Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ

Б. ЦАРЕВА

В данной работе доказано, что связность W_3 может быть единственным образом преобразована конформно так, что после этого конформного преобразования ортогональная три-ткань, удовлетворяющая определенным условиям, станет геодезической. Указаны эти условия и вектор конформного преобразования.

1. Основные формулы конформной геометрии ортогональных три-тканей в трехмерном пространстве Вейля. Пусть $W_3(g_{ij}, T_k)$ — трехмерное пространство Вейля с невырожденным симметрическим основным тензором g_{ij} и дополнительным вектором T_k. Согласно [1], тройка векторных полей $\underset{1}{v_i}, \underset{2}{v_i}, \underset{3}{v_i} \in W_3$, удовлетворяющих условиям $g_{is}\underset{k}{v^i}\underset{k}{v^s}=1$ $(k=1, 2, 3)$ и $g_{is}\underset{k}{v^i}\underset{l}{v^s}=0$ $(k, l=1, 2, 3, k\neq l)$, называется ортогональной три-тканью, а деривационные формулы векторных полей $\underset{k}{v_i}$ имеют вид

$$\dot\nabla_k \underset{1}{v_s}=r_k \underset{2}{v_s}+q_k \underset{3}{v_s}, \quad \dot\nabla_k \underset{2}{v_s}=-r_k \underset{1}{v_s}+p_k \underset{3}{v_s}, \quad \dot\nabla_k \underset{3}{v_s}=-q_k \underset{1}{v_s}-p_k \underset{2}{v_s}. \tag{1}$$

Пусть $\tau\colon W_3(g_{is}, T_k)\to \overset{*}{W}_3(\overset{*}{g}_{is}, \overset{*}{T}_k)$ конформное отображение и $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \xrightarrow{\tau} (\underset{1}{\overset{*}{v}}, \underset{2}{\overset{*}{v}}, \underset{3}{\overset{*}{v}})$. Согласно [2],

$$g_{is}=\overset{*}{g}_{is}, \quad \underset{k}{v_i}=\underset{k}{\overset{*}{v}_i} \quad (k=1, 2, 3), \tag{2}$$

вектор

$$P_k=T_k-\overset{*}{T}_k \tag{3}$$

называется вектором конформного преобразования τ, а тензор

$$T^i_{km}=\overset{*}{\Gamma}{}^i_{km}-\Gamma^i_{km}, \tag{4}$$

где Γ^i_{km} и $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{km}$ являются коэффициентами связностей соответствено в W_3 и $\overset{*}{W}_3$, называется тензорном аффинной деформации.

Учитывая дефиницию, продолженной ковариантной производной [3], вес $\{-1\}$ векторных полей $\underset{k}{v^i}$ и формулы (1), (2), (3) и (4), получаем следующую зависимость между продолженными ковариантными производными векторных полей ортогональной три-ткани $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ в W_3 и $\overset{*}{W}_3$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 14, 1988, с, 358—365.

(5) $$\overset{*}{\nabla}_k \underset{l}{v}^i = \nabla_k \underset{l}{v}^i + S^i_{km} \underset{l}{v}^m, \quad l=1,\ 2,\ 3,$$

где $S^i_{km} = T^i_{km} - \delta^i_m P_k$. Пользуя известные из [2] формулы для тензора конформной деформации, соответствующего конформному преобразованию $\tau - \underset{p}{T}{}^i_{km} = T^{il}_{\ \ ..km} P_l = \delta^i_k \delta^l_m + \delta^l_k \delta^i_m - g^{il} g_{km}$, находим следующее равенство

(6) $$S^i_{km} = \delta^i_k P_m - g_{km} P^i.$$

С помощью формул (5) установим связь между коэффициентами деривационных уравнений пространства W_3 и $\overset{*}{W}_3$.

Пусть введем обозначения

(7) $$A = P_s \underset{k}{v}^s, \quad k=1,\ 2,\ 3.$$

Так как после перенормирования основного тензора $\breve{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ имеем $\breve{P}_k = \breve{T}_k - \overset{*}{T}_k = T_k + \partial_i \ln\lambda - (\overset{*}{T}_k + \partial_i \ln\lambda) = P_k$, то вес вектора конформного преобразования $\{0\}$. Тогда из [1] и (7) следует, что вес величин $\underset{k}{A}$ $\{-1\}$.

