# Serdica

## Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

## Българско математическо списание

# СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ $m$-ПРЕБЫВАНИЯ ЗА ВРЕМЯ ОДНОГО ЦИКЛА В СИСТЕМЕ $M/G/n/0$

ХРИСТО ВАСИЛЕВ ПАВЛОВ

В работе рассматривается система массового обслуживания с потерями. Входящий поток является простейшим, а времена обслуживания одинаково распределены, независимы и не зависят от входящего потока. Найдены простые формулы для $m$-пребывания за время одного цикла. Дано еще одно доказательство формул Эрланга для рассматриваемой системы. Найдены необходимые и достаточные условия для показательности распределения времени обслуживания непотерянного требования.

В работе предполагается, что $n>2$. Случай $n=2$ рассмотрен в [3]. Все доказательства будем проводить, когда множество возможных значений времени обслуживания одного непотерянного требования является бесконечным интервалом $(0, \infty)$. Все результаты верны и в случае конечного интервала $(a, T)$, где $a>0$, $T<\infty$, и доказательства в этом случае проходят по той же схеме.

**1. Средние значения для $m$-пребывания за время одного цикла.** Введем вспомогательный простейший поток „катастроф" с параметром $s$. Как известно [1], трансформацию Лапласа—Стильтеса функции распределения неотрицательной случайной величины можно интерпретировать (при $s>0$) как вероятность.

Пусть $n$ — число каналов в системе; $t_i$, $i=0, 1, 2, \ldots,$— моменты прихода $i$-той заявки; $P\{\eta_i<x\}=G(x)$ для $i=1, 2, \ldots,$ где $\eta_i$, $i=1, 2, \ldots,$— время обслуживания $i$-той непотерянной заявки;

$$1/\nu=\int_0^\infty \bar{G}(x)\,dx, \quad \nu>0, \quad \bar{G}(x)=1-G(x);$$

$$P\{t_{i+1}-t_i<x\}=\Lambda(x)=1-e^{-\lambda x}, \quad i=0, 1, \ldots;$$

$\xi(t)$ — число занятых приборов в момент $t$;

$$e_j(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } \xi(t)=j \\ 0, & \text{если } \xi(t)\neq j \end{cases} \quad t=0, 1, \ldots, ;$$

$\tau(t)$ — ближайший после $t$ момент прихода требования в свободную систему; $\tau_i$ — $i$-тый момент прихода требования в свободную систему; $[\tau_i, \tau_{i+1})$ — $i$-тый цикл, $i=0, 1, \ldots;$ $\chi_m^{(i)}=\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e_m(t)dt$ – длительность $m$-пребывания во время $i$-того цикла, $i=0,1, \ldots, m=0,1, \ldots, n$;

$$A(t;\, z_1, z_2, \ldots, z_k)=\left\{\begin{array}{l}\xi(t+0)=k,\ i\text{-тая заявка, находящаяся в системе в мо-}\\ \text{мент } t, \text{ обслуживалась время } z_i \text{ для всех } i=1, 2, \ldots, k\end{array}\right\};$$

$a^{(m)}(s; z_1, z_2, \ldots, z_k)=P\{$во время $\int_t^{\tau(t)} e_m(x)dx$ не было „катастроф"$/A(t; z_1, \ldots, z_k)\}$, $m=0,1, \ldots, n$, $k=1,2, \ldots, n$; $M_m(z_1, z_2, \ldots, z_k)=\dfrac{\partial}{\partial s}a^{(i)}(s;\, z_1, \ldots, z_k)\Big|_{s=0}$, $m=1,2, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Применяя одно из свойств трансформации Лапласа — Стилтьеса, нетрудно заметить, что $M_m(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n, m=1, 2, \ldots, n)$ есть среднее значение времени $m$-пребывания от момента $t$ до ближайшего следующего момента полного освобождения системы при условии, что в момент $t+0$ в системе находилось ровно $k$ требований и к этому моменту они уже обслуживались соответственно $z_1, z_2, \ldots, z_k$ единицы времени.

Нужно найти $M_m(0)$ $(m=0, 1, \ldots, n)$ — средние значения для $m$-пребывания за время одного цикла.

