Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

EXISTENCE DE STRUCTURES QUOTIENT

DEKO V. DEKOV

Soit $\mathcal{N}_g$ la catégorie des homomorphismes entre classes polaires et soit $\mathcal{U}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$. Dans cet article sont données des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot} \in \mathcal{U}_0$ par une relation d'équivalence et respectivement d'une $(p_{\mathcal{U}}, J_{\mathcal{U}})$-structure quotient $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ de $H^{\cdot} \in \mathcal{U}_0$ par rapport à une $p_{\mathcal{U}}$-sous-structure $G^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$. La terminologie et les notations sont celles du livre [8]. Certains résultats de ce travail ont été résumés dans une Note à l'Academie Bulgarie des Sciences [6].

Soit $\mathcal{M}$ la catégorie des applications associée à un univers $\mathcal{M}_0$. Nous désignons par $\mathcal{N}_g$ la catégorie des homomorphismes entre classes polaires associée à $\mathcal{M}$ [2—6] et par $\mathcal{F}$ (resp. par $\mathcal{N}_p$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$, $\mathcal{N}^{\#}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$, $\mathcal{F}^{\#}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$ formée par les homomorphismes entre catégories (resp. entre précatégories, graphes multiplicaticatifs, quasi-graphes multiplicatifs, bases de catégories, quasi-catégories, catégories non-associatives, quasi-catégories non-associatives) [1—11].

Si $C^{\cdot}=(C, k, \beta, \alpha)$ est une catégorie, $C_0^{\cdot}$ désigne la classe des unités de $C^{\cdot}$. Si $e, e' \in [C^{\cdot}]_0$ et $f \in C$, parfois nous désignons, comme dans [2—6], $f \in e'.C^{\cdot}.e$ au lieu de $\alpha(f)=e$ et $\beta(f)=e'$. Si $\psi=(\overline{C}^{\cdot}, \psi, C^{\cdot}) \in \mathcal{N}_g$, la relation d'équivalence associée à ψ est notée r_ψ. Si C est une classe polaire et si r est une relation d'équivalence sur C, l'application $x \to x \bmod r$ de C sur la classe quotient C/r est notée $\tilde{r}$.

Si $C^{\cdot}$ est une classe polaire et si r est une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$, nous désignons par $C^{\cdot}/r$ la classe polaire quotient de $C^{\cdot}$ par rapport à r.

Soit $C^{\cdot}$ une classe polaire et soit r une relation d'équivalence sur C. Il existe une classe polaire quotient de $C^{\cdot}$ par r si, et seulement si, $(C^{\cdot}/r, \tilde{r}, C^{\cdot}) \in \mathcal{N}_g$.

Si φ est une $p_{\mathcal{N}_g}$-surjection, $p_{\mathcal{N}_g}(\varphi)$ est une surjection.

Soit $\psi=(\overline{C}^{\cdot}, \psi, C^{\cdot}) \in \mathcal{N}_g$. Alors $\overline{C}^{\cdot}$ est une classe polaire quotient de $C^{\cdot}$ si, et seulement si, $\psi(C)=\overline{C}$ et $(\psi * \psi)(C^{\cdot} * C^{\cdot}) = \overline{C}^{\cdot} * \overline{C}^{\cdot}$.

Dans ce travail nous désignons par $\mathcal{U}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$ et par $p_{\mathcal{U}}$ le foncteur canonique de $\mathcal{U}$ vers $\mathcal{M}$.

1. Soient $C^{\cdot}$ une classe polaire et r une relation d'équivalence sur C. Nous dirons que r est une relation d'équivalence $\mathcal{U}$-admissible sur $C^{\cdot}$ si r est bicompatible sur $C^{\cdot}$ et si $C^{\cdot}/r \in \mathcal{U}_0$.

Soient $C^{\cdot}$ une classe polaire et r une relation d'équivalence sur C. La relation r est $\mathcal{N}_g$-admissible sur $C^{\cdot}$ si, et seulement si, r est bicompatible sur $C^{\cdot}$.

Soit $C^{\cdot}$ un graphe multiplicatif et soit $\hat{r}$ la relation définie dans le théorème 10, [7]. Si $\hat{r}$ est $\mathcal{N}^{\#}$-admissible sur $C^{\cdot}$, alors $C^{\cdot}/\hat{r}$ est une $(\mathcal{N}^{\#}, \mathcal{N}')$-projection de $C^{\cdot}$.

Soit (N, ν) un foncteur $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projection naturalisé et soit r la relation d'équivalence sur C associée à l'application $p_{\mathscr{N}_p}(\nu(C^{\cdot}))$ où $C^{\cdot} \in (\mathscr{N}_p)_0$. Alors r est $\mathscr{F}$-admissible sur $C^{\cdot}$ si, et seulement si, $\nu(C^{\cdot})$ est un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur strict au sens de [7].

Soit $C^{\cdot} \in \mathscr{U}_0$ et soit r une relation d'équivalence sur C.

