Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ЧЕБЫШЕВА НА МАЖОРИЗАЦИОННЫХ КЛАССАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С МОМЕНТАМИ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Э. А. ДАНИЕЛЯН, К. Р. ТАТАЛЯН

Рассматривается задача нахождения границ функционала $\int_a^b \Omega(t)\,d\sigma(t)$ на мажоризационном классе распределений при ограничениях $c_{1i} \leqq \int_a^b u_i(t)\,d\sigma(t) \leqq c_{2i}$ $(i=\overline{1, n})$. Задача решена при определенных чебышевских условиях на систему $u_1, \ldots, u_n, \Omega$.

1. Введение. Экстремальные задачи проблемы моментов восходят к работам Чебышева, Стильтеса, Маркова. В классической литературе они, за редким исключением, рассматриваются на классе $\mathscr{F}_0$ всех распределений на $[a, b]$ $(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$. Современная теория изложена в монографиях [1, 2]. Методы в [1, 2] существенно используют свойства выпуклости класса распределений. Несколько имеющихся обобщений таких задач на другие классы сводят решение к классу $\mathscr{F}_0$, причем сведение необходимо предполагает наличие у классов определенных свойств выпуклости (см. [3—8], а также [2], с. 478—496).

В то же время многие, встречающиеся в приложениях, экстремальные задачи с моментными ограничениями ставятся на классах, не обладающих подобными свойствами, и поэтому здесь, как отмечал Р. Барлоу [9, с. 346], классические методы анализа экстремальных задач проблемы моментов неприменимы. Этим и объясняется рассмотрение многими авторами на таких классах лишь частных случаев экстремальных задач с малым числом моментных ограничений (см., например, [9, 10]).

Например, классы „стареющих" и „стареющих в среднем" распределений даже не образуют выпуклые классы (см. [11, с. 115]).

Многие встречающиеся в приложениях как выпуклые, так и невыпуклые классы $\mathscr{F}$ распределений обладают единой структурой, аксиоматическое задание которой определяет мажоризационный класс распределений [12].

Понятие мажоризации широко используется в [13—16]. Его обобщение — понятие k-мажоризации, введено в [17].

Говорят, что распределение ν k-мажоризирует $(k \geqq 1)$ распределение μ, и пишут $\mu \underset{k}{\prec} \nu$, если в R^1 существуют множества $A_1 < \cdots < A_k$ $(A < B \Leftrightarrow x < y$ для всех $x \in A$ $y \in B)$ такие, что: 1) $(-1)^{k-i}\Delta(t) > 0$ при $t \in A_i$ $(i=\overline{1, k};\ \Delta = \mu - \nu)$; 2) $\Delta(t) \equiv 0$ при $t \in R^1/\bigcup_{i=1}^k A_i$. При этом, $\mu \underset{0}{\prec} \nu$, если $\mu = \nu$.

Это понятие можно распространить и на множества распределений. Пишем, $A \underset{k}{\prec} B$, где A и B — множества распределений, если для любых $\mu \in A$, $\mu \in B$, либо $\mu \underset{m}{\prec} \nu$ $(m=\overline{0, k})$, либо $\nu \underset{s}{\prec} \mu$ $(s=\overline{0, k-1})$.

Понятие индекса можно ввести в произвольном классе распределений.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 14, 1988, с. 366—373.

Пусть U_k $(k \geqq 1)$ — множество распределений* $\sigma \in \overline{\mathscr{F}}$, для которых $\overline{\mathscr{F}} \underset{k}{\prec} \{\sigma\}$; L_k — множество распределений $\sigma \in \overline{\mathscr{F}}$, для которых $\{\sigma\} \underset{k}{\prec} \overline{\mathscr{F}}$; $I_k = U_k \cup L_k$; $I = \cup_{k \geq 1} I_k$. Для распределения $\sigma \in I$ минимальное k, для которого $\sigma \in I_k$ есть индекс σ в классе $\mathscr{F}$, причем индекс верхний (нижний), если $\sigma \in U_k$ $(\sigma \in L_k)$.