Из свойств показательного распределения следует, что свободный период (0-пребывание за время одного цикла) имеет показательное распределение с параметром $\lambda$, откуда следует, что

$$M_0(0)=1/\lambda. \tag{1.1}$$

Для нахождения $M_m(0)$ рассмотрим три случая: $m=1$, $1<m<n$, $m=n$. При этом воспользуемся леммой 1.1, доказательство которой можно найти в [3].

Лемма 1.1. *Если $G(x)$ функция распределения неотрицательной случайной величины и выписанные ниже интегралы существуют, то*

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \Big[\int_0^\infty a(x)\,dG(x+x_1)\Big]dx_1 = \int_0^\infty a(x)\bar G(x)\,dx,\\ \int_0^\infty \Big[\int_0^\infty a(x+x_1)\,dG(x)\Big]dx_1 = \int_0^\infty a(x)\bar G(x)\,dx.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Для системы $M/G/n/0$ математическое ожидание $m$-пребывания за время одного цикла дается формулой $M_m(0)=\lambda/m!\,\nu^m$, $m=0, 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Случай $m=1$. Применив формулы сложения и умножения вероятностей, получим

$$a^{(1)}(s;\, x_1) = \int_0^\infty e^{-sx}e^{-\lambda x}\, d\frac{G(x+x_1)}{\bar G(x_1)} + \int_0^\infty a^{(1)}(s;\, x_1+x,\, 0)\frac{\bar G(x+x_1)}{\bar G(x_1)}\,d\Lambda(x),$$

$$a^{(1)}(s;\, x_1, \ldots, x_k) = \int_0^\infty a^{(1)}(s;\, x+x_1, \ldots, x+x_k,\, 0)\prod_{i=1}^k \frac{\bar G(x+x_i)}{\bar G(x_i)}\,d\Lambda(x) \tag{1.3}$$

$$+\sum_{i=1}^k\int_0^\infty a^{(1)}(s;\, x+x_1 \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+0} \ldots,\, x+x_k)\prod_{\substack{j\neq k\\ 1\leq j\leq k}}\frac{\bar G(x+x_j)}{\bar G(x_j)}\,d\frac{G(x+x_i)}{\bar G(x_i)},$$

$$k=2, 3, \ldots, n-1.$$

Если помножим (1.3) на $\Pi_{j=1}^k \bar G(x_j)$, продифференцируем по $s$, положив $\alpha^{(1)}(x_1, \ldots, x_k) = M_1(x_1, \ldots, x_k)\,\Pi_{j=1}^k \bar G(x_j)$, $k=1, 2, \ldots, n$, получим

$$\alpha^{(1)}(x_1)=\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x+x_1,\, 0)\,d\Lambda(x) + \int_0^\infty x\bar G(x+x_1)\,d\Lambda(x) + \int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dG(x+x_1),$$

$$\alpha^{(1)}(x_1,\, x_2, \ldots, x_k)=\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x+x_1, \ldots,\, x+x_k,\, 0)\,d\Lambda(x) \tag{1.4}$$

$$+\sum_{i=1}^k\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x+x_1, \ldots,\, x+x_{i-1},\, x+x_{i+1}, \ldots, x+x_k)e^{-\lambda x}dG(x+x_i),\ k=2, 3, \ldots, n-1.$$

Используя свойства интеграла Стильтеса, можно показать, что

$$(1.5)\qquad \int_0^\infty x\bar{G}(x+x_1)d\Lambda(x)+\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dG(x+x_1)=\int_0^\infty \bar{G}(x+x_1)e^{-\lambda x}dx.$$

Из первого равенства (1.4) при $x_1=0$, с помощью (1.5) получим

$$(1.6)\qquad M_1(0)=\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x)d\Lambda(x)+\int_0^\infty \bar{G}(x)e^{-\lambda x}dx.$$

Проинтегрировав первое уравнение (1,4) от 0 до $\infty$ по $x_1$, при помощи (1.5) и леммы 1.2, выводим

$$(1.7)\qquad \int_0^\infty \alpha^{(1)}(x_1)dx_1=\int_0^\infty \alpha^{(1)}(z_1,\ 0)\Lambda(z_1)dz_1+\lambda^{-1}\int_0^\infty \bar{G}(x)\Lambda(x)dx.$$