Définition. *On dira que $\bar{C}^{\cdot}$ est une $p_{\mathscr{U}}$-structure quotient strict de $C^{\cdot}$ (resp. de $C^{\cdot}$ par r) si $\bar{C}^{\cdot}$ est une $p_{\mathscr{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ (resp. de $C^{\cdot}$ par r) et une classe polaire quotient de $C^{\cdot}$.*

Exemple: Une $p_{\mathscr{F}}$-structure quotient strict de $C^{\cdot} \in \mathscr{F}_0$ par r est une catégorie quotient strict de $C^{\cdot}$ par raport à r au sens de [8].

Soient $C^{\cdot} \in \mathscr{U}_0$ et r une relation d'équivalence sur C.

Théorème 1. *Il existe une $p_{\mathscr{U}}$-structure quotient strict de $C^{\cdot}$ par rapport à r si, et seulement si, r est $\mathscr{U}$-admissible sur $C^{\cdot}$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une $p_{\mathscr{U}}$-structure quotient strict $\bar{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ par r. Puisque $\bar{C}^{\cdot}$ est une $p_{\mathscr{N}_g}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ par r, r est une relation d'équivalence bicompatible sur $\bar{C}^{\cdot}$ et $\bar{C}^{\cdot} = C^{\cdot}/r$. De plus, puisque $\bar{C}^{\cdot}$ est une $p_{\mathscr{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ par r, $\bar{C}^{\cdot} \in \mathscr{U}_0$. Ceci montre que r est admissible sur $C^{\cdot}$.

Inversement, supposons que r est une relation d'équivalence $\mathscr{U}$-admissible sur $C^{\cdot}$. Alors $C^{\cdot}/r$ est une $p_{\mathscr{N}_g}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ par rapport à r et puisque $\mathscr{U}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_g$, $C^{\cdot}/r$ est une $p_{\mathscr{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ par r. Ceci montre que $C^{\cdot}/r$ est une $p_{\mathscr{U}}$-structure quotient strict de $C^{\cdot}$ par r.

2. Nous désignons par $\mathscr{U}_N$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_g$ telle que $\mathscr{U}_N$ est à $\mathscr{U}$-projections et si $\mathscr{V}$ est une autre sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_g$ à $\mathscr{U}$-projections, alors $\mathscr{V}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}_N$.

Montrons que $\mathscr{U}_{NN} = \mathscr{U}_N$. En effet, $\mathscr{U}_N \subset \mathscr{U}_{NN}$. Supposons $C^{\cdot} \in (\mathscr{U}_{NN})_0$. Soit j un $(\mathscr{U}_N, \mathscr{U}_{NN})$-projecteur de source $C^{\cdot}$. Puisque $\beta(j) \in (\mathscr{U}_N)_0$, il existe un $(\mathscr{U}, \mathscr{U}_N)$-projecteur j' de source $\beta(j)$. Posons $\bar{j} = j'.j$. Alors $\bar{j}$ est un $(\mathscr{U}, \mathscr{U}_{NN})$-projecteur de source $C^{\cdot}$ et par conséquent $C^{\cdot} \in (\mathscr{U}_N)_0$, d'où $\mathscr{U}_{NN} \subset \mathscr{U}_N$. Ceci montre que $\mathscr{U}_{NN} = \mathscr{U}_N$.

Remarque 1. Dans le cas général on a $\mathscr{U}_N \neq \mathscr{N}_g$.

Exemple 1. Soit (N, ν) un foncteur $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projection naturalisé [7]. Soit $\mathscr{N}_s$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_p$ ayant pour unités les précatégories $C^{\cdot}$ telles que $\nu(C^{\cdot})$ soit un $(\mathscr{F}, \mathscr{N}_p)$-projecteur strict ([7]). Soit $[G] = (G, \beta, \alpha)$ le graphe orienté ayant 4 sommets distincts e_i, $i \leq 4$ et 3 flèches f_i, $i \leq 3$ telles que l'on ait:

$$\alpha(f_1) = e_1, \quad \alpha(f_2) = \beta(f_1) = e_2, \quad \alpha(f_3) = \beta(f_2) = e_3, \quad \beta(f_3) = e_4.$$

Soit $L_{\mathscr{N}_p}[G]^{\cdot}$ la précatégorie libre des chemins de $[G]$, ayant 8 unités distinctes e_i, $i \leq 8$ et 5 autres homomorphismes f_i, $i \leq 3$ $\overline{(f_2, f_1)}$ et $\overline{(f_3, f_2)}$ tels que l'on ait:

$$\alpha(f_1) = e_1, \quad \alpha(f_2) = \beta(f_1) = e_2, \quad \alpha(f_3) = \beta(f_2) = e_3, \quad \beta(f_3) = e_4,$$

$$\alpha(\overline{(f_2, f_1)}) = e_5, \quad \beta(\overline{(f_2, f_1)}) = e_6, \quad \alpha(\overline{(f_3, f_2)}) = e_7, \quad \beta(\overline{(f_3, f_2)}) = e_8.$$

Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droite et à gauche étant:

$$f_2 . f_1 = \overline{(f_2, f_1)} \quad \text{et} \quad f_3 . f_2 = \overline{(f_3, f_2)}.$$

Soit $L_{\mathcal{N}_r}[G]^{\cdot}$ la précatégorie régulière libre des chemins de $[G]$ ([7], proposition 3), ayant 10 unités distinctes e_i, $i \leq 10$ et 6 autres homomorphismes f_i, $i \leq 3$, $\overline{(f_2, f_1)}$, $\overline{(f_3, f_2)}$ et $\overline{(f_3, f_2, f_1)}$ tels que l'on ait :

$$\alpha(f_1) = e_1, \quad \alpha(f_2) = \beta(f_1) = e_2, \quad \alpha(f_3) = \beta(f_2) = e_3, \quad \beta(f_3) = e_4, \quad \alpha(\overline{(f_2, f_1)}) = e_5,$$

$$\beta(\overline{(f_2, f_1)}) = e_6, \quad \alpha(\overline{(f_3, f_2)}) = e_7, \quad \beta(\overline{(f_3, f_2)}) = e_8, \quad \alpha(\overline{(f_3, f_2, f_1)}) = e_9, \quad \beta(\overline{(f_3, f_2, f_1)}) = e_{10}.$$

Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droite et à gauche étant :

$$f_2 . f_1 = \overline{(f_2, f_1)}, \quad f_3 . f_2 = \overline{(f_3, f_2)}, \quad f_3 . \overline{(f_2, f_1)} = \overline{(f_3, f_2)} . f_1 = \overline{(f_3, f_2, f_1)}.$$

Montrons que $L_{\mathcal{N}_r}[G]^{\cdot} \in (\mathcal{N}_s)_0$. En effet, $L_{\mathcal{N}_r}[G]^{\cdot}$ admet $L_{\mathcal{F}}[G]^{\cdot}$ pour une $(\mathcal{F}, \mathcal{N}_p)$-projection et pour une classe polare quotient [7].

Soit $C^{\cdot}$ la prcéatégorie ayant 8 unités distinctes e_i, $i \leq 8$ et 5 autres homomorphismes f_i, $i \leq 5$ tels que l'on ait :

$$\alpha(f_1) = e_1, \quad \alpha(f_2) = \beta(f_1) = e_2, \quad \alpha(f_3) = \beta(f_2) = e_3, \quad \alpha(f_4) = e_5, \quad \beta(f_3) = e_4,$$

$$\beta(f_4) = e_6, \quad \alpha(f_5) = e_7, \quad \beta(f_5) = e_8.$$

Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droite et à gauche étant :

$$f_2 . f_1 = f_4, \; f_3 . f_2 = f_5, \quad e_2 . e_1 = f_1, \quad e_3 . e_1 = f_2, \quad e_4 . e_1 = f_3.$$