Имея в виду равенства $\overset{*}{p}_k = \underset{3}{v}_s \overset{*}{\nabla}_k \underset{2}{v}^s = -\underset{2}{v}_s \overset{*}{\nabla}_k \underset{3}{v}^s$, $\overset{*}{q}_k = \underset{3}{v}_s \overset{*}{\nabla}_k \underset{1}{v}^s = -\underset{1}{v}_s \overset{*}{\nabla}_k \underset{3}{v}_s$, $r_k = \underset{2}{v}_s \cdot \overset{*}{\nabla}_k \underset{1}{v}^s = -\underset{1}{v}_s \overset{*}{\nabla}_k \underset{2}{v}^s$, известные из [1] и формулы (5), (6) и (7), находим

(8) $$\overset{*}{p}_k = p_k - \underset{3}{A} \underset{2}{v}_k + \underset{2}{A} \underset{3}{v}_k, \quad \overset{*}{q}_k = q_k - \underset{3}{A} \underset{1}{v}_k + \underset{1}{A} \underset{3}{v}_k, \quad \overset{*}{r}_k = r_k - \underset{2}{A} \underset{1}{v}_k + \underset{1}{A} \underset{2}{v}_k.$$

Согласно [1], имеем следующее представление трансверсальных векторов полей $\underset{k}{\overset{*}{v}}_i \in \overset{*}{W}_3$: $\underset{1}{\overset{*}{t}}_k = \overset{*}{\varepsilon}_{ijk} \overset{*}{q}{}^i \overset{*}{r}{}^j$, $\underset{2}{\overset{*}{t}}_k = \overset{*}{\varepsilon}_{ijk} \overset{*}{r}{}^i \overset{*}{p}{}^j$, $\underset{3}{\overset{*}{t}}_k = \overset{*}{\varepsilon}_{ijk} \overset{*}{p}{}^i \overset{*}{q}{}^j$, где $\overset{*}{\varepsilon}_{ijk} = 3!\ \underset{1}{v}_{[i} \underset{2}{v}_j \underset{3}{v}_{k]} = \varepsilon_{ijk}$. Тогда из (8) и свойств тензора ε_{ijk}, найденых в [1], получаем

(9) $$\underset{1}{\overset{*}{t}}_k = \underset{1}{t}_k - \varepsilon_{ijk} \underset{1}{v}^j \underset{2}{A} q^i + \varepsilon_{ijk} \underset{2}{v}^j \underset{1}{A} q^j - \varepsilon_{ijk} \underset{1}{v}^i \underset{3}{A} r^j + \varepsilon_{ijk} \underset{3}{v}^i \underset{1}{A} r^j - \underset{1}{A}\underset{3}{A} \underset{3}{v}_k - \underset{1}{A}\underset{2}{A} \underset{2}{v}_k - \underset{1}{A}{}^2 \underset{1}{v}_k.$$

Легко проверяются следующие равенства

(10) $$\begin{aligned} &\varepsilon_{ijk} \underset{1}{v}^i = \underset{2}{v}_j \underset{3}{v}_k - \underset{3}{v}_j \underset{2}{v}_k, \quad \varepsilon_{ijk} \underset{1}{v}^j = \underset{3}{v}_i \underset{2}{v}_k - \underset{2}{v}_i \underset{3}{v}_k, \\ &\varepsilon_{ijk} \underset{2}{v}^i = \underset{3}{v}_j \underset{1}{v}_k - \underset{1}{v}_j \underset{3}{v}_k, \quad \varepsilon_{ijk} \underset{2}{v}^j = \underset{1}{v}_i \underset{3}{v}_k - \underset{3}{v}_i \underset{1}{v}_k, \\ &\varepsilon_{ijk} \underset{3}{v}^i = \underset{1}{v}_j \underset{2}{v}_k - \underset{2}{v}_j \underset{1}{v}_k, \quad \varepsilon_{ijk} \underset{3}{v}^j = \underset{2}{v}_i \underset{1}{v}_k - \underset{1}{v}_i \underset{2}{v}_k. \end{aligned}$$

Введем обозначения

(11) $$p_s \underset{k}{v}^s = \underset{1k}{a}, \quad q_s \underset{k}{v}^s = \underset{2k}{a}, \quad r_s \underset{k}{v}^s = \underset{3k}{a}, \quad k=1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно,

(12) $$\begin{aligned} p_k &= \underset{11}{a}\, \underset{1}{v}_k + \underset{12}{a}\, \underset{2}{v}_k + \underset{13}{a}\, \underset{3}{v}_k, \\ q_k &= \underset{21}{a}\, \underset{1}{v}_k + \underset{22}{a}\, \underset{2}{v}_k + \underset{23}{a}\, \underset{3}{v}_k, \end{aligned}$$

$$r_k=\underset{31}{a}\,\underset{1}{v_k}+\underset{32}{a}\,\underset{2}{v_k}+\underset{33}{a}\,\underset{3}{v_k}.$$

В силу [1] и (11) вес величин $\underset{lk}{a}$, $l, k=1, 2, 3$ $\{-1\}$.