Имея виду (1.6) и (1.7), получаем

$$(1.8)\qquad M_1(0)=-\lambda\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x_1)dx_1+\lambda\int_0^\infty \alpha^{(1)}(z_1,\ 0)dz_1+1/\nu.$$

Лемма 1.2. *Для* $k=1,\ 2,\dots,\ n-1$

$$\int_0^\infty\dots\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x_1,\ x_2,\dots,\ x_k,\ 0)dx_1\dots dx_k=\int_0^\infty\dots\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x_1,\ x_2,\dots,\ x_k)dx_1\dots dx_k.$$

Доказательство. Докажем сначала лемму для $k=n-1$. Применяя вышеуказанный прием, получаем

$$(1.9)\qquad \begin{aligned}\alpha^{(1)}(x_1,\ x_2,\dots,\ x_{n-1},\ 0)&=\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x+x_1,\dots,\ x+x_{n-1})dG(x)\\ &+\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x+x_1,\ \dots,\ x+x_{i-1},\ x+x_{i+1},\dots,\ x+x_{n-1},\ x)dG(x+x_1).\end{aligned}$$

Проинтегрируем (1.9) по $x_1,\ x_2,\dots,\ x_{n-1}$ от 0 до $\infty$ и найдем сначала

$$\int_0^\infty\dots\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x+x_1,\dots,\ x+x_{n-1})dG(x)\Big]dx_1\dots,dx_{n-1}.$$

Сделав замену порядка интегрирования, а потом положив $x+x_i=z_i$, $i=1,\ 2\ \dots,\ n-1$, получим

$$(1.10)\qquad \begin{aligned}&\int_0^\infty\dots\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty \alpha^{(1)}(x+x_1,\dots,\ x+x_{n-1})dG(x)\Big]dx_1\dots dx_{n-1}\\ &=\int_0^\infty\Big[\int_x^\infty\dots\int_x^\infty \alpha^{(1)}(z_1,\dots,\ z_{n-1})dz_1\dots dz_{n-1}\Big]dG(x).\end{aligned}$$

Применив аддитивное свойство интеграла, получим, что правая часть (1.10) равняется

$$(1.11)\qquad \sum_{i_1 i_2,\dots,i_{n-1}}\ \int\dots\int_{0<z_{i_1}<\dots<z_{i_{n-1}}}\Big[\int_0^{i_1} \alpha^{(1)}(z_1,\ \dots,\ z_{n-1})dG(x)\Big])dz_1\dots dz_{n-1}$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} \iint\limits_{0<z_{i_1}<\ldots<z_{i_{n-1}}} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_1, \ldots, z_{n-1}) G(z_1) dz_1 \ldots dz_{n-1},$$

где сумма берется по всем перестановкам чисел 1, 2, ..., $n-1$.

Нетрудно сообразить, что правая часть (1.11) равна

$$(1.12) \quad \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} \iint\limits_{0<z_{i_1}<\ldots<z_{i_{n-1}}} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_{n-1}}) G(z_{i_1}) dz_1 \ldots dz_{n-1}$$

$$= (n-1)! \iint\limits_{0<z_1<\ldots<z_{n-1}} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) G(z_1) dz_1 \ldots dz_{n-1}.$$

Применив лемму 1.1, при помощи вышеуказанной техники получим

$$(1.13) \quad \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Big[ \int_0^\infty \alpha^{(1)}(x+x_1, \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+1} \ldots, x+x_{n-1}, x) dG(x+x_1)\Big] dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$= \int_\rho^\infty \Big[ \int_x^\infty \int_x^\infty \cdots \int_x^\infty \alpha^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, x) \overline{G}(x) dz_1 \ldots dz_{n-2}\Big] dx$$

$$= (n-2)! \iint\limits_{0<x<z_1<\ldots<z_{n-2}} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, x) \overline{G}(x) dx dz_1 \ldots dz_{n-2}.$$

Из (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) и (1.13) уже следует результат леммы для $k=n-1$.