Montrons que $C^{\cdot} \in (\mathcal{N}_s)_0$. En effet, soit $r_{\mathcal{N}''} = (C, A, C)$ la relation définie dans le théorème 7, [7]. On montre que $A = \{(e_2, e_1), (e_3, e_1), (e_4, e_1), (e_5, e_1), (e_6, e_3), (e_7, e_2), (e_8, e_4))\}$. Soit $\widehat{r}_{\mathcal{N}''} = (C, B, C)$ la relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par la relation $r_{\mathcal{N}''}$. On montre que $B = C \times C$. Soit $K^{\cdot}$ la catégorie ayant une seule unité e. On montre que $C^{\cdot}/\widehat{r}_{\mathcal{N}''} \cong K^{\cdot}$ et par conséquent $C^{\cdot}$ admet $K^{\cdot}$ pour une $(\mathcal{F}, \mathcal{N}_p)$-projection (d'après le théorème 7, [7]) et pour une classe polaire quotient. Ceci montre que $C^{\cdot} \in (\mathcal{N}_s)_0$. Supposons que $\nu = (N_{\mathcal{N}_s}(L_{\mathcal{N}_p}[G]^{\cdot}), \underline{\nu}, L_{\mathcal{N}_p}[G]^{\cdot})$ soit un $(\mathcal{N}_s, \mathcal{N}_p)$-projecteur. La relation $L_{\mathcal{N}_r}[G]^{\cdot} \in (\mathcal{N}_s)_0$ entraîne $N_{\mathcal{N}_s}(L_{\mathcal{N}_p}[G]^{\cdot}) \supset L_{\mathcal{N}_r}[G]^{\cdot}$. Soit $j = (L_{\mathcal{N}_r}[G]^{\cdot}, \iota, L_{\mathcal{N}_p}[G]^{\cdot}) \in \mathcal{N}_g$ où ι est l'injection canonique de $L_{\mathcal{N}_p}[G]^{\cdot}$ vers $L_{\mathcal{N}_r}[G]$. Soit $\psi = (C^{\cdot}, \underline{\psi}, L_{\mathcal{N}_p}[G]^{\cdot}) \in \mathcal{N}_g$ où ψ est la bijection de $L_{\mathcal{N}_p}[G]$ vers C définie par : $\psi(e_i) = e_i$, $i \leq 8$, $\psi(f_i) = f_i$, $i \leq 3$, $\psi(\overline{(f_2, f_1)}) = f_4$, $\psi(\overline{(f_3, f_2)}) = f_5$. Soit $\underline{\psi}'$ une application de $L_{\mathcal{N}_r}[G]$ vers C telle que $\underline{\psi}' j = \underline{\psi}$. On a $\underline{\psi}'(f_1) = f_1$ et $\underline{\psi}'(\overline{(f_3, f_2)}) = f_5$. Montrons que $\underline{\psi}'$ n'est pas un homomorphisme. En effet $(\overline{(f_3, f_2)}, f_1) \in L_{\mathcal{N}_r}[G]^{\cdot} * L_{\mathcal{N}_r}[G]^{\cdot}$, mais on a $(\underline{\psi}'(\overline{(f_3, f_2)}), \underline{\psi}'(f_1)) \notin C^{\cdot} * C^{\cdot}$. Ceci montre qu'il n'existe pas un homomorphisme ψ' de $L_{\mathcal{N}_r}[G]^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ tel que $\psi' . j = \psi$. On en déduit qu'il n'existe pas un homomorphisme ψ_1' de $N_{\mathcal{N}_s}(L_{\mathcal{N}_p}[G]^{\cdot})$ vers $C^{\cdot}$ tel que $\psi_1' . \nu = \psi$ et par conséquent il n'existe pas une $(\mathcal{N}_s, \mathcal{N}_p)$-projection de $L_{\mathcal{N}_p}[G]^{\cdot}$. Donc $\mathcal{N}_p$ n'est pas une catégorie à $\mathcal{N}_s$-projections et par suite $\mathcal{N}_g$ n'est pas une catégorie à $\mathcal{N}_s$-projections.

Remarque 2. Si $\mathcal{U}_N \neq \mathcal{N}_g$, alors $\mathcal{N}_g$ n'est pas une catégorie à $\mathcal{U}$-projections et par suite $\mathcal{N}_g$ n'est pas une catégorie à $\mathcal{U}_N$-projections.

Si $C^{\cdot} \in (\mathcal{U}_N)_0$, nous désignons par $\nu_{\mathcal{U}}(C^{\cdot})$ un $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_\Lambda)$-projecteur de source $C^{\cdot}$ et par $N_{\mathcal{U}}(C^{\cdot})$ une $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_\Lambda)$-projection de $C^{\cdot}$. Nous désignons par $\mathcal{U}^i_N$ (resp. par $\mathcal{U}_{sN}$, $\mathcal{U}^b_N$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}_N$ formée par les homomorphismes entre classes polaires $C^{\cdot}$ telles que $\nu_{\mathcal{U}}(C^{\cdot})$ soit injectif (resp. surjectif, bijectif).

Exemple: Si $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, on a $\mathcal{F}^i_N \supset \mathcal{N}^{\#}$.

Soit $\mathcal{U}_R$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$ ayant pour unités les classes polaires $H^{\cdot}$ telles que $H^{\cdot} \simeq C^{\cdot}/r$ où $C^{\cdot} \in \mathcal{U}_0$ et où r est une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$.

Exemple: Si $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, on a $\mathcal{F}_R \subset \mathcal{N}'$.

Désignons $\mathcal{U}^b_{(R,N)} = \mathcal{F}_R \cap \mathcal{U}^b_N$.

Proposition 1. *$\mathcal{U}_R = \mathcal{U}$, si $\mathcal{U} = \mathcal{N}_g, \mathcal{N}', \mathcal{N}''$; $\mathcal{U}^b_{(R,N)} = \mathcal{U}$, si $\mathcal{U} = \mathcal{F}'', \mathcal{F}^{\#}, \mathcal{N}^{\#}$; $\mathcal{U}^b_{(R,N)} \neq \mathcal{U}$ si $\mathcal{U} = \mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{N}_p$.*

Soient $C^{\cdot} \in \mathcal{U}_0$ et r une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$.

Théorème 2. *Si $C^{\cdot}/r \in \mathcal{U}_0$, il existe une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient $\bar{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ par r. Dans ce cas, $\bar{C}^{\cdot} = C^{\cdot}/r$. Si $C^{\cdot}/r \in (\mathcal{U}^b_N)_0$, il existe une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient $\bar{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ par r. Dans ce cas, $\bar{C}^{\cdot}$ est isomorphe à $N_{\mathcal{U}}(C^{\cdot}/r)$. Si $C^{\cdot}/r \notin (\mathcal{U}^b_\Lambda)_0$, il n'existe pas une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ par r.*

Démonstration. Si $C^{\cdot}/r \in \mathcal{U}_0$, alors $C^{\cdot}/r$ est une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ par r d'après le théorème 1.