После аналогичных вычислений для $\underset{2}{\overset{*}{t}}_k$ и $\underset{3}{\overset{*}{t}}_k$ и пользуя обозначения (11), получаем следующее выражение трансверсальных векторов полей $\underset{k}{v}_s$ ортогональной триткани $(\underset{1}{\overset{*}{v}}, \underset{2}{\overset{*}{v}}, \underset{3}{\overset{*}{v}})\in \overset{*}{W}_3$

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overset{*}{t}}_k&=\underset{1}{t}_k+(-\underset{1}{A}^2-\underset{1}{A}\,\underset{23}{a}-\underset{1}{A}\,\underset{32}{a})\underset{1}{v_k}+(-\underset{1}{A}\,\underset{2}{A}+\underset{1}{A}\,\underset{31}{a}-\underset{2}{A}\,\underset{23}{a}+\underset{3}{A}\,\underset{33}{a})\underset{2}{v_k}\\
&\quad+(-\underset{1}{A}\,\underset{3}{A}+\underset{1}{A}\,\underset{21}{a}+\underset{2}{A}\,\underset{22}{a}-\underset{3}{A}\,\underset{32}{a})\underset{3}{v_k},\\
\underset{2}{\overset{*}{t}}_k&=\underset{2}{t}_k+(\underset{1}{A}\,\underset{2}{A}+\underset{1}{A}\,\underset{13}{a}+\underset{2}{A}\,\underset{32}{a}+\underset{3}{A}\,\underset{33}{a})\underset{1}{v_k}+(\underset{2}{A}^2+\underset{2}{A}\,\underset{13}{a}-\underset{2}{A}\,\underset{31}{a})\underset{2}{v_k}\\
&\quad+(\underset{2}{A}\,\underset{3}{A}-\underset{1}{A}\,\underset{11}{a}-\underset{2}{A}\,\underset{12}{a}-\underset{3}{A}\,\underset{31}{a})\underset{3}{v_k},\\
\underset{3}{\overset{*}{t}}_k&=\underset{3}{t}_k+(-\underset{1}{A}\,\underset{3}{A}+\underset{1}{A}\,\underset{12}{a}-\underset{2}{A}\,\underset{22}{a}-\underset{3}{A}\,\underset{23}{a})\underset{1}{v_k}\\
&\quad+(-\underset{3}{A}\,\underset{3}{A}-\underset{1}{A}\,\underset{11}{a}+\underset{2}{A}\,\underset{21}{a}-\underset{3}{A}\,\underset{13}{a})\underset{2}{v_k}+(-\underset{3}{A}^2+\underset{3}{A}\,\underset{12}{a}+\underset{3}{A}\,\underset{21}{a})\underset{3}{v_k}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Из [1, 4] и (12) следует, что величины $\underset{ij}{\overset{*}{\text{г}}}$ и $\underset{ij}{\text{г}}$, $i, j=1, 2, 3$ удовлетворяют следующим равенствам:

$$
\begin{aligned}
\underset{11}{\overset{*}{\text{г}}}&=\underset{1}{\overset{*}{t}}_k\underset{1}{v^k}=\underset{11}{\text{г}}-\underset{1}{A}(\underset{1}{A}+\underset{32}{a}+\underset{23}{a}),\\
\underset{22}{\overset{*}{\text{г}}}&=\underset{2}{\overset{*}{t}}_k\underset{2}{v^k}=\underset{22}{\text{г}}+\underset{2}{A}(\underset{2}{A}+\underset{13}{a}-\underset{31}{a}),\\
\underset{33}{\overset{*}{\text{г}}}&=\underset{3}{\overset{*}{t}}_k\underset{3}{v^k}=\underset{33}{\text{г}}-\underset{3}{A}(\underset{3}{A}-\underset{12}{a}-\underset{21}{a}),\\
\underset{12}{\overset{*}{\text{г}}}&=\underset{1}{\overset{*}{t}}_k\underset{2}{v^k}=\underset{12}{\text{г}}-\underset{1}{A}\,\underset{2}{A}+\underset{1}{A}\,\underset{31}{a}-\underset{2}{A}\,\underset{23}{a}+\underset{3}{A}\,\underset{33}{a},\\
\underset{21}{\text{г}}&=\underset{2}{\overset{*}{t}}_k\underset{1}{v^k}=\underset{21}{\text{г}}+\underset{2}{A}\,\underset{1}{A}+\underset{1}{A}\,\underset{13}{a}+\underset{2}{A}\,\underset{32}{a}+\underset{3}{A}\,\underset{33}{a},\\
\underset{23}{\overset{*}{\text{г}}}&=\underset{2}{\overset{*}{t}}_k\underset{3}{v^k}=\underset{23}{\text{г}}+\underset{2}{A}\,\underset{3}{A}-\underset{1}{A}\,\underset{11}{a}-\underset{2}{A}\,\underset{12}{a}-\underset{3}{A}\,\underset{31}{a},\\
\underset{32}{\overset{*}{\text{г}}}&=\underset{3}{\overset{*}{t}}_k\underset{2}{v^k}=\underset{32}{\text{г}}-\underset{3}{A}\,\underset{2}{A}-\underset{1}{A}\,\underset{11}{a}+\underset{2}{A}\,\underset{21}{a}-\underset{3}{A}\,\underset{13}{a},\\
\underset{31}{\overset{*}{\text{г}}}&=\underset{3}{\overset{*}{t}}_k\underset{1}{v^k}=\underset{31}{\text{г}}-\underset{3}{A}\,\underset{1}{A}+\underset{1}{A}\,\underset{12}{a}-\underset{2}{A}\,\underset{22}{a}-\underset{3}{A}\,\underset{23}{a},\\
\underset{13}{\overset{*}{\text{г}}}&=\underset{1}{\overset{*}{t}}_k\underset{3}{v^k}=\underset{13}{\text{г}}-\underset{1}{A}\,\underset{3}{A}+\underset{1}{A}\,\underset{21}{a}+\underset{2}{A}\,\underset{22}{a}-\underset{3}{A}\,\underset{32}{a}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

2. Приложение основных формул конформной геометрии ортогональных три-тканей в трехмерном пространстве Вейля. В силу [1] и (7) для вектора конформного преобразования имеем

$$P_k = \underset{1}{A}\,\underset{1}{v_k} + \underset{2}{A}\,\underset{2}{v_k} + \underset{3}{A}\,\underset{3}{v_k}. \tag{15}$$

Согласно [1], ортогональная три-ткань $(\underset{1}{\overset{*}{v}}, \underset{2}{\overset{*}{v}}, \underset{3}{\overset{*}{v}}) \in \overset{*}{W}_3$ геодезическая тогда и только тогда, когда ее геодезический вектор

$$\overset{*}{\alpha}_k = (\underset{12}{\overset{*}{г}}{}^2 + \underset{13}{\overset{*}{г}}{}^2)^{1/4}\,\underset{1}{\overset{*}{v}_k} + (\underset{21}{\overset{*}{г}_2} + \underset{23}{\overset{*}{г}}{}^2)^{1/4}\,\underset{2}{\overset{*}{v}_k} + (\underset{31}{\overset{*}{г}}{}^2 + \underset{32}{\overset{*}{г}}{}^2)\,\underset{3}{\overset{*}{v}_k} = 0.$$

Из этого утверждения и формул (14) следует, что искомые величины $\underset{1}{A}, \underset{2}{A}, \underset{3}{A}$ надо удовлетворять следующей системой уравнений:

$$\begin{array}{ll} \underset{1}{A}\,\underset{2}{A} - \underset{1}{A}\,\underset{31}{a} + \underset{2}{A}\,\underset{23}{a} - \underset{3}{A}\,\underset{33}{a} = \underset{12}{г} & \underset{3}{A}\,\underset{2}{A} + \underset{1}{A}\,\underset{11}{a} - \underset{2}{A}\,\underset{21}{a} + \underset{3}{A}\,\underset{13}{a} = \underset{32}{г} \\ \underset{2}{A}\,\underset{1}{A} + \underset{1}{A}\,\underset{13}{a} + \underset{2}{A}\,\underset{32}{a} + \underset{3}{A}\,\underset{33}{a} = -\underset{21}{г} & \underset{3}{A}\,\underset{1}{A} - \underset{1}{A}\,\underset{12}{a} + \underset{2}{A}\,\underset{22}{a} + \underset{3}{A}\,\underset{23}{a} = \underset{31}{г} \\ \underset{2}{A}\,\underset{3}{A} - \underset{1}{A}\,\underset{11}{a} - \underset{2}{A}\,\underset{12}{a} - \underset{3}{A}\,\underset{31}{a} = -\underset{23}{г} & \underset{1}{A}\,\underset{3}{A} - \underset{1}{A}\,\underset{21}{a} - \underset{2}{A}\,\underset{22}{a} + \underset{3}{A}\,\underset{32}{a} = \underset{13}{г}. \end{array} \tag{16}$$

Очевидно, что три—максимальный счет решений системы (16). Кроме того, пространство W_3 и три-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in W_3$ будут удовлетворять дополнительным условиям.