Если в (1.3) проинтегрируем $k$-тое уравнение и $(k+1)$-ое для $x_{k+1}=0$ по $x_1, x_2, \ldots, x_k$, после аналогичных преобразований получим

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \alpha^{(1)}(x_1, \ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_k = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \alpha^{(1)}(z_1, \ldots, z_k, 0) dz_1, \ldots, dz_k$$

$$(1.14) \quad -k! \iint\limits_{0<z_1<\ldots<z_k} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_k, 0) e^{-\lambda z_1} dz_1 \ldots dz_k$$

$$+k! \iint\limits_{0<x<z_1<\ldots<z_{k-1}} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_1, \ldots, z_{k-1}) e^{-\lambda x} \overline{G}(x) dz_1 \ldots dz_{k-1}, \quad k=2, 3, \ldots, n-1,$$

$$(1.15) \quad \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \alpha^{(1)}(x_1, \ldots, x_k, 0) dx_1 \ldots dx_k$$

$$= k!\, \lambda \iint\limits_{0<x<z_1<\ldots<z_k} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_1, \ldots, z_k, x, 0) e^{-\lambda x} dx dz_k \ldots dz_1$$

$$-\lambda k! \iint\limits_{0<x<z_1<\ldots<z_k} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_1, \ldots, z_k) \overline{G}(x) e^{-\lambda x} dx dz_1 \ldots dz_k$$

$$+ \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \alpha^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_k) dz_1, \ldots, dz_k, \quad k=2, 3, \ldots, n-2.$$

Положив $k=n-1$ в (1.14), получаем

$$(1.16) \quad \iint\limits_{0<z_1<\ldots<z_{n-1}} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 0) e^{-\lambda z_1} dz_1 \ldots dz_{n-1}$$

$$= \iint\limits_{0<x<z_1<\ldots<z_{n-2}} \cdots \int \alpha^{(1)}(z_1, \ldots, z_{n-2}) e^{-\lambda x} \overline{G}(x) dx dz_1 \ldots dz_{n-2}.$$

Из (1.15) и (1.16) при $k=n-2$, получаем

$$(1.17)\quad \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(1)}(x_1, \ldots, x_{n-2}, 0)dx_1 \ldots dx_{n-2} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(1)}(z_1, \ldots, z_{n-2})dz_1 \ldots dz_{n-2}.$$

Применив это рассуждение еще $n-3$ раза, в итоге получим результат леммы 1.2.

Применив лемму 1.2 для $k=1$, при помощи (1.8) получим

$$(1.18)\qquad M_1(0)=1/\nu.$$

Пусть теперь $1<m<n$. Точно так же, как в случае $m=1$, можно показать, что справедливы равенства

$$\alpha^{(m)}(x_1)=\int_0^\infty \alpha^{(m)}(x+x_1, 0)d\Lambda(x),$$

$$(1.19)\qquad \alpha^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)=\int_0^\infty \alpha^{(m)}(x+x_1, x+x_2, \ldots, x+x_k, 0)d\Lambda(x)$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\alpha^{(m)}(x+x_1, \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+1}, \ldots, x+x_k)dG(x+x_i)$$

$$+\delta_{m,k}\{\int_0^\infty x\prod_{i=1}^{m}\bar{G}(x+x_i)d\Lambda(x)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^\infty e^{-\lambda x}x\prod_{\substack{i\neq j\\ 1\leq i\leq m}}\bar{G}(x+x_j)dG(x+x_j)\}$$

$$k=2, 3, \ldots, n-1, \quad \text{где } \delta_{m,k}=\begin{cases}1 & m=k\\ 0 & m\neq k\end{cases}$$

$$\alpha^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \alpha^{(m)}(x+x_1, \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+1}, \ldots, x+x_n)dG(x+x_i).$$

Если взять первое равенство (1.19) для $x_1=0$, получим

$$(1.20)\qquad M_m(0)=\lambda\int_0^\infty \alpha^{(m)}(x, 0)e^{-\lambda x}dx.$$

Проинтегрировав первое равенство (1.19) по $x_1$ от 0 до $\infty$, получим

$$(1.21)\qquad \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1)dx_1=\int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1, 0)\Lambda(z_1)dz_1.$$

Из (1.20) и (1.21) следует

$$(1.22)\qquad M_m(0)=\lambda\int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1, 0)dz_1-\lambda\int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1)dx_1.$$