Supposons $C^{\cdot}/r \in (\mathcal{U}^b_N)_0$. Montrons que $N_{\mathcal{U}}(C^{\cdot}/r)$ est une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$. Soit $\bar{r} = (C^{\cdot}/r, \tilde{r}, C^{\cdot})$ le $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme canonique. Soit $\nu(C^{\cdot}/r) = (N_{\mathcal{U}}(C^{\cdot}/r), \underline{\nu}, C^{\cdot}/r)$ un $(\mathcal{U}, \mathcal{N}_g)$-projecteur. Posons $\varphi = \nu(C^{\cdot}/r) . \bar{r}$. Si $C^{\cdot}/r \in (\mathcal{U}^s_N)_0$, on montre que φ est un $p_{\mathcal{U}}$-épimorphisme. Si de plus $C^{\cdot}/r \in (\mathcal{U}^b_N)_0$ et si $\bar{C}^{\cdot} = C^{\cdot}/r$, la bijection $\underline{\nu}^{-1}$ définit un isomorphisme $\bar{C}^{\cdot} \simeq N_{\mathcal{U}}(C^{\cdot}/r)$. Donc $\bar{C}^{\cdot}$ est une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ par r. Le reste de la démonstration est évident.

Corollaire 1. *Si $\mathcal{U}_R = \mathcal{U}$, il existe toujours une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient $\bar{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ par rapport de r. Dans ce cas, $\bar{C}^{\cdot} = C^{\cdot}/r$ et toute $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ par rapport de r est une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient strict de $C^{\cdot}$ par rapport de r.*

Corollaire 2. *Si $\mathcal{U}^b_{(R,N)} = \mathcal{U}$, il existe une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient $\bar{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ par rapport de r si, et seulement si, $C^{\cdot}/r \in \mathcal{U}_0$. Dans ce cas, $\bar{C}^{\cdot} = C^{\cdot}/r$.*

Corollaire 3. *Si $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, on obtient le théorème 11, chap. III, [8]. Si $\mathcal{U} = \mathcal{N}'$, on obtient le théorème 6, chap. III, [8] (voir corollaire 1). Si $\mathcal{U} = \mathcal{N}_p$, on obtient le théorème 3 [3]. Si $\mathcal{U} = \mathcal{N}''$, on obtient la proposition du n° 1, [10] pour $n = 2$ (voir corollaire 1). Si $\mathcal{U} = \mathcal{N}^{\#}$, on obtient la condition d'existence d'une $p_{\mathcal{N}^{\#}}$-structure quotient de $C^{\cdot} \in \mathcal{N}^{\#}_0$ exposée dans [7] (voir corollaire 2). Si $\mathcal{U} = \mathcal{F}', \mathcal{F}'', \mathcal{F}^{\#}$ on obtient le théorème 3, [4] (voir corollaire 2), etc.*

3. Soit $\psi = (\bar{C}^{\cdot}, \psi, C^{\cdot}) \in \mathcal{U}$ et soit ψ une surjection.

Théorème 3. $\overline{\overline{C}}^{\cdot}$ *est* $p_{\mathcal{U}}$*-structure quotient de* $C^{\cdot}$ *si, et seulement si,* $\overline{C}^{\cdot}$ *est isomorphe à* $N_{\mathcal{U}}(C^{\cdot}/r_{\psi})$.

Ce théorème est un corollaire du théorème 2.

Remarque. Ce théorème montre que si $\overline{C}^{\cdot}$ est une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$, il existe toujours une relation d'équivalence r telle que $\overline{C}^{\cdot}$ est isomorphe à une $p_{\mathcal{U}}$-structure quotient de $C^{\cdot}$ par r.

4. Soit $J_{\mathcal{U}}$ la sous-classe de $\mathcal{U}$ formée par les homomorphismes $F=(\widehat{C}^{\cdot}, \underline{F}, C^{\cdot})$ tels que $\underline{F}(C)\subset \widehat{C}^{\cdot}_{0}$. On montre que $J_{\mathcal{U}}$ est un idéal de $\mathcal{U}$.

Soient $H^{\cdot}\in \mathcal{U}_0$ et $G^{\cdot}$ une $p_{\mathcal{U}}$-sous-structure de $H^{\cdot}$. Soit r_G la relation (H, A, H) où A est la classe des couples $(g, \alpha(g))$ où $g\in G$. Désignons par $\widehat{r}_G$ la relation d'équivalence bicompatible sur $H^{\cdot}$ engendrée par la relation r_G.

Soit $\mathcal{U}_{RG}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$ ayant pour unités les classes polaires $C^{\cdot}$ telles que $C^{\cdot}\simeq H^{\cdot}/\widehat{r}_G$ où $H^{\cdot}\in \mathcal{U}_0$ et où $G^{\cdot}$ est une $p_{\mathcal{U}}$-sous-structure de $H^{\cdot}$.