Теорема 1. *Трансверсали векторных полей ортогональной три-ткани $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in W_3$ совпадают тогда и только тогда, когда ранг матрицы $(\underset{ij}{a})$ $i, j = 1, 2, 3$ меньше* 3.

Доказательство: Пусть трансверсали векторных полей ортогональной три-ткани $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in W_3$, совпадают. Из [1] следует, что площадки $q_k r_k$, $r_k p_k$, $p_k q_k$ совпадают, т. е. векторы p_k, q_k, r_k компланарные. В силу [1] и (12) следует, что ранг матрицы $(\underset{ij}{a})$ меньше 3.

II. Пусть ранг матрицы $(\underset{ij}{a})$ меньше 3. Из (12) следует, что векторы p_k, q_k, r_k компланарные, а площадки $q_k r_k$, $r_k p_k$, $p_k q_k$ совпадают. Тогда направления трансверсальных векторов полей $\underset{k}{v_i}$ одни и те же.

Дальше мы не будем рассматривать класс ортогональных три-тканей, для которых трансверсали трех векторных полей совпадают, т. е. мы всегда будем требовать, что ранг матрицы $(\underset{ij}{a})$ 3.

Теорема 2. *Если ортогональная три-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in W_3$ удовлетворяет условиям:* 1) *векторное поле $\underset{1}{v_k}$ абсолютно параллельное и поле r_k принадлежит направлению поля $\underset{1}{v_k}$;* 2) *векторное поле $\underset{2}{v_k}$ переносится параллельно по линиям $(\underset{3}{v})$;* 3) *векторное поле $\underset{3}{v_k}$ переносится параллельно по линиям $(\underset{1}{v})$;* 4) $\underset{23}{a}\,\underset{23}{г} = \underset{31}{a}\,\underset{31}{г}$, *то связность W_3 может быть единственным образом преобразована конформно так, что после этого конформного преобразования три-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ станет геодезической. Вектор этого конформного преобразования* $P_k = \underset{23}{г}\,\underset{3}{v_k}/\underset{31}{a}$.

Доказательство: В силу [4] и условия 1) теоремы, для чебышевских кривизн $\underset{12}{r}$ и $\underset{18}{r}$ имеем $\underset{12}{r}=(\underset{11}{г}^2+\underset{13}{г}^2)^{1/4}=0$, $\underset{13}{r}=\underset{11}{г}^2+\underset{12}{г}^2)^{1/4}=0$, откуда следуют

$$(17)\qquad \underset{11}{г}=\underset{12}{г}=\underset{13}{г}=0.$$

Из [4] и условия 2) получаем $\underset{23}{r}=(\underset{22}{г}^2+\underset{21}{г}^2)^{1/4}=0$ или

$$(18)\qquad \underset{21}{г}=\underset{22}{г}=0.$$

Из-за того что линии $(\underset{3}{v})$ являются трансверсалями векторного поля $\underset{2}{v}_k$, для векторов $\underset{3}{v}_k$ и $\underset{2}{t}_k=\varepsilon_{ijk}r^i p^j$ выполнено $\underset{2}{t}_k=\lambda \underset{3}{v}_k$. Согласно [1], трансверсальный вектор $\underset{2}{t}_k$ ортогональный площадке r_k, p_k. Следовательно, имеют место следующие равенства

$$(19)\qquad \underset{13}{a}=p_k\underset{3}{v}^k=0,\quad \underset{33}{a}=r_k\underset{3}{v}^k=0.$$

В силу [4] и условия 3) для чебышевской кривизны $\underset{31}{r}$ имеем $\underset{31}{r}=(\underset{33}{г}^2+\underset{32}{г}^2)^{1/4}=0$ откуда следует

$$(20)\qquad \underset{32}{г}=\underset{33}{г}=0.$$

Так как линии $(\underset{1}{v})$ являются трансверсалями векторного поля $\underset{3}{v}_k$, то, согласно [1], вектор $\underset{1}{v}_k$ ортогональный площадке p_k, q_k. Следовательно,

$$(21)\qquad \underset{11}{a}=p_k\underset{1}{v}^k=0,\quad \underset{21}{a}=q_k\underset{1}{v}^k=0.$$