Определение 1. *Равномерно ограниченный класс $\mathscr{F}$ распределений на $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ назовем мажоризационным, если в нем выполнены условия*

1. *существуют распределения со сколь угодно большими индексами;*
2. *индекс распределения не может быть одновременно и верхним, и нижним;*
3. *для любого σ с индексом $k > 1$ существует содержащее σ непрерывное*[1] *$(k-1)$-параметрическое семейство $\{\sigma_{\vec{\alpha}} : \vec{\alpha} \in V \subset R^{k-1}\}$*[2] *распределений с индексом k, где V — открытое множество.*

Структура мажоризационных классов распределений изучена в [12].

Известные постановки экстремальных задач проблемы моментов распространяются и на мажоризационные классы.

В настоящей работе рассматривается экстремальная задача Чебышева с моментами из параллелепипеда на мажоризационных классах $\mathscr{F}$[3] функций распределения (ФР) на $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$.

Постановка задачи. Пусть $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, $\Omega(t)$ $(t \in [a, b])$ — непрерывные функции, c_{ji} $(j = 1, 2;\ i = \overline{1, n})$ — константы $(c_{1i} \leqq c_{2i})$. В классе ФР $(\sigma \in \overline{\mathscr{F}})$, удовлетворяющих неравенствам

$$c_{1i} \leqq \int_a^b u_i(t)\, d\sigma(t) \leqq c_{2i} \quad (i = \overline{1, n}), \tag{1}$$

найти максимум (минимум) интеграла

$$J(\sigma) = \int_a^b \Omega(t)\, d\sigma(t). \tag{2}$$

В **2** данная задача решается при соответствующих чебышевских условиях на систему $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, $\Omega(t)$.

В **3** устанавливается наличие мажоризационной структуры в классе „стареющих" ФР на $[a, b]$ и утверждения **2** уточняются для этого класса.

В **4** аналогичные вопросы, что и в **3**, рассматриваются для класса „стареющих в среднем" ФР на $[a, b]$.

2. Решение экстремальной задачи. Изучение экстремальных задач проблемы моментов на мажоризационных классах, как и в классическом случае класса $\mathscr{F}_0$, производится при соответствующих чебышевских условиях.

---

* Для класса A распределений $\overline{A}$ есть слабое замыкание A в классе всех распределений, т. е множество распределений вида $\{\sigma : \exists\, \sigma_i \in A,\ i \geq 1,\ \sigma_i \overset{i}{\Rightarrow} \sigma\}$, где $\Rightarrow$ означает сходимость значений σ_i, к значениям σ в точках непрерывности σ.

[1] Т. е. из $\alpha_i \overset{i}{\longrightarrow} \alpha$ $(\alpha_i, \alpha \in V)$ следует $\sigma_{\alpha_i} \overset{i}{\Rightarrow} \sigma_{\alpha}$.

[2] $\sigma_{\beta} \neq \sigma_{\gamma}$, когда $\beta \neq \gamma$ $(\beta, \gamma \in V)$.

[3] В данной работе полагаем $\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}$.

Определение 2. *Система функций* $v_1(t), \ldots, v_k(t)$ $(t \in [a, b])$ *удовлетворяет специальным чебышевским условиям* $A(B)$, *если*

1. *функции* $v_1(t), \ldots, v_k(t)$ *непрерывно-дифференцируемы;*

2. *при любом* i $(i=\overline{1, k})$ *система* $v_1'(t), \ldots, v_{i-1}'(t), v_{i+1}'(t), \ldots, v_k'(t)$ *образует* T_+-*систему* (*см.* [1], с. 50);

3. *система* $v_1'(t), \ldots, v_k'(t)$ $(v_1'(t), \ldots, v_{k-1}'(t), -v_k'(t))$ *образует* T_+-*систему.*

Специальным чебышевским условиям A и B удовлетворяют, например, системы $(\lambda>0,\ t>0)$:

$$t^1, \ldots, t^n,\ e^{\lambda t} \text{ и } t^1, \ldots, t^n,\ (-1)^{n+1} e^{-\lambda t}$$

соответственно.

