ — время от момента прихода s-той заявки до момента освобождения первой заявки, если во время обслуживания этой заявки в систему пришли ровно $s-1$ заявки, $s=1, 2, \dots$;

η_i — время обслуживания i-той непотерянной заявки, $i=1, 2, \dots$;

$\zeta_k^{(i)}$ — продолжительность i-того периода занятости, если в системе есть k мест для ожидания, $i=1, 2, \dots, k=0, 1, \dots, \infty$;

$\varkappa_k^{(i)}$ — число обслуженных заявок во время i-того периода занятости, если в системе есть k мест ожидания, $i=1, 2, \dots, k=0, 1, \dots, \infty$;

$\widehat{\varkappa}_{1,k}$ — число непотерянных заявок, поступивших в систему во время обслуживания первой заявки, если в системе есть k мест ожидания, $k=0, 1, \dots$;

$\widetilde{\varkappa}_{1,k}$ — число потерянных заявок во время обслуживания первой заявки, если в системе есть k мест для ожидания, $k=0, 1, \dots$;

$\varkappa_1$ — общее число потерянных заявок, пришедших в систему во время обслуживания первой заявки;

$\eta_{1,k}^{(j)}$ — продолжительность времени, когда в очереди было ровно j заявок во время обслуживания первой заявки, если в системе есть k мест ожидания $j=0, 1, \dots, k$, $k=0, 1, \dots, \infty$;

$X_k^{(j)}$ — суммарное (тотальное) время внутри одного цикла, когда в системе было ровно j заявок, если в ней есть k мест ожидания, $j=0, 1, \dots, k+1$, $k=0, 1, \dots, \infty$;

Определение 1. *$X_k^{(j)}$ называются j-пребыванием во время одного цикла (в системе есть k мест ожидания)*

$\widetilde{\varkappa}_k^{(j)}$ — число потерянных заявок во время j-того периода занятости, если в системе есть k мест ожидания, $j=0, 1, \dots$; $k=0, 1, \dots$;

$\widetilde{W}_k^{(i)}$ — суммарное (тотальное) время ожидания всех требований во время i-того периода занятости, если в системе есть k мест ожидания, $i=1, 2, \dots, k=0, 1, \dots, \infty$;

Замечание. Так как законы распределения для $\zeta_k^{(i)}$, $\varkappa_k^{(i)}$, $\widetilde{\varkappa}_k^{(i)}$ и $\widetilde{W}_k^{(i)}$, очевидно, не зависят от i, в дальнейшем верхний индекс будет опускаться;

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 14, 1988, с. 291—302.

Для рассматриваемых систем $\zeta_1, \zeta_2 \dots$ распределены по показательному закону. Пусть: $E\zeta_1 = 1/\lambda,\ i=1,\ 2, \dots;\ \mathsf{P}\{\eta_i \geqq x\} = \overline{G}(x);\ \mathsf{P}\{\eta_i < x\} = G(x),\ j=1,\ 2, \dots;\ \int_0^\infty \overline{G}(x)\,dx = 1/\nu;\ \rho = \lambda/\nu;$

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x); \quad \Theta_j = \mathsf{P}\{\varkappa_1 = j\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda y)^j}{j!} e^{-\lambda y} dG(y), \quad j=0, 1, \dots;$$

$$H_k(z) = \mathsf{P}\{\zeta_n^{(j)} < z\}, \quad j=1,\ 2, \dots,; \quad k=0,\ 1, \dots.;$$

$$r_k = E\zeta_k;\ s_k = E\varkappa_k;\ l_k = E\widetilde{\varkappa}_k;\ \ \omega_k = E\widetilde{W}_k. \quad k=0,\ 1, \dots, \infty;$$

$$\alpha_j = EX_k^{(j)}, \quad j=0,\ 1, \dots, k; \quad k=0,\ 1, \dots,\ \infty; \quad \beta_k = EX_k^{(k+1)}, \quad k=0,\ 1, \dots;$$

Замечание. Будет показано, что $EX_k^{(j)}$, $j=0,\ 1, \dots, k$, не зависят от k.

$$S(z) = \sum_{k=1}^\infty s_k z^{k-1}; \quad \omega(z) = \sum_{k=1}^\infty \omega_k z^{k-1};$$

$$\beta(z) = \sum_{k=1}^\infty \beta_k z^{k-1}, \quad \alpha(z) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k z^{k-1};$$

$$r(z) = \sum_{k=1}^\infty r_k z^{k-1}; \quad l(z) = \sum_{k=1}^\infty l_k z^{k-1};$$

$q_k^{(j)}(t)$ — вероятность того, что в момент t система еще не освободилась, в этот момент в системе есть ровно j заявок, если первая заявка начала обслуживаться в момент 0. Система имеет k мест ожидания, $k=0,\ 1, \dots;\ j=0,\ 1, \dots, k+1;$

$$\widehat{q}_k^{(j)} = \int_0^\infty q_k^{(i)}(t)dt \ \ k=0,\ 1, \dots,; \quad j=0,\ 1, \dots, k+1;$$

$$v_k = \int_0^\infty q_k^{(k+1)}(t)\,dt, \quad k=0,\ 1, \dots, \quad Q(z) = \sum_{j=1}^\infty \widehat{q}^{(j)} z^{j-1}.$$

Замечание. Докажем, что для $j=1,\ 2, \dots, k$, $\int_0^\infty q_k^{(j)}(t)dt$ не зависит от k $(\widehat{q}_k^{(j)} = \widehat{q}^{(j)})$.