Exemple: Si $\mathcal{U}=\mathcal{F}$, on a $\mathcal{F}_{RG}\subset\mathcal{N}'$.

Désignons $\mathcal{U}^{s}_{(RG,\,N)}=\mathcal{U}_{RG}\cap\mathcal{U}^{s}_{N}$.

Proposition 2. $\mathcal{U}_{RG}=\mathcal{U}$, *si* $\mathcal{U}=\mathcal{N}_g$; $\mathcal{U}^{s}_{(RG,\,N)}=\mathcal{U}$, *si* $\mathcal{U}=\mathcal{F}^{\#}$; $\mathcal{U}^{s}_{(RG,\,N)}\neq\mathcal{U}$, *si* $\mathcal{U}=\mathcal{F}$, $\mathcal{N}_p$.

Soit $H^{\cdot}\in \mathcal{U}_0$ et soit $G^{\cdot}$ une $p_{\mathcal{U}}$-sous-structure de $H^{\cdot}$.

Théorème 4. *Si* $H^{\cdot}/\widehat{r}_G\in \mathcal{U}_0$, *il existe une* $(p_{\mathcal{U}}, J_{\mathcal{U}})$*-structure quotient* $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ *de* $H^{\cdot}$ *par* $G^{\cdot}$. *Dans ce cas,* $H^{\cdot}/G^{\cdot}=H^{\cdot}/\widehat{r}_G$. *Si* $H^{\cdot}/\widehat{r}_G\in(\mathcal{U}^{s}_{N})_0$, *il existe une* $(p_{\mathcal{U}}, J_{\mathcal{U}})$*-structure quotient* $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ *de* $H^{\cdot}$ *par* $G^{\cdot}$. *Dans ce cas,* $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ *est isomorphe à* $N_{\mathcal{U}}(H^{\cdot}/\widehat{r}_G)$. *Si* $H^{\cdot}/\widehat{r}_G\notin(\mathcal{U}^{s}_{N})_0$, *il n'existe pas une* $(p_{\mathcal{U}}, J_{\mathcal{U}})$*-structure quotient de* $H^{\cdot}$ *par* $G^{\cdot}$.

Démonstration. Soit $H^{\cdot}/\widehat{r}_G\in \mathcal{U}_0$ et soit $\overline{r}_G=(H^{\cdot}/\widehat{r}_G, \widetilde{r}_G, H^{\cdot})$ le $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme canonique. Supposons $\psi=(\widehat{H}^{\cdot}; \underline{\psi}, H^{\cdot})\in\mathcal{N}_g$ et $\underline{\psi}(H)\subset\widehat{H}^{\cdot}_{0}$. La relation $(g, \alpha(g))\in A$ entraîne $\psi(g)=\psi(\alpha(g))$ d'où $r_G\subset r_{\varphi}$ et $\widehat{r}_G\subset r_{\varphi}$. Ainsi $\overline{r}_G$ est un $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme, et puisque $\mathcal{U}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g$, $\overline{r}_G$ est un $p_{\mathcal{U}}$-épimorphisme. Ceci montre que $H^{\cdot}/\widehat{r}_G$ est une $(p_{\mathcal{U}}, J_{\mathcal{U}})$-structure quotient de $H^{\cdot}$ par $G^{\cdot}$.

Soit $\nu(H^{\cdot}/\widehat{r}_G)=(N_{\mathcal{U}}(H^{\cdot}/\widehat{r}_G), \underline{\nu}, H^{\cdot}/\widehat{r}_G)$ un $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_N)$-projecteur. Posons $\varphi=\nu(H^{\cdot}/\widehat{r}_G)\,.\,\overline{r}_G$. Si $H^{\cdot}/\widehat{r}_G\in(\mathcal{U}^{s}_{N})_0$, on montre que φ est un $p_{\mathcal{U}}$-épimorphisme. Si de plus $\overline{H}=H/r_G$ la bijection $\overline{H}=\widetilde{\to}\, p_{\mathcal{U}}(N_{\mathcal{U}}(H^{\cdot}/\widehat{r}_G))$ définit un isomorphisme de $\overline{H}^{\cdot}$ vers $N_{\mathcal{U}}(H^{\cdot}/\widehat{r}_G)$. Ceci montre que $\overline{H}^{\cdot}$ est une $(p_{\mathcal{U}}, J_{\mathcal{U}})$-structure quotient de $H^{\cdot}$ par $G^{\cdot}$. Le reste de la démonstration est évident.

Corollaire 1. *Si* $\mathcal{U}_{RG}=\mathcal{U}$, *il existe toujours une* $(p_{\mathcal{U}}, J_{\mathcal{U}})$*-structure quotient* $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ *de* $H^{\cdot}$ *par rapport de* $G^{\cdot}$. *Dans ce cas,* $H^{\cdot}/G^{\cdot}=H^{\cdot}/\widehat{r}_G$.