Пусть $\mathscr{F}$ — мажоризационный класс ФР на $[a, b]$; $M(\mathscr{F})$ — множество векторов $\mathbf{c}=(c_1, \ldots, c_n)$, допускающих представления

$$c_i = c_i(\sigma) \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b u_i(t)\, d\sigma(t) \quad (i=\overline{1, n};\ \sigma \in \mathscr{F}). \tag{3}$$

При специальных чебышевских условиях A или B на систему функций $u_1, \ldots, u_n$, для любого $\mathbf{c}=(c_1, \ldots, c_n) \in M(\mathscr{F})$, согласно теореме 4 из [12] в классах U_{n+1} и L_{n+1} соответственно существуют и единственны ФР $\sigma_{\mathbf{c}}^*$ и $\sigma_{*\mathbf{c}}$, удовлетворяющие равенствам (3).

Введем векторы

$$\mathbf{c}_* = (c_{*1}, \ldots, c_{*n}) = \begin{cases} (c_{11},\ c_{22},\ c_{13},\ c_{24}, \ldots, c_{1n}), & n \text{ нечетно,} \\ (c_{21},\ c_{12},\ c_{23},\ c_{14}, \ldots, c_{1n}), & n \text{ четно,} \end{cases}$$

$$\mathbf{c}^* = (c_1^*, \ldots, c_n^*) = \begin{cases} (c_{21},\ c_{12},\ c_{23},\ c_{14}, \ldots, c_{2n}), & n \text{ нечетно,} \\ (c_{11},\ c_{22},\ c_{13},\ c_{24}, \ldots, c_{2n}), & n \text{ четно.} \end{cases}$$

Основной результат работы содержится в утверждении.

Теорема 1. *Пусть*

1. *система функций* $u_1(t), \ldots, u_n(t),\ \Omega(t)$ *удовлетворяет специальным чебышевским условиям* A *или* B;

2. $\mathbf{c}_*,\ \mathbf{c}^* \in M(\mathscr{F})$.

Тогда максимум (минимум) интеграла (2) *на классе* $\mathscr{F}$ *с ограничениями* (1) *достигается при условиях* A *на единственной ФР* $\sigma_{\mathbf{c}^*}^*$ $(\sigma_{*\mathbf{c}_*})$, *а при условиях* B — *на единственной ФР* $\sigma_{*\mathbf{c}^*}$ $(\sigma_{\mathbf{c}_*}^*)$.

Для доказательства теоремы 1 нам необходимы

1. характеризация пространства моментов $M(\mathscr{F})$;

2. раскрытие смысла введения понятия k-мажоризации.

Заслуживает внимания следующая характеризация пространства моментов $M(\mathscr{F})$. Определим $\pi[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2] = \{\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n):\ c_{1i} \leqq x_i \leqq c_{2i}\ (i=\overline{1, n})\}$, где $\mathbf{c}_j=(c_{j1}, \ldots, c_{jn})$ $(j=\overline{1, 2})$.

Теорема 2. *Пусть*

1. *система функций* $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ *удовлетворяет чебышевским условиям* A *или* B;

2. $\mathbf{c}_*,\ \mathbf{c}^* \in M(\mathscr{F})$.

Тогда $\mathbf{c} \in \operatorname{Int} M(\mathscr{F})$ *для всех* $\mathbf{c} \in \pi[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}_*,\ \mathbf{c}^*$.

Следующее утверждение раскрывает целесообразность введения в нашем случае понятия k-мажоризации.

Теорема 3. *Пусть*

1. *система функций* $u_1(t), \ldots, u_n(t),\ \Omega(t)$ *удовлетворяет специальным чебышевским условиям* A (B);

2. *ФР μ и ν на $[a, b]$ таковы, что $(-1)^{n-i} c_i(\mu) \leqq (-1)^{n-i} c_i(\nu)$ при всех i* $(i=\overline{1, n})$.

Тогда из отношения $\{\mu\} \underset{n+1}{\prec} \{\nu\}$ $(\{\nu\} \underset{n+1}{\prec} \{\mu\})$ вытекает $J(\mu) < J(\nu)$.

Доказательство теоремы 3. Теорема 3 эквивалентна следующему утверждению 1.

Пусть

1. Система функций $v_1(t), \ldots, v_k(t)$ $(t \in [a, b])$ удовлетворяет специальным чебышевским условиям A (B);

2. ФР μ и ν таковы, что

$$(-1)^{k-i} \int_a^b v_i(t)\, d\mu(t) \leqq (-1)^{k-i} \int_a^b v_i(t)\, d\nu(t) \tag{4}$$

при всех i $(i=\overline{1, k})$.