Из (12), (19), (21) и условия, что поле r_k принадлежит направлению поля $\underset{1}{v}_k$, заключаем

$$(22)\qquad \underset{32}{a}=0.$$

Учитывая, что ранг (a) равняется 3, и формулы (19), (21) и (22), устанавливаем

$$(23)\qquad \underset{12}{a}\,\underset{23}{a}\,\underset{31}{a}\neq 0.$$

Имея в виду равенства (17), (18), (19), (20), (21), (22) и условие 4) теоремы, мы запишем систему (16) следующим образом:

$$(24)\qquad \begin{array}{ll}
\underset{1}{A}\,\underset{2}{A}-\underset{1}{A}\,\underset{31}{a}+\underset{2}{A}\,\underset{23}{a}=0 & \underset{2}{A}\,\underset{3}{A}=0\\
\underset{1}{A}\,\underset{2}{A}=0 & \underset{1}{A}\,\underset{3}{A}-\underset{1}{A}\,\underset{12}{a}+\underset{2}{A}\,\underset{22}{a}+\underset{3}{A}\,\underset{23}{a}=\underset{23}{a}\,\underset{23}{г}/\underset{31}{a}\\
\underset{2}{A}\,\underset{3}{A}-\underset{2}{A}\,\underset{12}{a}-\underset{3}{A}\,\underset{31}{a}=-\underset{23}{г} & \underset{1}{A}\,\underset{3}{A}-\underset{2}{A}\,\underset{22}{a}=0.
\end{array}$$

Решение системы (24) сводится к следующим двум случаям:

I. $A=0$. Тогда из (24) имеем

$$\underset{1}{A}\,\underset{31}{a}=0,\quad \underset{3}{A}\,\underset{31}{a}=\underset{23}{г},\quad \underset{1}{A}\,\underset{3}{A}-\underset{1}{A}\,\underset{12}{a}+\underset{3}{A}\,\underset{23}{a}=\underset{23}{a}\,\underset{23}{г}/\underset{31}{a},\quad \underset{1}{A}\,\underset{3}{A}=0.$$

Из-за (23) получаем $\underset{1}{A}=0$, $\underset{3}{A}=\underset{23}{г}/\underset{31}{a}$, а вектор конформного преобразования является вектором $P_k+\underset{23}{г}\,\underset{3}{v}_k/\underset{31}{a}$.

II. $\underset{1}{A}=\underset{3}{A}=0$. Тогда из (24) получаем

$$\underset{2}{A}\underset{23}{a}=0,\quad \underset{2}{A}\underset{12}{a}=-\underset{23}{г},\quad \underset{2}{A}\underset{22}{a}=0,\quad \underset{23}{a}\underset{23}{г}=0.$$

В силу (23) находим, что $\underset{2}{A}=0$, а для вектора конформного преобразования имеем $P_k=0$. Следовательно, конформное преобразование с указанными в теореме свойствами не существует. Таким образом, мы доказали существование единственного конформного преобразования пространства W_3, после которого ортогональная три-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})\in W_3$, удовлетворяющая условиям теоремы, будет геодезической. Вектор этого конформного преобразования $P_k=\underset{23}{г}\underset{3}{v_k}/\underset{31}{a}$.

Теорема 3. *Если ортогональная три-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})\in W_3$ удовлетворяет условиям:* 1) *векторное поле $\underset{1}{v_k}$ абсолютно параллельное и поле q_k принадлежит направлению поля $\underset{1}{v_k}$;* 2) *векторное поле $\underset{2}{v_k}$ переносится параллельно по линиям $(\underset{1}{v})$;* 3) *векторное поле $\underset{3}{v_k}$ переносится параллельно по линиям $(\underset{2}{v})$;* 4) $\underset{21}{a}\underset{21}{г}=\underset{32}{a}\underset{32}{г}$, *то связность W_3 может быть единственным образом преобразована конформно так, что после этого конформного преобразования три-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ станет геодезической. Вектор этого конформного преобразования $P_k=-\underset{21}{г}\underset{2}{v_k}/\underset{32}{a}$.*

Доказательство: Из условия 1) следуют равенства (17). В силу [4] и условия 2) получаем

$$\underset{22}{г}=\underset{23}{г}=0 \qquad \underset{11}{a}=\underset{31}{a}=0. \tag{25}$$

Из условия 3) и [4] находим

$$\underset{31}{г}=\underset{33}{г}=0 \qquad \underset{12}{a}=\underset{22}{a}=0. \tag{26}$$

Учитывая (12), (25), (26) и условие, что поле q_k принадлежит направлению поля $\underset{1}{v_k}$, устанавливаем

$$\underset{23}{a}=0. \tag{27}$$

Из-за (25), (26), (27) и требования для ранга матрицы $(\underset{ij}{a})$ имеем

$$\underset{13}{a}\,\underset{32}{a}\,\underset{21}{a}\neq 0. \tag{28}$$

С помощью (17), (25), (26), (27) и условия 4) получаем следующий вид системы (16)