$\zeta(t)$ — число заявок в системе к моменту t;

Определение 2. *Реляция* $\zeta \overset{d}{=} \eta$ *означает, что* ζ *и* η *одинаково распределены.*

Сначала найдем некоторые характеристики системы $M/GI/1/\infty$. В [4] показано, что если $\rho < 1$,

$$s_\infty = 1/(1-\rho); \quad r_\infty = 1/\nu(1-\rho);$$

$$D\widehat{\varkappa}_\infty = \frac{\rho + \lambda^2 D\eta_1}{(1-\rho)^3}; \quad D\zeta_\infty = \frac{\rho + \nu^2 D\eta_1}{\nu^2(1-\rho)^3}. \tag{1}$$

Чтобы найти ковариацию и коэффицент корреляции ζ_∞ и $\widehat{\varkappa}_\infty$, воспользуемся леммой 1.

Лемма 1. *Верны следующие формулы:*

$$E[\xi_i\xi_j/\varkappa_1=s]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=s\}=E[\xi_i\,\widehat{\xi}_s/\varkappa_1=s]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=s\}=\lambda^{-2}\theta_{s+2},\quad i\neq j,\ i\leqq s,\ j\leqq s; \tag{2}$$

$$E[\xi_i^2/\varkappa_1=s]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=s\}=E[\,\widehat{\xi}_s^2/\varkappa_1=s]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=s\}=2\lambda^{-2}\,\theta_{s+2},\quad i\leqq s; \tag{3}$$

$$E[\xi_i/\varkappa_1=s]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=s\}=E[\widehat{\xi}_s/\varkappa_1=s]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=s]=\lambda^{-1}\,\theta_{s+1}\quad i\leqq s. \tag{4}$$

Определение 3. *Если $A(x)$ и $B(x)$ — функции распределения неотрицательных случайных величин, то*

$$A*B(x)=\int_0^\infty A(x-z)dB(z);\quad A^{s*}(x)=\underbrace{A*A*\ldots A}_{s}(x).$$

Доказательство леммы 1. *Если $i\neq j,\ i\leqq s,\ j\leqq s$, то*

$$E[\zeta_i\zeta_j/\varkappa_1=s]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=s\}$$

$$=\int_0^\infty\{\int_0^y[\int_0^{y-x_1} x_1x_2\frac{\lambda^{s-2}(y-x_1-x_2)^{s-2}}{(s-2)!}\,e^{-\lambda(y-x_1-x_2)}\,d\Lambda(x_2)]\,d\Lambda(x_1)\}dG(y)$$

$$=\lambda^{-2}\int_0^\infty\frac{(\lambda y)^{s+2}}{(s+2)!}\,e^{-\lambda y}dG(y)=\lambda^{-2}\Theta_{s+2},$$

где $\Lambda(x)$ — функция распределения показательно распределенной случайной величины параметром λ.

Если $i\leqq s$, то $E[\zeta_i\widehat{\zeta}_s/\varkappa_1=s]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=s\}=\int_0^\infty\{\int_0^y[\int_0^{y-x_1} x_2(y-x_1-x_2)\,e^{-\lambda(y-x_1-x_2)}\,d\Lambda(x_2)]$

$\times\, d\Lambda^{(s-1)*}(x_1)\}dG(x)=\lambda^{-2}\Theta_{s+2}$.

Аналогично доказывается (3) и (4).

Утверждение 1. *Для системы $M/GI/1/\infty$, в случае $\rho<1$, верны соотношения:*

$$\operatorname{cov}(\zeta_\infty,\ \widehat{\varkappa}_\infty)=\lambda E\eta_1^2/(1-\rho)^3; \tag{5}$$

$$r(\zeta_\infty,\ \widehat{\varkappa}_\infty)=\rho(1+\nu^2D\eta_1)/\sqrt{(\rho+\lambda^2D\eta_1)\,(\rho+\nu^2D\eta_1)}; \tag{6}$$

$$\omega_\infty=\lambda E\eta_1^2/2(1-\rho)^2. \tag{7}$$

Доказательство. Для доказательства формул (5), (6) и (7) воспользуемся идеей, использованной многими авторами (см., например, [3]). Организуем следующую дисциплину обслуживания: заявка, поступившая в систему во время обслуживания первой заявки, начинает обслуживаться только после освобождения системы от заявок, поступивших в систему после окончания обслуживания первого клиента. Нетрудно сообразить, что при данной дисциплине обслуживания закон распределения $(\zeta_\infty,\ \widehat{\varkappa}_\infty)$ таков же, как при дисциплине FIFO.