Тогда отношение $\{\nu\} \underset{k}{\prec} \{\mu\}$ $(\{\mu\} \underset{k}{\prec} \{\nu\})$ невозможно.

Действительно, полагая $k=n+1$, $v_i=u_i$ $(i=\overline{1, n})$, $v_{n+1}=\Omega$, замечаем, что при невыполнении теоремы 3, т. е. $J(\mu) \geqq J(\nu)$, согласно утверждению 1, отношение $\{\mu\} \underset{n+1}{\prec} \{\nu\}$ $(\{\nu\} \underset{n+1}{\prec} \{\mu\})$ невозможно.

Обратно, при невыполнении утверждения 1 существуют удовлетворяющие (4) ФР μ и ν такие, что $\{\nu\} \underset{n+1}{\prec} \{\mu\}$ $(\{\mu\} \underset{n+1}{\prec} \{\nu\})$. Тогда, в силу теоремы 3, $J(\mu) > J(\nu)$, что противоречит (4).

Докажем утверждение 1. Допустим противное: имеет место одно из отношений а) $\nu \underset{p}{\prec} \mu$ $(p=\overline{1, k})$, б) $\mu \underset{l}{\prec} \nu$ $(l=\overline{1, k-1})$. Пусть $x_0 \overset{\text{def}}{=\!=} -\infty$, $x_k \overset{\text{def}}{=\!=} +\infty$; $x_1, \ldots, x_s$ $(a < x_1 < \cdots < x_s > b)$ — точки перемен знака функции $\Delta = \mu - \nu$;

$$d_i = \int_a^b v_i(t)\, d\Delta(t) \quad (i=\overline{1, k}).$$

Дополним последовательность $x_1, \ldots, x_k$ такими точками $x_{s+1}, \ldots, x_{k-1}$, что $x_s < x_{s+1} < \cdots < x_{k-1} < +\infty$ и $\Delta(t) \not\equiv 0$ на каждом интервале (x_j, x_{j+1}) $(j=\overline{s, k-1})$. Тогда

$$\mathscr{D} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{vmatrix}, \text{ где } \mathscr{D} = \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} v_i'(t)\, |\Delta(t)|\, dt \right\|_{i,j=1}^{k}, \tag{5}$$

а числа $h_1, \ldots, h_k$ равны либо 1, либо -1. При этом, $h_k=1$ в случае а) и $h_{k-1}=-1$ в случае б).

Обозначим через $\mathscr{D}_j^i$ $(i, j=\overline{1, k})$ матрицу, получающуюся из $\mathscr{D}$ удалением i-ой строки и j-го столбца. Из (5) вытекают равенства

$$h_{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i-1} d_i \cdot \det \mathscr{D}_{k-1}^i}{\det \mathscr{D}};$$

$$h_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i} d_i \cdot \det \mathscr{D}_k^i}{\det \mathscr{D}}.$$

Из условия 1, утверждения 1 и теоремы о среднем значении интеграла вытекает, что $\det\mathscr{D}>0$ и $\det\mathscr{D}_j^i>0$ $(i,\ j=\overline{1,\ k})$. Согласно условию 2 $(-1)^{k-i}d_i\leq 0$ $(i=\overline{1,\ k})$, что влечет $h_{k-1}\geq 0$, $h_k\leq 0$, а, следовательно, и $h_{k-1}=1$, $h_k=-1$. Получили противоречие.

Случай чебышевских условий B рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы 2. Допустим противное, тогда найдется точка $\mathbf{c}^0\in R^n$ такая, что $\mathbf{c}^0=(c_1^0,\ldots,c_n^0)\in\pi[\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2]$, $\mathbf{c}^0\neq\mathbf{c}_*$, $\mathbf{c}^*$ и $\mathbf{c}^0\in\partial M(\mathscr{F})$. Согласно теореме 4 из [12] существует ФР $\sigma^0\in I_n$ такая, что $c_i(\sigma^0)=c_i^0$ $(i=\overline{1,\ n})$. Из определения I_n следует хотя бы одно из отношений $\{\sigma^0\}\underset{n}{\prec}\{\sigma^*_{\mathbf{c}_*}\}$ и $\{\sigma^*_{\mathbf{c}_*}\}\underset{n}{\prec}\{\sigma^0\}$. Оба противоречат утверждению 1.