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{A}\underset{2}{A}=0 && \underset{2}{A}\underset{3}{A}-\underset{2}{A}\underset{21}{a}+\underset{3}{A}\underset{13}{a}=\underset{21}{a}\underset{21}{г}/\underset{32}{a}\\
&\underset{1}{A}\underset{2}{A}+\underset{1}{A}\underset{13}{a}+\underset{2}{A}\underset{32}{a}+\underset{3}{A}\underset{33}{a}=-\underset{21}{г} && \underset{1}{A}\underset{3}{A}=0\\
&\underset{2}{A}\underset{3}{A}=0 && \underset{1}{A}\underset{3}{A}-\underset{1}{A}\underset{21}{a}+\underset{3}{A}\underset{32}{a}=0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Возможны следующие два случая:

I. $\underset{3}{A}=0$. Решая систему (29), получаем $\underset{1}{A}=0$, $\underset{2}{A}=-\underset{21}{\text{г}}/\underset{32}{a}$, а для вектора конформного преобразования имеем $P_k=-\underset{21}{\text{г}}\underset{2}{v}_k/\underset{32}{a}$.

II. $\underset{1}{A}=\underset{2}{A}=0$. Решая систему (29), в этом случае получаем $\underset{3}{A}=0$, откуда следует, что $P_k=0$, или конформное преобразование не существует.

Не будем доказывать следующие четыре теоремы, так как их доказательства проводятся аналогично доказательствам теорем 2 и 3.

Теорема 4. *Если ортогональная три-ткань* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in W_3$ *удовлетворяет условиям*: 1) *векторное поле* $\underset{1}{v}_k$ *переносится параллельно по линиям* $(\underset{2}{v})$; 2) *векторное поле* $\underset{2}{v}_k$ *абсолютно параллельное и поле* p_k *принадлежит направлению поля* $\underset{2}{v}_k$; 3) *векторное поле* $\underset{3}{v}_k$ *переносится параллельно по линиям* $(\underset{1}{v})$; 4) $\underset{12}{a}\,\underset{12}{\text{г}}=\underset{31}{a}\,\underset{31}{\text{г}}$, *то связность* W_3 *может быть единственным образом преобразована конформо так, что после этого конформного преобразования три-ткань* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ *станет геодезической. Вектор этого конформного преобразования* $P_k=-\underset{12}{\text{г}}\,\underset{1}{v}_k/\underset{31}{a}$.

Теорема 5. *Если ортогональная три-ткань* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in W_3$ *удовлетворяет условиям*: 1) *векторное поле* $\underset{1}{v}_k$ *переносится параллельно по линиям* $(\underset{3}{v})$; 2) *векторное поле* $\underset{2}{v}_k$ *абсолютно параллельное и поле* r_k *принадлежит направлению поля* $\underset{2}{v}_k$; 3) *векторное поле* $\underset{3}{v}_k$ *переносится параллельно по линиям* $(\underset{2}{v})$ 4) $\underset{13}{a}\,\underset{13}{\text{г}}=\underset{32}{a}\,\underset{32}{\text{г}}$, *то связность* W_3 *может быть единственным образом преобразована конформно так, что после этого конформного преобразования три-ткань* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ *станет геодезической. Вектор этого конформного преобразования* $P_k=\underset{13}{\text{г}}\,\underset{3}{v}_k/\underset{32}{a}$.

Теорема 6. *Если ортогональная три-ткань* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in W_3$ *удовлетворяет условиям*: 1) *векторное поле* $\underset{1}{v}_k$ *переносится параллельно по линиям* $(\underset{2}{v})$; 2) *векторное поле* $\underset{2}{v}_k$ *переносится параллельно по линиям* $(\underset{3}{v})$; 3) *векторное поле* $\underset{3}{v}_k$ *абсолютно параллельное и поле* q_k *принадлежит направлению поля* $\underset{3}{v}_k$; 4) $\underset{12}{a}\,\underset{12}{\text{г}}=\underset{23}{a}\,\underset{23}{\text{г}}$, *то связность* W_3 *может быть единственным образом преобразована конформно так, что после этого конформного преобразования три-ткань* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ *станет геодезической. Вектор этого конформного преобразования* $P_k=\underset{12}{\text{г}}\,\underset{2}{v}_k/\underset{23}{a}$.