Нетрудно получить, что

$$\zeta_\infty\overset{d}{=}\eta_1+\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\zeta_\infty^{(i)}\widehat{\varkappa}_\infty\overset{d}{=}1+\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\widehat{\varkappa}_\infty^{(i)}.$$

Отсюда следует

$$\zeta_\infty\,\widehat{\varkappa}_\infty\overset{d}{=}\eta_1+\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\zeta_\infty^{(i)}+\eta_1\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\widehat{\varkappa}_\infty^{(i)}+\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\sum_{j=1}^{\varkappa_1}\zeta_\infty^{(i)}\,\widehat{\varkappa}_\infty^{(j)}. \tag{8}$$

Из (8), очевидно, следует

$$E(\zeta_\infty)\widehat{\varkappa}_\infty=\frac{1}{\nu}+E\left(\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\zeta_\infty^{(i)}\right)+E\left(\eta_1\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\widehat{\varkappa}_\infty^{(i)}\right)+E\left(\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\sum_{j=1}^{\varkappa_1}\zeta_\infty^{(i)}\ \widehat{\varkappa}_\infty^{(i)}\right). \tag{9}$$

Найдем математические ожидания, фигурирующие в первой части (9)

$$E\left(\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\zeta_\infty^{(i)}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}E\left(\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\zeta_\infty^{(i)}/\varkappa_1=l\right)\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\} \tag{10}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}E\left(\sum_{i=1}^{l}\zeta_\infty^{(i)}/\varkappa_1=l\right)\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}=\sum_{l=1}^{\infty}E\zeta_\infty\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}=E\zeta_\infty E\varkappa_1$$

$$E\varkappa_1=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^\infty i((\lambda y)^i/i!)\,e^{-\lambda y}\,dG(y)=\lambda\int_0^\infty y\,dG(y)=\rho. \tag{11}$$

Из (1), (10) и (11) следует

$$E\left(\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\zeta_\infty^{(i)}\right)=\rho/\nu(1-\rho), \tag{12}$$

$$E\left[\eta_1\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\widehat{\varkappa}_\infty^{(i)}\right]=\sum_{l=0}^{\infty}E\left[\eta_1\sum_{i=1}^{\varkappa_1}E\left[\eta_1\,\widehat{\varkappa}_\infty^{(i)}/\varkappa_1=l\right]\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}=\sum_{l=1}^{\infty}lE\,\widehat{\varkappa}_\infty E[\eta_1/\varkappa_1=l]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}. \tag{13}$$

Из (1) и (13) следует

$$E\left[\eta_1\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\widehat{\varkappa}_\infty^{(i)}\right]=(1-\rho)^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}lE[\eta_1/\varkappa_1=l]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}. \tag{14}$$

При помощи (4) имеем

$$E[\eta_1/\varkappa_1=l]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}=E\left[\sum_{i=1}^{l}\xi_i+\widehat{\xi}_l/\varkappa_1=l\right]\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}=\lambda^{-1}(l+1)\Theta_{l+1}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует

$$E\left[\eta_1\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\widehat{\varkappa}_\infty^{(i)}\right]=(1-\rho)^{-1}\sum_{l-1}^{\infty}\lambda^{-1}l(l+1)\Theta_{l+1} \tag{16}$$

$$=1/\lambda(1-\rho)\int_0^\infty\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\lambda y)^{l-1}}{(l-1)!}\,e^{-\lambda y}(\lambda y)^2 d\,G(y)=\lambda E\eta_1^2/(1-\rho)=\lambda\rho E\eta_1^2/(1-\rho).$$

При помощи (1) и (11) имеем

$$E\left[\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\sum_{j=1}^{\varkappa_1}\zeta_\infty^{(i)}\widehat{\varkappa}_\infty^{(j)}\right]=\sum_{l=1}^{\infty}E\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\zeta_\infty^{(i)}\widehat{\varkappa}_\infty^{(j)}/\varkappa_1=l\right]\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\} \tag{17}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i\neq j}\sum E\left[\zeta_\infty^{(i)}\ \widehat{\varkappa}_\infty^{(j)}/\varkappa_1=l\right]\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{l}E(\zeta_\infty^{(i)}\widehat{\varkappa}_\infty^{(i)}/\varkappa_1=l)\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}l\,(l-1)\,\nu^{-1}(1-\rho)^{-2}\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}+\sum_{l=1}^{\infty}lE(\zeta_\infty\,\widehat{\varkappa}_\infty)\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=l\}$$

$$=(\nu^{-1}(1-\rho)^{-2})\int_0^\infty\sum_{l=2}^{\infty}l(l-1)\frac{(\lambda y)^l}{l!}\,dG(y)+E(\zeta_\infty\,\widehat{\varkappa}_\infty)E\varkappa_1$$

$$=\lambda^2E\eta_1^2/\nu(1-\rho)^2)+\rho E(\zeta_\infty\widehat{\varkappa}_\infty)=(1-\rho)^{-2}\,\lambda\rho E\eta_1^2+\rho\,E(\zeta_\infty\,\widehat{\varkappa}_\infty).$$

При помощи (9), (12), (16) и (17) получается

$$E[\zeta_\infty \widehat{\varkappa}_\infty] = 1/\nu(1-\rho)^2 + (1-\rho)^{-3}\lambda E\eta_1^2. \tag{18}$$

При помощи (1) и (18) получаются соотношения (5) и (6).