Точно также как в доказательстве леммы 1, 2 получается, что

$$(1.23)\quad \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, \ldots, x_k, 0)\,dx_1 \ldots dx_k=\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, \ldots, x_k)dx_1 \ldots dx_k,$$

$k=m, m+1, \ldots, n.$

Проинтегрируем $m$-тое равенство (1.19) для $x_m=0$ соответственно по $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и по $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ от 0 до $\infty$. После некоторых несложных преобразований получим

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0)dx_1 \ldots dx_{m-1} \tag{1.24}$$
$$=(m-1)!\,\lambda \iint\limits_{0<x<z_1<\ldots<z_{m-1}} \ldots \int \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_{m-1}, x, 0)e^{-\lambda x}dx dz_1 \ldots dz_{m-1}$$
$$-\lambda(m-1)! \iint\limits_{0<x<z_1<\ldots<z_{m-1}} \ldots \int \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_{m-1})\bar{G}(x)e^{-\lambda x}dx dz_1 \ldots dz_{m-1}$$
$$+\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1, z_2, \ldots, z_{m-1})dz_1 \ldots dz_{m-1} + \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \theta(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0)dx_1 \ldots dx_{m-1},$$

где $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0)$ — выражение в фигурных скобках (1.19). Кроме того

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, \ldots, x_m)dx_1 \ldots dx_m = m! \iint\limits_{0<z_1<\ldots<z_m} \ldots \int \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_m, 0)\Lambda(z_1)dz_1 \ldots dz_m$$
$$+m! \iint\limits_{0<x<z_1<\ldots<z_{m-1}} \ldots \int \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_{m-1})e^{-\lambda x}\bar{G}(x)dx dz_1 \ldots dz_{m-1} \tag{1.25}$$
$$+\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \theta(x_1, \ldots, x_m)dx_1 \ldots dx_m.$$

При помощи (1.24) и (1.25) выводим

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0)dx_1 \ldots dx_{m-1} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_{m-1})dz_1 \ldots dz_{m-1} + \theta, \tag{1.26}$$

где $\theta = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \theta(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0)dx_1 \ldots dx_{m-1} + \lambda/m \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \theta(x_1, \ldots, x_m)dx_1 \ldots dx_m.$

Проинтегрируем $(m-1)$-ое уравнение (1.19) при $x_{m-1}=0$ по $x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}$ от 0 до $\infty$. После некоторых преобразований получаем

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, \ldots, x_{m-2}, 0)dx_1 \ldots dx_{m-2}$$
$$=\frac{\lambda}{m-1}\Big\{-\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, \ldots, x_{m-1})dx_1 \ldots dx_{m-1} \tag{1.27}$$
$$+\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_{m-1}, 0)dz_1 \ldots dz_{m-1}\Big\} + \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_{m-2})\, dz_1 \ldots dz_{m-2}.$$

Теперь при помощи (1.26) и (1.27) выводим

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, \ldots, x_{m-2}, 0)dx_1 \ldots dx_{m-2} \tag{1.28}$$
$$-\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_{m-2})dz_1 \ldots dz_{m-2} = \lambda(m-1)^{-1}\,\theta.$$

Точно также доказывается, что верно

$$(1.29)\quad \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, \ldots, x_k, 0)dx_1 \ldots dx_k - \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_k)dz_1 \ldots dz_k$$

$$= \lambda(k+1)^{-1}[-\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, \ldots, x_{k+1})dx_1 \ldots dx_{k+1}$$

$$+ \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1, \ldots, z_{k+1}, 0)dz_1 \ldots dz_{k+1}], \quad k=1, 2, \ldots, m-3.$$

Из (1.28) и (1.29) следует

$$(1.30)\quad \int_0^\infty \alpha^{(m)}(x_1, 0)dx_1 - \int_0^\infty \alpha^{(m)}(z_1)dz_1 = (\lambda^{m-2}/(m-1)!)\theta,$$

а из (1.23) и (1.30) следует

$$(1.31)\quad M_m(0) = (\lambda^{m-1}/(m-1)!)\theta, \quad m=2, 3, \ldots, n-1.$$