Теорема 7. *Если ортогональная три-ткань* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in W_3$ *удовлетворяет условиям*: 1) *векторное поле* $\underset{1}{v}_k$ *переносится параллельно по линиям* $(\underset{3}{v})$; 2) *векторное поле* $\underset{2}{v}_k$ *переносится параллельно по линиям* $(\underset{1}{v})$; 3) *векторное поле* $\underset{3}{v}_k$ *абсолютно параллельное и поле* p_k *принадлежит направлению поля* $\underset{3}{v}_k$;

4) $\underset{13}{a}\,\underset{13}{\text{г}}=\underset{21}{a}\,\underset{21}{\text{г}}$, *то связность* W_3 *может быть единственным образом преобразована конформно так, что после этого конформного преобразования три-ткань* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ *станет геодезической. Вектор этого конформного преобразования* $P_k=-\underset{21}{\text{г}}\,\underset{1}{v}_k/\underset{13}{a}$.

Пусть отметим, что линии векторного поля, которое переносится параллельно по линиям абсолютно параллельного поля, являются трансверсалями вектора конформного преобразования.

Условия теорем 2, 3, 5, 4, 6 и 7 и векторы соответствующих конформных преобразований можно записать в следующей таблице.

Векторное поле $\underset{1}{v}_k=\alpha r_k$ абсолютно параллельное	$\underset{2}{t}_k=\lambda\underset{3}{v}_k$	$\underset{3}{t}_k=\mu\underset{1}{v}_k$	$\underset{23}{a}\,\underset{33}{\text{г}}=\underset{31}{a}\,\underset{31}{\text{г}}$	$P_k=\frac{\underset{23}{\text{г}}}{\underset{31}{a}}\underset{3}{v}_k$
Векторное поле $\underset{1}{v}_k=\alpha q_k$ абсолютно параллельное	$\underset{2}{t}_k=\lambda\underset{1}{v}_k$	$\underset{3}{t}_k=\mu\underset{2}{v}_k$	$\underset{32}{a}\,\underset{32}{\text{г}}=\underset{21}{a}\,\underset{21}{\text{г}}$	$P_k=-\frac{\underset{32}{\text{г}}}{\underset{21}{a}}\underset{2}{v}_k$
$\underset{1}{t}_k=\lambda\underset{3}{v}_k$	векторное поле $\underset{2}{v}_k=\alpha r_k$ абсолютно параллельное	$\underset{3}{t}_k=\mu\underset{2}{v}_k$	$\underset{13}{a}\,\underset{13}{\text{г}}=\underset{32}{a}\,\underset{32}{\text{г}}$	$P_k=\frac{\underset{13}{\text{г}}}{\underset{32}{a}}\underset{3}{v}_k$
$\underset{1}{t}_k=\lambda\underset{2}{v}_k$	векторное поле $\underset{2}{v}_k=\alpha p_k$ абсолютно параллельное	$\underset{3}{t}_k=\mu\underset{1}{v}_k$	$\underset{31}{a}\,\underset{31}{\text{г}}=\underset{12}{a}\,\underset{12}{\text{г}}$	$P_k=-\frac{\underset{31}{\text{г}}}{\underset{12}{a}}\underset{1}{v}_k$
$\underset{1}{t}_k=\lambda\underset{2}{v}_k$	$\underset{2}{t}_k=\mu\underset{3}{v}_k$	векторное поле $\underset{3}{v}_k=\alpha q_k$ абсолютно параллельное	$\underset{12}{a}\,\underset{12}{\text{г}}=\underset{23}{a}\,\underset{23}{\text{г}}$	$P_k=\frac{\underset{12}{\text{г}}}{\underset{23}{a}}\underset{2}{v}_k$
$\underset{1}{t}_k=\lambda\underset{3}{v}_k$	$\underset{2}{t}_k=\mu\underset{1}{v}_k$	векторное поле $\underset{3}{v}_k=\alpha p_k$ абсолютно параллельное	$\underset{21}{a}\,\underset{21}{\text{г}}=\underset{13}{a}\,\underset{13}{\text{г}}$	$P_k=-\frac{\underset{21}{\text{г}}}{\underset{13}{a}}\underset{1}{v}_k$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Златанов, Б. Царева. Ортогональные три-ткани в трехмерном пространстве Вейля. *Сердика*, 8, 1982, 16—19.
2. А. Норден. Пространства аффинной связности. М., 1976.
3. Г. Златанов. Сети в двумерном пространстве Вейля. *Доклады БАН*, 29, 1976, 619—622.
4. Б. Царева. Силно паралелни ортогонални три-тъкани в тримерно пространство на Вайл. *Научни трудове, Пловд. унив., Мат.*, 22, кн. 2. 1984, 185—199.

Пловдивский университет
Пловдив 4000, Болгария

Поступила 4. II. 1987