Применив идею, о которой шла речь, получим

$$\widetilde{W}_\infty \overset{d}{=} \widetilde{\eta}_{1,\infty} + \sum_{i=1}^{\varkappa_1} \widetilde{W}_\infty^{(i)} + \sum_{i=1}^{\varkappa_1}(i-1)\zeta_\infty^{(i)}. \tag{19}$$

При помощи свойств математических ожиданий из (19) имеем

$$\omega_\infty = E\widetilde{\eta}_{1,\infty} + E\{\sum_{i=1}^{\varkappa_1} \widetilde{W}_\infty^{(i)}\} + E\{\sum_{i=1}^{\varkappa_1}(i-1)\zeta_\infty^{(i)}\}. \tag{20}$$

При помощи леммы 1 получим компактные формулы для математических ожиданий, фигурирующих в правой части (20)

$$E\widetilde{\eta}_{1,\infty} = \sum_{l=1}^{\infty} E(\widetilde{\eta}_{1,\infty}/\varkappa_1 = l)\,\mathsf{P}\{\varkappa_1 = l\} = \sum_{l=1}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\zeta_i + l\,\widehat{\zeta}_l/\varkappa_1 = l]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1 = l\} \tag{21}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\lambda^{-1}\Theta_{l+1} = \sum_{l=1}^{\infty}(l(l+1)/2\lambda)\Theta_{l+1} = (\lambda/2)E\eta_1^2.$$

$$E(\sum_{i=1}^{\varkappa_1}\widetilde{W}_\infty^{(i)}) = \sum_{l=1}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{l}\widetilde{W}_\infty^{(i)}/\varkappa_1 = l)\,\mathsf{P}\{\varkappa_1 = l\} \tag{22}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} lE\widetilde{W}_\infty\,\mathsf{P}\{\varkappa_1 = l\} = E\widetilde{W}_\infty E\varkappa_1 = \rho\omega_\infty.$$

$$E[\sum_{i=1}^{\varkappa_1}(i-1)\zeta_\infty^{(i)}] = \sum_{l=1}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{l}(i-1)\zeta_\infty^{(i)}/\varkappa_1 = l]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1 = l\} \tag{23}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{l}(i-1)E\zeta_\infty\,\mathsf{P}\{\varkappa_1 = l\} = \nu^{-1}(1-\rho)^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)l}{2}\,\mathsf{P}\{\varkappa_1 = l\}$$

$$= (\nu)^{-1}(1-\rho)^{-1}\int_0^\infty \sum_{l=1}^{\infty} l(l-1)\,\frac{(\lambda y)^l}{l!}\,e^{-\lambda y}dG(y) = \frac{\lambda^2 E\eta_1^2}{2\nu(1-\rho)}.$$

Из (20), (21), (22) и (23) следует (7).

Из (7) видно, что если время обслуживания одного клиента не обладает вторым моментом, то среднее тотальное ожидание заявок во время одного периода занятости бесконечно. Из (21) видно, что если $E\eta_1^2 = \infty$, то среднее тотальное ожидание требований во время обслуживания первого клиента тоже бесконечно. Это наводит на мысль, что даже когда места ожидания бесплатны, разумно ограничивать длину очереди.

Применяя демонстрированный метод, могли бы получить формулы для $D\widetilde{W}_\infty$, $\mathrm{cov}(\widetilde{W}_\infty, \zeta_\infty)$ и $\mathrm{cov}(\widetilde{W}_\infty, \widehat{\varkappa}_\infty)$, которые довольно громоздки. Для существования $D\widetilde{W}_\infty$ необходимо существование четвертого, а для $\mathrm{cov}(\widetilde{W}_\infty, \zeta_\infty)$ и $\mathrm{cov}(\widetilde{W}_\infty, \widehat{\varkappa}_\infty)$ — третьего момента времени обслуживания одного клиента.

Почти во всех учебниках и монографиях теории массового обслуживания уделяется особое внимание W_∞ — стационарному времени ожидания одной заявки. Показано (см., например, [4]), что

$$EW_\infty = \lambda E\eta_1^2/2(1-\rho). \tag{24}$$

Из (1), (7) и (24) следует естественный результат $E\widetilde{W}_\infty = EW_\infty E\widehat{\varkappa}_\infty$.

В случае, когда очередь ограничена, точные формулы средних характеристик случайных величин, реализующихся во время одного цикла, очень сложны. В этом случае будем искать рекуррентные формулы, связывающие эти математические ожидания.

Утверждение 2. *Для системы $M/GI/1/k$ верны следующие соотношения*:

$$s_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} s_i \mathsf{P}\{\varkappa_1 \geqq k-i+1\}; \tag{25}$$

$$s_0 = 1; \; s_1 = 1/\Theta_0; \; s_{k+1} = (\Theta_0^{-1}[s_k - \sum_{i=1}^{k} s_i \Theta_{k-i+1}], \quad k = 1, 2, \dots; \tag{26}$$

$$l_k = 1 + (\rho - 1)s_k, \quad k = 0, 1, \dots; \tag{27}$$

$$r_k = \lambda^{-1}\rho s_k, \quad k = 0, 1, \dots; \tag{28}$$

$$\alpha_j = \lambda^{-1}(s_j - s_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots; \; \alpha_0 = \lambda^{-1}; \tag{29}$$

$$\beta_k = \lambda^{-1}[1 + (\rho - 1)s_k], \quad k = 0, 1, \dots; \tag{30}$$

$$\omega_k = \lambda^{-1}[k(1 + \rho s_k) - \sum_{i=1}^{k} s_i], \quad k = 0, 1, \dots . \tag{31}$$

