# Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

# Сердика

Българско математическо
списание

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУСТОРОННИХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

НИКОЛАЙ В. КЮРКЧИЕВ

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где $f$ — достаточно гладкая функция. Обозначим $\xi$ точное решение уравнения (1). Предположим, что нами указано для $\xi$ исходное приближение $x_0$. Рассмотрим погрешность исходного приближения $h=\xi-x_0$. Для составления уравнения, из которого может быть найдена погрешность, достаточно в равенство $f(\xi)=0$ вместо $\xi$ подставить его значение $x_0+h$:

$$f(x_0+h)=0. \tag{2}$$

По формуле Тейлора имеем

$$0=f(\xi)=f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+\cdots \tag{3}$$

Сохраняя в (3) только два главных члена, находим

$$f(x_0)+hf'(x_0)=0, \quad h=-f(x_0)/f'(x_0)$$

$$x_1=x_0+h=x_0-f(x_0)/f'(x_0) \quad \text{(метод Ньютона).}$$

В работе Н. Обрешкова [1] рассматриваются методы уточнения корней нелинейного уравнения (1), использующих квадратичные функции. Показано, что если хотим увеличить скорость убывания $h$, достаточно выполнить разложение правой части (3), сохраняя лишь члены до второго порядка относительно $h$:

$$f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)=0.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} h&=(-f(x_0)\pm\sqrt{f'^2(x_0)-2f(x_0)f''(x_0)})/f''(x_0)\\ x_1&=x_0+h=x_0+(-f(x_0)+\varepsilon\sqrt{f'^2(x_0)-2f(x_0)f''(x_0)})/f''(x_0), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\varepsilon=\operatorname{sgn} f'(x_0)$.

Для итерационного процесса

$$\begin{aligned} x_{i+1}&=x_i+(-f'(x_i)+\varepsilon_i\sqrt{f'^2(x_i)-2f(x_i)f''(x_i)})/f''(x_i),\\ \varepsilon_i&=\operatorname{sgn} f'(x_i), \end{aligned} \tag{5}$$

получается [1]:

$$\lim\nolimits_{i\to\infty}((\xi-x_{i+1})(\xi-x_i)^{-3})=-f'''(\xi)/6f'(\xi),$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 15, 1989, с. 16—18.

т. е. процесс имеет порядок сходимости $\tau=3$. Обрешков показал, что можно расширить список итерационных методов.

В [2] рассматриваются двусторонние методы типа Чебышева произвольного порядка сходимости. В этой статье рассматриваются двусторонние методы типа Н. Обрешкова для уточнения корней уравнения (1).

Пусть для итерационного решения уравнения (1) задан процесс:

$$\begin{aligned} &T_1(x_i)=x_i-f(x_i)/f'(x_i).\\ (6)\qquad &T_2(x_i)=x_i+f(x_i)/f'(x_i)+2(-f'(x_i)+\varepsilon_i\sqrt{f'^2(x_i)-2f(x_i)f''(x_i)})/f''(x_i),\\ &\varepsilon_i=\operatorname{sgn} f'(x_i),\quad i=0,\,1,\,2,\dots \end{aligned}$$

Справедлив следующий результат

Теорема. *Пусть выполняются условия*

1) *функция* $f(x)$ *определена и дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня* $\xi$;

2) $f'(x_i)\neq 0$; $D=f'^2(x_i)-2f(x_i)f''(x_i)>0$;

3) *приближения* $x_i$ *взяты достаточно близкими к* $\xi$.

*Тогда*

1) $(T_1(x_i)-\xi)\,(T_2(x_i)-\xi)\leq 0,\quad i=0,\,1,\,2,\dots$

2) $\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{\xi-T_1(x_i)}{(\xi-x_i)^2}=-\dfrac{1}{2}\,f''(\xi)/f'(\xi),$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\xi-T_2(x_i)}{(\xi-x_i)^2}=\frac{1}{2}\,f''(\xi)/f'(\xi).$$

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$f(\xi)=f(x_i)+(\xi-x_i)f'(x_i)+\frac{(\xi-x_i)^2}{2}f''(\eta)=0,$$