Доказательство теоремы 1. В силу $\mathscr{F}=\bar{\mathscr{F}}$, супремум интеграла (2) на классе $\mathscr{F}$ с ограничениями (1) достижим. Допустим, утверждение теоремы 1 не имеет места, т. е. максимум интеграла (2) достигается на удовлетворяющей (1) ФР $\sigma^0\in\mathscr{F}$, $\sigma^0\neq\sigma^*_{\mathbf{c}_*}$. Так как $\sigma^*_{\mathbf{c}^*}\in u_{n+1}$, то $\{\sigma^0\}\underset{n+1}{\prec}\{\sigma^*_{\mathbf{c}^*}\}$. Согласно теореме 3, из $J(\sigma^0)\geq J(\sigma^*_{\mathbf{c}^*})$ следует, что $\mathbf{c}=(c_1(\sigma^0),\ldots,c_n(\sigma^0))\neq\mathbf{c}^*$.

Обозначим

$$M_{n+1}(\mathscr{F})=\{\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n):\ x_i=c_i(\sigma)\quad(i=\overline{1,\ n});\ x_{n+1}=J(\sigma);\ \sigma\in\mathscr{F}\}.$$

$$\mathbf{c}'=(c_1',\ldots,\ c_n')=\frac{\mathbf{c}^0+\mathbf{c}^*}{2};\ \mathbf{x}'=(c_1',\ldots,\ c_n',\ J(\sigma^0));$$

$$\mathbf{x}^0=(x_1^0,\ldots,x_{n+1}^0)=(c_1(\sigma^0),\ldots,c_n(\sigma^0),\ J(\sigma^0));$$

$$\mathbf{x}^*=(x_1^*,\ldots,x_{n+1}^*)=(c_1^*,\ldots,c_n^*,\ J(\sigma^*_{\mathbf{c}^*})).$$

Так как $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^0\in M_{n+1}(\mathscr{F})$ и

$$(-1)^{n+1-i}x_i^*\leq(-1)^{n+1-i}x_i^0\quad(i=\overline{1,\ n+1}),$$

то в силу теоремы 2, $\mathbf{x}'\in\operatorname{Int}M_{n+1}(\mathscr{F})$. Следовательно, существует $\varepsilon>0$ такое, что $(c_1',\ldots,\ c_n',\ J(\sigma^0)+\varepsilon)\in M_{n+1}(\mathscr{F})$. Так как $\mathbf{c}'\in\pi[\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2]$, то налицо противоречие.

Аналогичным образом изучаются случаи минимума и чебышевских условий B.

3. Экстремальная задача в классе „стареющих“ ФР на $[a,\ b]$. В математической теории надежности понятие „старения“ элементов и систем весьма важно, поэтому „стареющие“ ФР вызывают большой интерес.

Определение 3. *ФР σ на $[a,\ b]$ называется „стареющей“, если функция $r_0(t)=-\ln(1-\sigma(t))$ выпукла (полагаем $\ln 0=-\infty$).*

Имеет место взаимно однозначное соответствие между классами $\mathscr{F}_1$ „стареющих“ ФР на $[a,\ b]$ и R — всех непрерывных слева, неубывающих, выпуклых функций, равных 0 на $(-\infty,\ a]$ и $+\infty$ на $(b,\ +\infty)$. При этом, так как функция $1-e^{-x}$ по $x\in[0,\ +\infty)$ строго возрастает, то для ФР σ, τ, $\tau_i\in\mathscr{F}_1$ $(i\geq 1)$ имеем $(t\in(-\infty,\ +\infty))$:

1. При $i\to\infty$ соотношения $\tau_i(t)\xrightarrow{i}\tau(t)$ и $r_{\tau_i}(t)\xrightarrow{i}r_\tau(t)$ эквивалентны.

2. Неравенства $\tau(t)<(>)\,\sigma(t)$ и $r_\tau(t)<(>)\,r_\sigma(t)$ эквивалентны.