Доказательство. Снова воспользуемся идеей специального приоритета. При помощи этой идеи получим: $\varkappa_k \overset{d}{=} 1 + \Sigma_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}} \varkappa^{(1)}_{k-i+1}$.
Отсюда и из свойств математических ожиданий имеем

$$s_k = 1 + E\,(\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}} \varkappa^{(1)}_{k-i+1}). \tag{32}$$

$$E(\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_1} \varkappa^{(1)}_{k-i+1}) = \sum_{l=1}^{k} E(\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}} \varkappa^{(1)}_{k-i+1} / \widehat{\varkappa}_{1,k} = l)\, \mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k} = l\} = \sum_{l=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} E(\varkappa^{(1)}_{k-i+1} / \widehat{\varkappa}_{1,k} = l)\, \mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k} = l\} \tag{33}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} s_{k-i+1}\, \mathsf{P}\{\widehat{\varkappa_{1,k}} = l\} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=i}^{k} s_{k-i+1}\, \mathsf{P}\{\widehat{\varkappa_{1,k}} = l\} = \sum_{i=1}^{k} s_{k-i+1}\, \mathsf{P}\{\widehat{\varkappa_{1,k}} \geqq i\} = \sum_{i=1}^{k} s_{k-i+1} \mathsf{P}\{\varkappa_1 \geqq i\}.$$

Из (32) и (33) следует (25). Из (25) имеем

$$\Theta_0 s_k = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i\, \mathsf{P}\{\varkappa_1 \geqq k-i+1\}. \tag{34}$$

При помощи (34) легко получается (26). Из (26) имеем

$$s(z) = 1/(g[\lambda(1-z)] - z). \tag{35}$$

Так как $\widetilde{\varkappa}^{(1)}_k \overset{d}{=} \widetilde{\varkappa}_{1,k} + \sum_{c=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}} \widetilde{\varkappa}^{(1)}_{k-i+1}$, то

$$l_k = E\widetilde{\varkappa}_{1,k} + E[\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}} \widetilde{\varkappa}^{(i)}_{k-i+1}]. \tag{36}$$

Найдем математические ожидания правой части (36).

$$(37)\qquad E\tilde{\varkappa}_{1,k}=\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\tilde{\Sigma}_{1,k}\geqq i\}=\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq k+i\}=\sum_{i=k+1}^{\infty}\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq i\}$$

$$(38)\qquad E\Big[\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}}\tilde{\varkappa}^{(1)}_{k-i+1}\Big]+\sum_{l=1}^{k}E\Big[\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}}\tilde{\varkappa}^{(1)}_{k-i+1}/\widehat{\varkappa}_{1,k}=l\Big]\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}=l\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}l_{k-i+1}\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{i,k}=j\}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_{k-i+1}\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}=j\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}l_{k-i+1}\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}\geqq i\}=\sum_{i=1}^{k}l_{k-i+1}\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq i\}.$$

При помощи (36), (37) и (38) получаем

$$(39)\qquad l_k=\sum_{i=k+1}^{\infty}\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq i\}+\sum_{i=1}^{k}l_{k-i+1}\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq i\}.$$

Положим $l_k=m_k+1$ и $m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}m_kz^{k-1}$. Тогда из (39) следует

$$(40)\qquad m_k=\rho-1+\sum_{i=1}^{k}m_{k-i+1}\mathsf{P}\{\varkappa_i\geqq i\}.$$

Помножив (40) на z^{k-1} и просуммировав по всем k с 1 до ∞, получим $m(z)=(\rho-1)(1-z)^{-1}+m(z)\sum_{i=1}^{\infty}z^{i-1}\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq i\}$. После некоторых преобразований получим

$$(41)\qquad m(z)=(\rho-1)/(g[\lambda(1-z)]-z).$$

Из (43) и (41) следует, что $m_k=(\rho-1)s_k$, откуда следует и (27).

Нетрудно сообразить, что $\zeta_k\stackrel{d}{=}\eta_1+\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}}\zeta_j$, откуда следует, что

$$(42)\qquad E\zeta_k=(1/\nu)+E\Big(\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}}\zeta_i\Big).$$

Применяя демонстрированную технику, при помощи (42) получим $r_k=(1/\nu)+\sum_{i=1}^{k}r_i\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq k-i+1\}$.

$$(43)\qquad r(z)=(\nu\{g[\lambda(1-z)]-z\})^{-1}.$$

Из (35) и (43) следует (28).

Если $j\leqq k$, то $X_k^{(j)}\stackrel{d}{=}\eta_{1,k}^{(j)}+\sum_{i=1}^{\min(j,\,\widehat{\varkappa}_{1,k})}X_{k-i+1}^{(j-i+1)}$, откуда следует, что

$$(44)\qquad EX_k^{(j)}=E\eta_{4k}^{(j)}+E\Big\{\sum_{i=1}^{\min(j,\,\widehat{\varkappa}_{1,k})}X_{k-i+1}^{(j-i+1)}\Big\}\ j=1,2,\ldots,k.$$

Если $j\leqq k$, при помощи леммы 1, получим

$$(45)\qquad E\eta_{1,k}^{(j)}=\sum_{i=1}^{\infty}E[\eta_{1,k}^{(j)}/\varkappa_1=i]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=i\}=\sum_{i=j-1}^{\infty}E[\eta_{1,k}^{(j)}/\varkappa_1=i]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=i\}$$

$$=E[\widehat{\xi}_{j-1}/\varkappa_1=j-1]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=j-1\}+\sum_{i=j}^{\infty}E[\xi_i/\varkappa_1=i]\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=i\}=\lambda^{-1}\sum_{i=j}^{\infty}\Theta_i=\frac{1}{\lambda}\,\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq j\}.$$