C o r o l l a i r e 2. *Si* $\mathcal{U}^s_{(RG,\,N)}=\mathcal{U}$, *il existe une* $(p_{\mathcal{U}},\ J_{\mathcal{U}})$-*structure quotient* $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ *de* $H^{\cdot}$ *par rapport de* $G^{\cdot}$ *si, et seulement si,* $H^{\cdot}/\widehat{r_G}\in\mathcal{U}_0$. *Dans ce cas,* $H^{\cdot}/G^{\cdot}=H^{\cdot}/\widehat{r_G}$.

C o r o l l a r i e 3. *Si* $\mathcal{U}=\mathcal{F}$, *on obtient le théorème 15, chap. III, [8]. Si* $\mathcal{U}=\mathcal{F}^{\#}$, *on obtient le théorème 4, [4] (voir corollaire 2). Si* $\mathcal{U}=\mathcal{N}_p$, *on obtient le théorème 5, [3], etc.*

R e m a r q u e. L'existence d'une catégorie quotient $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ par rapport à $G^{\cdot}$ n'entraîne pas l'existence d'une catégorie quotient $\overline{H^{\cdot}}$ de $H^{\cdot}$ par rapport à $\widehat{r_G}$, comme le montre l'exemple suivant: Soit $C^{\cdot}$ la base de catégorie ayant 12 unités distinctes e_i, $i\leqq 12$ et 22 autres homomorphismes f_i, $i\leqq 7$, f'_i, $i\leqq 5$, g_i, $i\leqq 5$, g'_i, $i\leqq 5$ tels que l'on ait (Fig. 1):

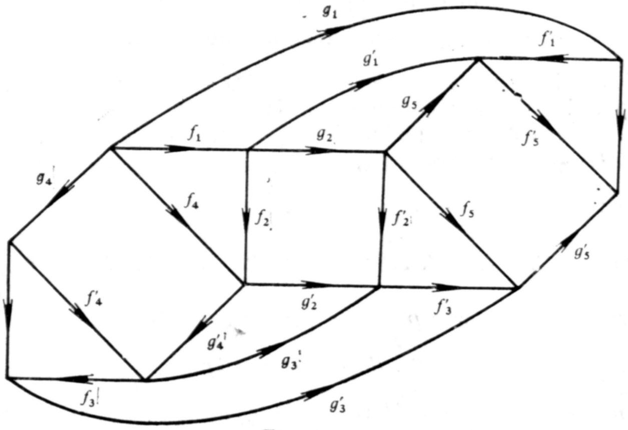

Fig. 1

$f_1\in e_2.C^{\cdot}.e_1$, $f_2\in e_3.C^{\cdot}.e_2$, $f_3\in e_6.C^{\cdot}.e_5$, $f_4\in e_3.C^{\cdot}.e_1$,

$f_5\in e_{12}.C^{\cdot}.e_{10}$, $f_6\in e_6.C^{\cdot}.e_4$, $f_7\in e_9.C^{\cdot}.e_7$, $f'_1\in e_8.C^{\cdot}.e_7$,

$f'_2\in e_{11}.C^{\cdot}.e_{10}$, $f'_3\in e_{12}.C^{\cdot}.e_{11}$, $f'_4\in e_5.C^{\cdot}.e_4$, $f'_5\in e_9.C^{\cdot}.e_8$,

$g_1\in e_7.C^{\cdot}.e_1$, $g_2\in e_{10}.C^{\cdot}.e_2$, $g_3\in e_{11}.C^{\cdot}.e_5$, $g_4\in e_4.C^{\cdot}.e_1$,

$g_5\in e_8.C^{\cdot}.e_{10}$, $g'_1\in e_8.C^{\cdot},e_2$, $g'_2\in e_{11}.C^{\cdot}.e_3$, $g'_3\in e_{12}.C^{\cdot}.e_6$,

$g'_4\in e_5.C^{\cdot}.e_3$, $g'_5\in e_9.C^{\cdot}.e_{12}$.

Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droite et à gauche étant:

$$f_3.f'_4=f_6,\quad f_2.f_1=f_4,\quad f'_5.f'_1=f_7,\quad f'_3.f'_2=f_5.$$

Soit $\mathrm{v}(C^{\cdot})=(N_{\mathcal{F}}(C^{\cdot}),\ \underline{\mathrm{v}},\ C^{\cdot})$ un $(\mathcal{F},\ \mathcal{N}^{\#})$-projecteur. Soit r la relation $(N_{\mathcal{F}}(C^{\cdot}),\ A,\ N_{\mathcal{F}}(C^{\cdot}))$ où A est la classe des couples $(\underline{\mathrm{v}}(f'_i)\,.\,\underline{\mathrm{v}}(g_i),\ \underline{\mathrm{v}}(g'_i)\,.\,\mathrm{v}(f_i))$, $i\leqq 5$. Soit $\widehat{r}$ la relation d'équivalence bicompatible sur $N_{\mathcal{F}}(C^{\cdot})$ engendrée par la relation r. Soit $\overline{r}=N_{\mathcal{F}}(C^{\cdot})/\widehat{r},\ \widetilde{r},\ N_{\mathcal{F}}(C^{\cdot}))$ le $p_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme canonique. Nous désignons $H^{\cdot}=N^{\cdot}_{\mathcal{F}}(C^{\cdot})/\widehat{r}$. Soit K