Покажем, что класс $\mathscr{F}_1$ является мажоризационным.

Класс $\mathscr{F}_1$ слабо замкнут, а I — множество ФР $\sigma\in\mathscr{F}_1$ таких, что график функции $r_\sigma(t)$ на множестве тех t, для которых $r_\sigma(t)<+\infty$, представляет собой выпуклую ломаную с конечным числом звеньев.

ФР вида

$$(6)\qquad \sigma(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -\infty<t\leqq a,\\ 1-\exp\left[-\sum_{j=0}^{i-1}\lambda_j(x_{j+1}-x_j)-\lambda_i(t-x_i)\right] & \text{при} \quad x_i<t\leqq x_{i+1} \quad (i=\overline{0,\ k}),\\ 1 & \text{при} \quad x_{k+1}<t<+\infty,\end{cases}$$

где $k\geqq 0$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_{k+1}\leqq b$, $0\leqq\lambda_0<\cdots<\lambda_k<+\infty$, и ФР $\tau_0(t)=\{0$ при $-\infty<t\leqq a$, 1 при $a<t<+\infty\}$ образуют класс I.

Индекс ФР σ, имеющей вид (6), равен $2k+1$, если $x_{k+1}=b$, $\lambda_0=0$; $2k+2$, если $x_{k+1}\neq b$, $\lambda_0=0$ или $x_{k+1}=b$, $\lambda_0\neq 0$; $2k+3$, если $x_{k+1}\neq b$, $\lambda_0\neq 0$. При этом, индекс нижний, если $x_{k+1}\neq b$, и верхний, если $x_{k+1}=b$. Индекс ФР τ_0 является нижним и равен 1.

Действительно, пусть ФР σ имеет вид (6), а $\pi\in\mathscr{F}_1$. Так как $r_\pi\in R$, то функция* $r_\sigma-r_\pi$.

а) на $(-\infty,\ x_1)$ имеет не более одной перемены знака, причем перемены знака не происходит, когда $\lambda_0=0$;

б) на каждом интервале $[x_i,\ x_{i+1})$ $(i=\overline{1,\ k})$ имеет не более двух перемен знака;

в) на $[x_{k+1},\ +\infty)$ имеет не более одной перемены знака, причем перемены знака не происходит, когда $x_{k+1}=b$. Итого, происходит не более $2k+2$ перемен знака, если $x_{k+1}\neq b$, $\lambda_0\neq 0$; $2k+1$ перемен знака, если $x_{k+1}=b$, $\lambda_0\neq 0$ или $x_{k+1}\neq b$, $\lambda_0=0$; $2k$ перемен знака, если $x_{k+1}=b$, $\lambda_0=0$. С другой стороны, всегда найдется функция $r(t)\in R$, пересекающая функцию $r_\sigma(t)$ названное число раз. В этом случае, на последнем интервале знакопостоянства функции $r_\sigma(t)-r(t)$ она неотрицательна, если $x_{k+1}\neq b$, и неположительна, если $x_{k+1}=b$.

Справедливость условий 1 и 2 определения 1 в данном случае очевидна.

ФР с индексом $m>1$ имеют вид (6), где

$$(7)\qquad \begin{aligned} &k=\frac{m}{2}-1,\ x_{k+1}=b,\ \lambda_0\neq 0, \text{ если } m \text{ четно, индекс верхний};\\ &k=\frac{m-1}{2},\ x_{k+1}=b,\ \lambda_0=0, \text{ если } m \text{ нечетно, индекс верхний};\\ &k=\frac{m}{2}-1,\ x_{k+1}\neq b,\ \lambda_0=0, \text{ если } m \text{ четно, индекс нижний};\\ &k=\frac{m-3}{2},\ x_{k+1}\neq b,\ \lambda_0\neq 0, \text{ если } m \text{ нечетно, индекс нижний}.\end{aligned}$$

Тогда из (6) и (7) следует условие 3 определения 1.

Экстремальная задача свелась к определению ФР $\sigma^*_{c^*}$, $\sigma^*_{c_*}$, σ_{*c^*} и σ_{*c_*} в классе $\mathscr{F}_1$.