$$(46)\qquad E\{\sum_{i=1}^{\min\{j,\,\widehat{\varkappa}_{1,k}\}}X_{k-i+1}^{(j-i+1)}\}=\sum_{s=0}^{k}E[\sum_{i=1}^{\min(j,\,s)}X_{k-i+1}^{(j-i+1)}/\widehat{\varkappa}_{1,k}=s]\,\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}=s\}$$

$$=\sum_{s=1}^{j}\sum_{i=1}^{s}E(X_{k-i+1}^{(j-i+1)})\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}=s\}+\sum_{s=j+1}^{k}\sum_{i=1}^{j}E(X_{k-i+1}^{(j-i+1)})\,\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}=s\}$$

$$=\sum_{i=1}^{j}E(X_{k-i+1}^{(j-i+1)})\,\mathsf{P}\{i\leqq\widehat{\varkappa}_{1,k}\leqq j\}+\sum_{i=1}^{j}E(X_{k-i+1}^{(j-i+1)})\,\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}\geqq j+1\}$$

$$=\sum_{i=1}^{j}E(X_{k-i+1}^{(j-i+1)})\,\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}\geqq i\}=\sum_{i=1}^{j}E(X_{k-i+1}^{(j-i+1)})\,\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq i\}.$$

При помощи (44), (45) и (46) имеем

$$(47)\qquad EX_k^{(j)}=\lambda^{-1}\,\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq j\}+\sum_{i=1}^{j}E(X_{k-i+1}^{(j-i+1)})\,\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq i\},\quad j=1,2,\ldots,k.$$

Из (47) для $j=1$ получаем

$$(48)\qquad EX_k^{(1)}=(1-\Theta_0)/(\lambda\Theta_0)\ \text{для}\ k\geqq 1.$$

Из (48) видно, что $EX_k^{(1)}$ не зависит от k. Аналогично можно показать, что $E\,X_k^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,k$ не зависят от k.

Вспомнив, что $EX_k^{(j)}=\alpha_j$ для $j=1,2,\ldots,k$, то (47) можно записать следующим образом: $\alpha_j=\lambda^{-1}\,\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq j\}+\sum_{i=1}^{j}\alpha_{j-i+1}\,\mathsf{P}\{\varkappa_1\geqq i\}$. Отсюда следует, что

$$(49)\qquad \alpha(z)=(1-g[\lambda(1-z)])/\lambda\{g[\lambda(1-z)]-z\}.$$

Из (35), (49) и факта, что свободный период распределен по показательному закону параметром λ, получим

$$(50)\qquad \alpha(z)=\lambda^{-1}s(z)-\lambda^{-1}zs(z)-\lambda^{-1}.\quad \alpha^0=\lambda^{-1}.$$

Из (50) следует (29).

Нетрудно показать, что $EX_{\infty}^{(j)}=\alpha_j$, $j=0,\ldots$ Заметим, что $EX_{\infty}^{(j)}$ существуют всегда, когда существует $E\eta_1$ и $\rho\leqq 1$, несмотря на то, что если $\rho\geqq 1$, математическое ожидание периода занятости не существует.

Для нахождения $EX_k^{(k+1)}$ воспользуемся соотношением

$$(51)\qquad X_k^{(k+1)}\overset{d}{=}\eta_{1,k}^{(k+1)}+\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}}X_{k-i+1}^{(k-i+2)}.$$

Из (51) следует

$$(52)\qquad \beta_k=E\eta_{1,k}^{(k+1)}+E\{\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}}X_{k-i+1}^{(k-i+2)}\}.$$

При помощи леммы 1 получим

(53) $$E\eta_{1,k}^{(k+1)}=\sum_{s=0}^{\infty}E(\eta_{1,k}^{(k+1)}/\varkappa_1=s)\,\mathsf{P}\{\varkappa_1=s\}=\sum_{s=k}^{\infty}E[\xi_{k+1}+\xi_{k+2}+\cdots+\xi_s+\widehat{\ }\xi_s/\varkappa^1=s]\mathsf{P}\{\varkappa_1=s\}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{s=k}^{\infty}(s-k-1)\Theta_{s+1}.$$

(54) $$E\Big(\sum_{i=1}^{\widehat{\varkappa}_{1,k}}X_{k-i+1)}^{(k-i+2)}\Big)=\sum_{i=1}^{k}E[X_{k-i+1}^{(k-i+2)}]\,\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}\geqq i\}.$$

Из (52), (53) и (54) следует $\beta_k=\lambda^{-1}\sum_{s=k}^{\infty}(s-k+1)\Theta_{s+1}+\sum_{i=1}^{k}\beta_{k-i+1}\,\mathsf{P}\{\widehat{\varkappa}_{1,k}\geqq i\}$. Отсюда имеем

(55) $$\beta(z)=\lambda^{-1}(\rho-1)S(z)+(\lambda(1-z))^{-1}.$$

Из (55) получается (30).

Очевидно, что $\zeta_k=X_k^{(1)}+X_k^{(2)}+\cdots+X_k^{(k+1)}$, откуда следует, что

(56) $$r_k=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\beta_k.$$

Из (28), (29) и (56) могли бы другим способом получить (30).

Из (30) следует интуитивно очевидный факт, что $s_k<(1-\rho)^{-1}=s_\infty$, если $\rho<1$, $k=0,1,\ldots$ Очевидно $\widetilde{W}_k=\Sigma_{i=1}^{k+1}(i-1)X_k^{(i)}$. Из последнего равенства следует

(57) $$\omega_k=\sum_{i=1}^{k}(i-1)\,\alpha_j+k\beta_k.$$

Из (29) (30) и (57) следует (31).