Применив использованную уже технику, найдем, что

$$(1.32)\quad \theta = 1/m\nu^m.$$

Из (1.31) и (1.32) следует

$$(1.33)\quad M_m(0) = \lambda^{m-1}/m!\,\nu^m, \quad m=2, 3, \ldots, n-1.$$

Остается только случай $m=n$. Также, как и выше, получаем

$$\alpha^{(n)}(x_1) = \int_0^\infty \alpha^{(n)}(x+x_1)d\Lambda(x)$$

$$\alpha^{(n)}(x_1, \ldots, x_k) = \int_0^\infty \alpha^{(n)}(x+x_1, \ldots, x+x_k, 0)d\Lambda(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int_0^\infty e^{-\lambda x}\alpha^{(n)}(x+x_1, \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+1}, \ldots, x+x_k)\,dG(x+x_k), k=2, 3, \ldots, n-1,$$

$$\alpha^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \alpha^{(n)}(x+x_1, \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+1}, \ldots, x+x_n)\,dG(x+x_i)$$

$$(1.34)\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty x \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} \overline{G}(x+x_j)dG(x_j+x),$$

откуда выводим

$$(1.35)\quad M_n(0) = \lambda \int_0^\infty \alpha^{(n)}(z_1, 0)dz_1 - \lambda \int_0^\infty \alpha^{(n)}(x_1)dx_1.$$

Если проинтегрировать последное равенство (1.34) при $x_n=0$ по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ от 0 до $\infty$, получим

$$(1.36)\quad \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)\,dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$-\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \alpha^{(n)}(x_1, \ldots, x_{n-1})dx_1, \ldots, dx_{n-1}+Q_1$$

где $Q=\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})dx_1, \ldots, dx_{n-1}$,

$$Q(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_0^\infty x \prod_{j=1}^{n-1} \bar{G}(x+x_j)\, dG(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\infty x\bar{G}(x) \prod_{\substack{j\neq i\\ 1\leq j\leq n-1}} \bar{G}(x+x_j)\, dG(x+x_i).$$

После некоторых преобразований находим

$$Q=1/n\nu^n. \tag{1.37}$$

Можно доказать, что (1.29) верно, если $m=n$, $k<n$ откуда, при помощи (1.37) получим

$$M_n(0)=\lambda^{n-1}/n!\,\nu^n. \tag{1.38}$$

Формулы (1.18), (1.33) и (1.38) запишем вместе

$$M_m(0)=\lambda^{m-1}/m!\,\nu^m, \quad m=0,\ 1, \ldots, n. \tag{1.39}$$

Этим завершено доказательство теоремы.

Следствие 1.1. *Среднее значение цикла равно* $\lambda^{-1}\sum_{m=0}^n \rho^m/m!$, *где* $\rho=\lambda/\nu$.

Доказательство. Так как $\tau_{i+1}-\tau_i=\sum_{m=0}^n \chi_m^{(i)}$, то, применив одно из свойств математического ожидания, получим

$$E(\tau_{i+1}-\tau_i)=\sum_{m=0}^n \frac{\lambda^{m-1}}{m!\,\nu^m}=\frac{1}{\lambda}\sum_{m=0}^n \frac{\rho^m}{m!}. \tag{1.40}$$

**2. Доказательство формул Эрланга для системы** $M/G/n/0$. Очевидно $\xi(t)$ (число занятых линий в момент $t$) — регенерирующий процесс, причем цикл — это время между двумя последовательными приходами заявок в свободную систему.

Обозначим через $q_i(t;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_k)$ вероятность того, что $\xi(t)=i$, к моменту $t$ цикл еще не кончился, при условии, что в начальный момент было $k$ требований, причем $j$-тое требование обслуживалось ровно $x_j$ единиц времени, $j=1,\ 2, \ldots, k$.

Очевидно, для рассматриваемой системы цикл имеет неарифметическое распределение, поэтому можно применить (см. [1]) формулы для стационарных вероятностей регенерирующего процесса.

$$P_i=\lim_{t\to\infty} P_i(t)=\int_0^\infty q_i(t;\ 0)dt/E\tau, \quad i=0,\ 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

где $P_i(t)=P\{\zeta(t)=i\}$, а $\tau$-продолжительность одного цикла.