В теореме 4 из [12] показано, что при $\mathbf{c}\in\operatorname{Int}M(\mathscr{F})$ ФР $\sigma^*_{\mathbf{c}}$ $(\sigma_{*\mathbf{c}})$ имеет верхний (нижний) индекс $n+1$, при $\mathbf{c}\in\partial M(\mathscr{F})$ ФР $\sigma^*_{\mathbf{c}}$ $(\sigma_{*\mathbf{c}})$ имеет индекс, не превосходящий n. В последнем случае $\sigma^*_{\mathbf{c}}=\sigma_{*\mathbf{c}}$ и $\sigma^*_{\mathbf{c}}$ единственная, удовлетворяющая (3) ФР во всем классе $\mathscr{F}$.

Таким образом,

1°. При $\mathbf{c}\in\operatorname{Int}M(\mathscr{F})$ФР $\sigma^*_{\mathbf{c}}$ $(\sigma_{*\mathbf{c}})$ находится в n-параметрическом семействе ФР с верхним (нижним) индексом $n+1$. При этом $\sigma^*_{\mathbf{c}}$ $(\sigma_{*\mathbf{c}})$ единственная ФР в этом классе, удовлетворяющая (3).

---

* Условимся, что $+\infty-c=+\infty$, $c-(+\infty)=-\infty$, $+\infty-(+\infty)=0$ (c — константа).

2^0. При $\mathbf{c} \in \partial M(\mathscr{F})$ ФР $\sigma^*_{\mathbf{c}}$ $(\sigma_{*\mathbf{c}})$ находится в семействе ФР с индексом, не превосходящим n. При этом, $\sigma^*_{\mathbf{c}} = \sigma_{*\mathbf{c}}$ и $\sigma^*_{\mathbf{c}}$ — единственная ФР в этом семействе (и вообще во всем $\mathscr{F}_1$), удовлетворяющая (3).

4. Экстремальная задача в классе „стареющих в среднем“ ФР на $[a, b]$.

О п р е д е л е н и е 4. *ФР σ на $[a, b]$ называется „стареющей в среднем“, если функция $p_\sigma(t) = -(t-a)^{-1} \ln(1-\sigma(t))$ $(t \in (a, b))$ не убывает.*

Имеет место взаимно однозначное соответствие между классами $\mathscr{F}_2$ „стареющих в среднем“ ФР на $[a, b]$ и P — всех непрерывных слева, неубывающих функций на (a, b), предел справа которых в точке a равен нулю. При этом, так как функция $1-e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0,\ x > 0)$ строго возрастает по x, то для ФР $\sigma, \tau, \tau_i \in \mathscr{F}_2$ $(i \geq 1)$ имеем $(t \in (a, b))$.

1. При $i \to \infty$ соотношения $\tau_i(t) \xrightarrow{i} \tau(t)$ и $p_{\tau_i}(t) \xrightarrow{i} p_\tau(t)$ эквивалентны;

2. Неравенства $\tau(t) < (>) \sigma(t)$ и $p_\tau(t) < (>) p_\sigma(t)$ эквивалентны.

Покажем, что класс $\mathscr{F}_2$ является мажоризационным.

Класс $\mathscr{F}_2$ слабо замкнут, а I — множество ФР $\sigma \in \mathscr{F}_2$ таких, что $p_\sigma(t)$ является ступенчатой функцией с конечным числом точек роста.

ФР вида

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < t \leq a, \\ 1 - \exp[-\lambda_i (t-a)] & \text{при} \quad x_i < t \leq x_{i+1} \quad (i = \overline{0, k}), \\ 1 & \text{при} \quad x_{k+1} < t < +\infty, \end{cases} \tag{8}$$

где $k \geq 0$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k+1} \leq b$, $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < +\infty$, и ФР $\tau_0(t)$ образуют класс I.

Индекс ФР σ, имеющей вид (8), равен $2k+1$, если $x_{k+1} = b$, $\lambda_0 = 0$; $2k+2$, если $x_{k+1} = b$, $\lambda_0 \neq 0$ или $x_{k+1} \neq b$, $\lambda_0 = 0$; $2k+3$, если $x_{k+1} \neq b$, $\lambda_0 \neq 0$. При этом индекс нижний, если $x_{k+1} \neq b$, и верхний, если $x_{k+1} = b$. Индекс ФР τ_0 является нижним и равен 1.