В некоторых частных случаях получаются новые выражения для математических ожиданий, фигурирующих в утверждении 2.

Пример 1. Для системы $M/M/1/k$ верны формулы

$$s_k=\begin{cases}k+1 & \text{для}\quad \rho=1,\quad k=0,1,\ldots\\ (1-\rho^{k+1})/(1-\rho) & \text{для}\quad \rho\neq1,\quad k=0,1,\ldots\end{cases}$$

$$l_k=\rho^{k+1}\quad \text{для}\quad k=0,1,\ldots$$

$$r_k=\begin{cases}(k+1)/\nu & \text{для}\quad \rho=1,\quad k=0,1,\ldots\\ 1-\rho^{k+1}/\nu(1-\rho) & \text{для}\quad \rho\neq1,\quad k=0,1,\ldots\end{cases}$$

$$\alpha_j=\rho^j/\lambda\quad \text{для}\quad j=0,1,\ldots\quad \beta_j=\rho^{j+1}/\lambda\quad \text{для}\quad j=0,1,\ldots.$$

$$\omega_k=\begin{cases}k(k+1)/2\lambda & \text{для}\quad \rho=1,\quad k=0,1,\ldots\\ \rho^2[1-(k+1)\rho^k+k\rho^{k+1}]/\lambda(1-\rho)^2 & \text{для}\quad \rho\neq1,\quad k=0,1,\ldots\end{cases}$$

Пример 2: Для системы типа $M/GI/1/k$, для которой $\lambda=1$, $\overline{G}(y)=e^{-2y}(1-2y)$ имеем

$$r_n=s_n=\frac{4}{3}n+\frac{10}{9}-\frac{1}{9}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n;\quad \alpha_j=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{4}\Big)^j;\quad l_i=\beta_i=1;$$

$$\omega_k=\frac{2}{3}k^2+\frac{1}{3}k+\frac{1}{27}-\frac{1}{9}k\Big(\frac{1}{4}\Big)^k-\frac{1}{27}\Big(\frac{1}{4}\Big)^k.$$

Математические ожидания, о которых шла речь, имеют как теоретическое (ниже будет показано, что при помощи этих математических ожиданий подсчитываются стационарные вероятности состояния системы), так и практическое значение. Например, в [5] они появляются в формуле стационарного дохода, при помощи которого подсчитывается оптимальное число мест ожиданий для системы $M/GI/1/k$. К сожалению, при произвольном распределении $G(x)$ эти формулы очень сложны. В этом случае разумно применять численные методы и персональный компьютер.

Утверждение 3: *Стационарные вероятности для системы $M/GI/1/k$ даются формулами:*

$$(58)\qquad \begin{aligned} &P_k^{(0)}=1/(1+\rho s_k);\\ &P_k^{(j)}=(s_j-s_{i-1})/(1-\rho s_k),\quad j=1,\,2,\dots,\,k;\\ &P_k^{(k+1)}=(1+(\rho-1)s_k)/(1+s_k).\end{aligned}$$

Для системы $M/GI/1/\infty$, если $\rho<1$ верны формулы

$$(59)\qquad P_\infty^{(0)}=1-\rho;\quad P_\infty^{(j)}=(1-\rho)\,(s_j-s_{j-1}),\quad j=1,\,2,\dots;$$

Доказательство: Так как процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим, а период регенерации (цикл) очевидно имеет нерешетчетое распределение, то (см. [1]) стационарные вероятности даются формулами:

а) в случае системы $M/GI/1/k$

$$(60)\qquad \begin{aligned} &P_k^{(j)}=\widehat{q}^{(j)}/(E\zeta_k+\lambda^{-1}),\quad j=0,1,\dots,\,k,\\ &P_k^{k+1}=\upsilon_k/(E\zeta_k+\lambda^{-1});\end{aligned}$$

б) для системы $M/GI/1/\infty$

$$(61)\qquad P_\infty^{(j)}=\widehat{q}^{(j)}/(E\zeta_\infty+\lambda^{-1}),\quad i=0,\,1,\dots,\,k.$$

Применив идею, о которой шла речь, и теоремы сложения и умножения вероятностей, получим, что для $j=1,\,2,\dots,\,k$

$$(62)\qquad q_k^{(j)}(t)=\bar G(t)\frac{(\lambda t)^{s-1}}{(j-1)!}\,e^{-\lambda t}+\sum_{s=1}^{j}\int_0^t q_{k-s+1}^{(j-s+1)}(t-y)\frac{(\lambda y)^s}{s!}\,e^{-\lambda y}\,dG(y)$$

$$+\sum_{s=1}^{j}\sum_{l=2}^{s}\int_0^t\Big[\int_0^{t-y}q_{k-s+l}^{(j-s+l)}(t-y-z)\,dH_{k-s+1}*H_{k-s+2}*\dots*H_{k-s+l-1}(z)\Big]\frac{(\lambda y)^s}{s!}\,e^{-\lambda y}dG(y)$$

$$+\sum_{s=j+1}^{k-1}\sum_{l=s-j+1}^{s}\int_0^t\Big[\int_0^{t-y}q_{k-s+l}^{(j-s+l)}(t-y-z)dH_{k-s+1}*H_{k-s+2}*\dots*H_{k-s+l-1}(z)\Big]\frac{(\lambda y)^s}{s!}\,e^{-\lambda y}\,dG(v)$$

$$+\sum_{s=k}^{\infty}\sum_{l=k-j+1}^{k}\int_0^t\Big[\int_0^{t-y}q_l^{(j-k+l)}(t-y-z)dH_1*\dots*H_{l-1}(z)\Big]\frac{(\lambda\,y)^s}{s!}\,e^{-\lambda y}\,dG(y).$$