Теорема 2.1. *Для стационарных вероятностей состояний в системе* $M/G/n/0$ *верны формулы Эрланга.*

Доказательство. Применив формулы сложения и умножения вероятностей, выводим следующую систему равенств

$$q_m(t;\ x_1)=\int_0^t q_m(t-x;\ x+x_1,\ 0)\frac{\bar{G}(x+x_1)}{\bar{G}(x_1)}\,d\Lambda(x)+\delta_{0,m}e^{-\lambda t}\left[1-\frac{\bar{G}(t+x_1)}{\bar{G}(x_1)}\right] \tag{2.2}$$

$$+\delta_{1,m}e^{-\lambda t}\,\frac{\bar{G}(x_1+t)}{\bar{G}(x_1)}, \quad q_m(t;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_0^t e^{-\lambda x} q_m(t-x; x+x_1, \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+1}, \ldots, x+x_k) \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq k}} \frac{\overline{G}(x+x_j)}{\overline{G}(x_j)} d\frac{G(x+x_i)}{\overline{G}(x_i)}$$

$$+ \int_0^t q_m(t-x; x+x_1, \ldots, x+x_k, 0) \prod_{i=1}^{k} \frac{\overline{G}(x+x_i)}{\overline{G}(x_i)} d\Lambda(x) + \delta_{m,k} e^{-\lambda t} \prod_{i=1}^{k} \frac{\overline{G}(t+x_i)}{\overline{G}(x_i)}$$

$$k = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$q_m(t; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t q_m(t-x; x+x_1, \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+1},$$

$$\ldots, x+x_k) \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{\overline{G}(x+x_j)}{\overline{G}(x_i)} d\frac{G(x+x_i)}{\overline{G}(x_i)} + \delta_{m,n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{G}(t+x_i)}{\overline{G}(x_i)}.$$

Если помножим $k$-тое равенство (2.2) на $\Pi_{j=1}^{k} \overline{G}(x_j)$, проинтегрируем по $t$ от 0 до $\infty$, положив $\int_0^\infty q_m(t; x_1, x_2, \ldots, x_k)dt \, \Pi_{j=1}^{k} \overline{G}(x_j) = \beta_m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, то получим

$$\beta_m(x_1) = \int_0^\infty \beta_m(x+x_1, 0)\, d\Lambda(x) + \delta_{0,m} \int_0^\infty [\overline{G}(x_1) - \overline{G}(t+x_1)] e^{-\lambda t} dt$$

$$+ \delta_{1,m} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \overline{G}(x_1+t) dt$$

$$\beta_m(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} \int_0^\infty \beta_m(x+x_1, \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+1}, \ldots, x+x_k) dG(x+x_i)$$

$$\text{(2.3)} \quad + \int_0^\infty \beta_m(x+x_1, \ldots, x+x_k, 0) d\Lambda(x) + \delta_{m,k} \int_0^\infty \prod_{i=1}^{m} \overline{G}(t+x_i) e^{-\lambda t} dt, \; k = 2, 3, \ldots, n-1$$

$$\beta_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty [e^{-\lambda x}(1-\delta_{m,n}) + \delta_{m,n}] \beta_m(x+x_1, \ldots, x+x_{i-1}, x+x_{i+1},$$

$$\ldots, x+x_n) dG(x+x_i) + \delta_{m,n} \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} \overline{C}(x_i+t) dt.$$

Из (2.3) мы должны определить $\beta_m(0) = \int_0^\infty q_m(t; 0)dt$. Точно также как в первом параграфе была выведена формула (1.39), получаем

$$\beta_m(0) = \frac{\lambda^{m-1}}{m!\, \nu^m} = \frac{\rho^m}{\lambda m!}, \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Из формул сложения вероятностей находим

$$P\{\tau \geq t\} = \sum_{m=0}^{n} q_m(t; 0). \tag{2.5}$$

Проинтегрировав (2.5) от 0 до $\infty$, получим

$$E\tau = \sum_{m=0}^{n} \int_0^\infty q_m(t; 0)dt = \sum_{m=0}^{n} \beta_m(0) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\lambda^{m-1}}{m!\, \nu^m} = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{n} \frac{\rho^m}{m!}. \tag{2.6}$$

Таким образом, двумя разными способами мы получили одну и ту же формулу для математического ожидания цикла.