la catégorie non-associative ayant 4 unités distinctes e_i, $i \leqq 4$ et 7 autres homomorphismes f_i, $i \leqq 7$ tels que l'on ait :

$$f_1 \in e_2 . K^{\cdot} . e_1, \quad f_2 \in e_3 . K^{\cdot} . e_2, \quad f_3 \in e_4 . K^{\cdot} . e_3, \quad f_4 \in e_3 . K^{\cdot} . e_1,$$

$$f_5 \in e_4 . K^{\cdot} . e_2, \quad f_6 \in e_4 . K^{\cdot} . e_1, \quad f_7 \in e_4 . K^{\cdot} . e_1.$$

Les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droite et à gauche ètant :

$$f_2 . f_1 = f_4, \quad f_3 . f_2 = f_5, \quad f_3 . f_4 = f_5, \quad f_5 . f_1 = f_7.$$

Soit θ la relation (K, A, K) où $A = \{(f_6, f_7)\}$. On montre que θ est une relation d'équivalence bicompatible sur $K^{\cdot}$ et que $K^{\cdot}/\theta$ est une $(\mathcal{F}, \mathcal{F}'')$-projection de $K^{\cdot}$. Il en résulte que $K^{\cdot} \in (\mathcal{F}^s_N)_0$ et $K^{\cdot} \notin (\mathcal{F}^b_N)_0$. Soit $G^{\cdot}$ la sous-catégorie de $H^{\cdot}$ définie par la sousclasse $\{\tilde{r}\,\underline{v}(g_1), \ldots, \tilde{r}\,\underline{v}(g_5), \tilde{r}\,\underline{v}(g'_1), \ldots, \tilde{r}\,\underline{v}(g'_5)\}$. On montre que $H^{\cdot}/\widehat{r_G} \cong K^{\cdot}$ (voir proposition 7 du n^0 1, [9]) d'où $H^{\cdot}/\widehat{r_G} \in (\mathcal{F}^s_N)_0$. Donc, il existe une $(p_{\mathcal{F}}, J_{\mathcal{F}})$-structure quotient $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ par $G^{\cdot}$. De puls, $H^{\cdot}/\widehat{r_G} \notin (\mathcal{F}^b_N)_0$ et par conséquent il n'existe pas une $p_{\mathcal{F}}$-structure quotient $\overline{H}^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ par $\widehat{r_G}$. Ceci montre que l'existence d'une catégorie quotient $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ par rapport à $G^{\cdot}$ n'entraîne pas l'existence d'une catégorie quotient $\overline{H}^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ par rapport à $\widehat{r_G}$. Cet exemple montre aussi que l'existence d'une précatégorie quotient $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ de $H^{\cdot} \in (\mathcal{N}_p)_0$ par une $p_{\mathcal{N}_p}$-sous-structure $G^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ n'entraîne pas l'existence d'une précatégorie quotient $\overline{H}^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ par rapport de $\widehat{r_G}$ (voir aussi remarque du théorème 5, [7]).

BIBLIOGRAPHIE

1. D. V. Dekov. Catégories de trios et de quatuors. *Bull. Inst. Politehn. Iaşi*, **27**, 1987, 13.
2. D. V. Dekov. Projections des classes *n*-polaries. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **30**, 1977, 801—804.
3. D. V. Dekov. Précatégories quotient. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **32**, 1979, 1619—1622.
4. D. V. Dekov. Classes polaires quotient. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **33**, 1980, 11—14.
5. D. V. Dekov. Sur les structures algébriques des relations. *Revue roum. math. pures et apll.*, **27**, 1982, 15—24.
6. D. V. Dekov. Sur l'existence de structures quotient. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **40**, 1987, 17—19.
7. D. V. Dekov. Problèmes universels relatifs aux classes polaires, *Serdica*. **14**, 1988, 223—233.
8. Ch. Ehresmann. Catégories et structures. Paris, 1965.
9. Ch. Ehresmann. Structures quasi-quotient. *Math. Annalen*, **171**, 1967, 293—363.
10. Ch. Ehresmann. Problèmes universels relatifs aux catégories *n*-aires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **264**, 1967, 273—276.
11. Ch. Ehresmann. Structures quotient. *Comm. Math. Helv.*, **38**, 1963, 219—283.

6000 Stara Zagora
ul. Georgi Kolev 81
Bulgaria

Received 7. 9. 1987