Действительно, пусть ФР σ имеет вид (8), а $\pi \in \mathscr{F}_2$. Так как $p_\pi \in P$, то функция $p_\sigma - p_\pi$.

а) на (a, x_1) имеет не более одной перемены знака, причем перемены знака не происходит, когда $\lambda_0 = 0$;

б) на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) $(i = \overline{1, k})$ имеет не более одной перемены знака;

в) на (x_k, b) не имеет перемен знака;

г) в каждой точке x_i $(i = \overline{1, k+1})$ имеет, естественно, не более одной перемены знака, причем в точке x_{k+1} перемены знака не происходит, когда $x_{k+1} = b$. Итого, происходит не более $2k+2$ перемен знака, если $\lambda_0 \neq 0$, $x_{k+1} \neq b$; $2k+1$ перемен знака, если $\lambda_0 = 0$, $x_{k+1} \neq b$ или $\lambda_0 \neq 0$, $x_{k+1} = b$; $2k$ перемен знака, если $\lambda_0 = 0$, $x_{k+1} = b$. С другой стороны, всегда найдется функция $p(t) \in P$, пересекающая функцию $p_\sigma(t)$ названное число раз. В этом случае на последнем интервале знакопостоянства функции $p_\sigma(t) - p(t)$ она неотрицательна, если $x_{k+1} \neq b$, и неположительна, если $x_{k+1} = b$.

Справедливость условий 1 и 2 определения 1 в данном случае очевидна.

ФР с индексом $m > 1$ имеют вид (8) с параметрами, удовлетворяющими (7). Условие 3 определения 1 следует из (8) и (7).

Экстремальная задача свелась к определению ФР $\sigma^*_{\mathbf{c}^*}$, $\sigma^*_{\mathbf{c}_*}$, $\sigma_{*\mathbf{c}^*}$, $\sigma_{*\mathbf{c}_*}$ в классе $\mathscr{F}_2$.

Таким образом, и для класса $\mathscr{F}_2$ выполнены утверждения 1^0 и 2^0 3, но со своим определением индекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.
2. С. Карлин, В. Стадден. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М., 1976.
3. N. L. Johnson, C. A. Rogers. The moment problem for unimodal distributions. *Ann. Math. Stat.*, 22, 1951, 433-439.
4. H. L. Rouden. Bounds on a distribution function when its first *n* moments are given. *Ann. Math. Stat.*, 24, 1953, 361-376.
5. C. L. Mallows. Generalization of Tchebysheffs inequalities. *J. Roy. Stat. Soc., Ser. B*, **18**, 1956, 139-176.
6. C. L. Mallows. A generalization of Chebyshev inequalities. *Proc. London Math. Soc., Third Ser.*, 13, 1963, 385-412.
7. H. P. Mulholland, C. A. Rogers. Representation theorems for distribution functions. *Proc. London Math. Soc.*, 8, 1958, 177-223.
8. J. H. B. Kemperman. Moment problems with convexity conditions. I. — In Optimizing methods in statistics. 1971, 115-178.
9. Р. Барлоу, Ф. Прошан. Математическая теория надежности. М., 1969.
10. R. E. Barlow, A. W. Marshall. Bounds for distributions with monotone hazard rate, I and II. *Ann Math. Stat.*. 35, 1964, 1234-1274.
11. Р. Барлоу, Ф. Прошан. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М., 1984.
12. Э. А. Даниелян, К. Р. Таталян. О проблеме моментов на мажоризируемых классах. — Ереван. Межвуз. сб. науч. тр. ЕГУ, *Прикладная математика*, № 5, 1987.
13. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. М., 1948.
14. Э. Беккенбах, Р. Беллман. Неравенства. М., 1965.
15. А. Маршалл, И. Олкин. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М., 1983.
16. Д. Штойян. Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М., 1979.
17. Э. А. Даниелян, К. Р. Таталян. О двух мажоризационных теоремах, связанных с проблемой моментов. — Ереван. Межвуз. сб. науч. тр., ЕГУ, *Математика*, № 6, 1987.

Ереванский Государственный университет
г. Ереван, Армянская ССР

Поступила 18. 11. 1987