Из (2.1), (2.4) и (2.6) следует, что

$$P_i = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\xi(t)=i\} = \rho^i/i!/\sum_{j=0}^{n}\rho_j/j!, \quad i=0,\ 1, \ldots,\ n. \tag{2.7}$$

Тем самым теорема доказана.

**3. Необходимые и достаточные условия для показательности распределения времени обслуживания.** Очень часто моделируют реальную систему массового обслуживания при помощи $M/M/n/0$. Из теоремы Григелиониса (см. [2]) видно, что на практике очень часто входящие потоки простейшие. Не так обстоит дело с обслуживанием. Поэтому полезно доказать некоторые критерии показательности обслуживания.

Теорема 3.1. *Для системы $M/G/n/0$ время обслуживания одного непотерянного требования является показательным тогда и только тогда, когда для любых неотрицательных $z_1, z_2, \ldots, z_k$*

$$M_m(z_1,\ z_2, \ldots,\ z_k) = C(k,\ m), \quad k=1,\ 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Необходимость. Если обслуживание одного непотерянного требования является показательным, то рассматриваемая система будет $M/M/n/0$, для которой (3.1) очевидно в силе.

Достаточность. Случай $m=1$. При помощи (1.5) первое равенство (1.4) записывается как

$$M_1(x_1)\bar{G}(x_1) = \int_0^\infty M_1(x+x_1, 0)\bar{G}(x+x_1)\, d\Lambda(x) + \int_0^\infty \bar{G}(x+x_1)e^{-\lambda x}dx. \tag{3.2}$$

Из леммы 1.2 следует, что

$$C(1,\ 1) = C(2,\ 1) = \ldots = C(n,\ 1). \tag{3.3}$$

Пусть верно (3.1). Тогда при помощи (3.3), (3.4) и (1.19) получаем

$$\bar{G}(x_1) = (\lambda+\nu)\int_0^\infty \bar{G}(x+x_1)e^{-\lambda x}dx. \tag{3.4}$$

Сделав замену $x+x_1=s$ из (3.4), получаем

$$e^{-\lambda x_1}\bar{G}(x_1) = (\lambda+\nu)\int_{x_1}^\infty \bar{G}(s)e^{-\lambda s}ds. \tag{3.5}$$

Положив $f(x_1)=\int_{x_1}^\infty \bar{G}(s)e^{-\lambda s}ds$, имеем

$$-f'(x_1) = (\lambda+\nu)f(x_1). \tag{3.6}$$

Общее решение этого дифференциального уравнения есть

$$f(x_1) = Ke^{-(\lambda+\gamma)x_1}, \quad \text{где } K \text{ — произвольная константа.} \tag{3.7}$$

Из (3.5) и (3.7) получаем

$$f(x_1) = f(0)e^{-(\lambda+\gamma)x_1} = \frac{1}{\lambda+\nu}e^{-(\lambda+\nu)x_1}, \tag{3.8}$$

$$f(x_1) = \frac{1}{\lambda+\nu}e^{-\lambda x_1}\bar{G}(x_1). \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) следует $\bar{G}(x_1)=e^{-\nu x_1}$, т. е., что обслуживание распределено по показательному закону.

Случай $m>1$. Если верно (3.1), то первое равенство (1.20) можем записать как

$$C(1,\ m)\bar{G}(x_1)=\lambda C(2,\ m)\int_0^\infty \bar{G}(x+x_1)e^{-\lambda x}dx. \tag{3.10}$$

При помощи (1.23) получаем $C(1,\ m)=(\lambda/\lambda+\nu)C(2,\ m)$, которое вместе с (3.10) дает (3.4), откуда следует, что обслуживание распределено по показательному закону.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Обретенов, Б. Димитров, Е. Даниелян. Масово обслужване и приоритетни системи. С., 1973.
2. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. Введение в теорию массового обслуживания. М., 1966.
3. Х. В. Павлов. Средние значения для $m$-пребывания за время одного цикла для системы $M/G/2/0$. *Годишник ВПИ Шумен*, 8Б, 1983, 5—18.

*Шумен,*
*Висш педагогически институт,*
*кат. „Алгебра и геометрия",*

*Поступила 10. 7. 1984*
*В переработанном виде 5. 5. 1988*