где $\eta$ расположено между $x_i$ и $\xi$. Тогда известно, что

$$\xi-T_1(x_i)=-\frac{1}{2}\,(\xi-x_i)^2f''(\eta)/f'(x_i). \tag{7}$$

Так как

$$T_2(x_i)=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}+2\,\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}+2\,(-f'(x_i)+\varepsilon_i\sqrt{f'^2(x_i)-2\,f(x_i)f''(x_i)})/f''(x_i),$$

то для разности $\xi-T_2(x_i)$ получаем

$$\begin{aligned} (8)\qquad \xi-T_2(x_i)&=\xi-T_1(x_i)-2\,\frac{-f'^2(x_i)+f(x_i)f''(x_i)+\varepsilon_i f'(x_i)\sqrt{f'^2(x_i)-2\,f(x_i)f''(x_i)}}{f'(x_i)f''(x_i)}\\ &=-\frac{1}{2}\,(\xi-x_i)^2\,\frac{f''(\eta)}{f'(x_i)}-2\,\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}\cdot\frac{(-(\xi-x_i)f'(x_i)-\frac{1}{2}\,(\xi-x_i)^2f''(\eta))^2}{(f(x_i)f''(x_i)-f'^2(x_i)-\varepsilon_i f'(x_i)\sqrt{f'^2(x_i)-2\,f(x_i)f''(x_i)}} \end{aligned}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\lim_{i\to\infty}((\xi-T_1(x_i))/(\xi-x_i)^2)=-\frac{1}{2}\,f''(\xi)/f'(\xi),$$

$$\lim_{i\to\infty}((\xi-T_2(x_i))/(\xi-x_i)^2)=-\frac{1}{2}\,f''(\xi)/f'(\xi)+f''(\xi)/f'(\xi)=\frac{1}{2}\,f''(\xi)/f'(\xi).$$

Таким образом, мы показали, что $T_1(x_i)$ и $T_2(x_i)$ лежат по разным сторонам от корня $\xi$.

Теорема доказана.

Перечень подобных правил нетрудно продолжить, но анализ таких методов трудоемок. Ниже мы дадим очень краткое описание некоторых направлений, в которых можно изменять метод для получения двусторонних итераций. Способ получения их аналогичен тому, который был применен в [2], и поэтому мы ограничимся только объяснением наглядной стороны дела.

Пусть $h_1$ есть корень уравнения

$$f(x_i)+hf'(x_i)+\ldots+h^k\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}=0,$$

а $h^*$ — корень уравнения

$$f(x_i)+hf'(x_i)+\cdots+h^{k+1}\frac{f^{(k+1)}(x_i)}{(k+1)!}=0,$$

то тогда для процесса

$$\begin{aligned}&T_1(x_i)=x_i+h_1\\ &T_2(x_i)=x_i+h_2,\quad h_2=2h^*-h_1,\quad i=0,1,\ldots\end{aligned}\tag{9}$$

можно показать, что $(T_1(x_i)-\xi)(T_2(x_i)-\xi)\leq 0,\ \ i=0,1,2,\ldots$

| $n$ | $x_n$ | $T_1(x_n)$ | $T_2(x_n)$ | $x_{n\text{н}}=\frac{1}{2}(T_1(x_n)+T_2(x_n))$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.9 | 0.997276034 | 1.003148860 | 1.000212447 |
| 1 | 1.000212447 | 0.999999989 | 1.000000011 | 1.000000000 |

Приведем пример применения метода (6). Пусть дано уравнение $f(x)=x+\ln x-1=0$. Результаты расчетов с начальным приближением $x_0=0.9$ приведены ниже.

Точное решение этого уравнения $\xi=1$. Эксперименты, проведенные по алгоритму (6), показали его быструю работу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Обрешков, Н. Върху численото решение на уравненията посредством квадратни уравнения. *Год. Соф. унив. Физ. мат. фак.*, 55, 1962, 211—228.

2. Kjurkchiev, N., A. Andreev. Two-sided analog of the Chebyschev's method. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 41, 1988, № 4, 17—19.

*Единый центр математики и механики*
*София 1090 П Я 373*

*Поступила 15. 2. 1988*