Используя свойств интеграла Римана—Стильтьесса, можно доказать следующую лемму:

Лемма 2. *Если $A_s(z)$, $s=1,\,2,\dots,$ n-монотонно возрастающие и ограниченные функции, то*

$$(63)\qquad \int_5^\infty dA_1*\dots*A_n(z)=\int_0^\infty dA_1(z)\int_0^\infty dA_2(z)\dots\int_0^\infty dA_n(z)$$

Применяя (63) и факт, что $H_k(z)$ — собственно распределенные ($H_k(+\infty)=1$), интегрируя (62) по t от 0 до ∞, получим, что для $j=1, 2, \ldots, k$

$$\widehat{q_k^{(j)}} = \int_0^{\infty} \overline{G}(t) \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda y} dt + \sum_{s=1}^{j} \sum_{l=1}^{k} q_{k-s+1}^{(j-s+l)} \Theta_s + \sum_{s=j+1}^{k-1} \sum_{l=s-j+1}^{s} q_{k-s+l}^{(j-s+l)} \Theta_s + \sum_{s=k}^{\infty} \sum_{l=k-j+1}^{k} q_l^{(j-k+l)} \Theta_s. \tag{64}$$

Из (64) точно также как доказали, что $EX_k^{(j)}$ не зависит от k, доказывается, что $\widehat{q}_k^{(j)}$, $j=1, 2, \ldots, k$, не зависят от k, поэтому будем опускать нижний индекс.

После замены $u=j-s+l$ из (64) получается

$$\widehat{q}^{(j)} = \int_0^{\infty} \overline{G}(t) \frac{(\lambda t)^{s-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t} dt + \sum_{s=1}^{j} \sum_{u=j-s+1}^{j} \widehat{q}^{(n)} \Theta_s + \sum_{s=j+1}^{k-1} \sum_{u=1}^{j} \widehat{q}^{(u)} \Theta_s + \sum_{s=k}^{\infty} \Theta_s \sum_{u=1}^{j} \widehat{q}^{(u)}$$

$$= \int_0^{\infty} \overline{G}(t) \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t} dt + \sum_{u=1}^{j} \widehat{q}^{(u)} \sum_{s=j-u+1}^{j} \Theta_s + \sum_{u=1}^{j} \widehat{q}^{(u)} \sum_{s=j+1}^{k-1} \Theta_s + \sum_{u=1}^{j} \widehat{q}^{(u)} \sum_{s=k}^{\infty} \Theta_s$$

$$= \int_0^{\infty} \widehat{G}(t) \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t} dt + \sum_{u=1}^{j} \widehat{q}^{(u)} \sum_{s=j-u+1}^{\infty} \Theta_s.$$

Из последнего следует $\widehat{q}^{(j)} = \int_0^{\infty} \overline{G}(t) \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\gamma t} dt + \sum_{k=1}^{j} \widehat{q}^{(u)} \mathsf{P}\{\varkappa_1 \geq j-u+1\}$.

$$Q(z) = (1-g[\lambda(1-z)])/\lambda\{g[\lambda(1-z)]-z\}. \tag{65}$$

Из (29), (49) и (65) следует

$$\widehat{q}_k^{(j)} = \alpha_j = \lambda^{-1}(s_j - s_{j-1}), \quad j=1, 2, \ldots, k. \tag{66}$$

Аналогично доказывается, что

$$q_k^{(k+1)} = \beta_k = \lambda^{-1}[1+(\rho-1)s_k]. \tag{67}$$

При помощи (60), (61), (66), (67) и факта, что сумма стационарных вероятно стей единица, получаются (60) и (61).

Из утверждения 3 получается следующее следствие:

Следствие 1: *Средняя стационарная очередь для системы $M/GI/1/k$ дается формулой*

$$\sum_{s=1}^{k+1} jP_k^{(j)} = k - (1+\rho s_k)^{-1} \sum_{i=1}^{k} s_i.$$

Для системы $M/GI/1/\infty$, $\rho<1$, эта характеристика дается формулой

$$\sum_{j=1}^{\infty} jP_{\infty}^{(j)} = \lambda^2 E\eta_1^2/2(1-\rho).$$

Формулы (58), (59) и (67) удобны для численного подсчета стационарных вероятностей и средней стационарной очереди.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Обретенов. Теория на вероятностите, С., 1974.
2. Б. Гнеденко, И. Коваленко. Введение в теорию массового обслуживания. М., 1966.
3. Д. Кенинг, Д. Штоян. Методы теории массового обслуживания, Радио и связь, М., 1981.
4. Л. Клейнрок. Теория массового обслуживания, Машиностроение, М., 1979.
5. Х. Павлов, Е. Чакъров. Оптимален брой на местата за чакане за система $M/GI/1/k$. Материали на 13-та национална младежка школа „Приложение на математиката в техниката", Варна, 1987.

Высший педагогический институт
Шумен 9704, Болгария

Поступила 13. 9. 1987
В переработанном виде 25. 1. 1988