Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ÜBER DAS KRITISCHE VERHALTEN ZYLINDRISCHER ABSTANDSFUNKTIONEN AUF UNTERMANNIGFALTIGKEITEN EUKLIDISCHER RÄUME

BERND WEGNER

J. Milnor [5] has given the basis for the study of the critical behavior of height and distance functions for manifolds which are immersed in euclidean space. Several recent papers use these investigations to characterize certain submanifolds of euclidean spaces or space forms by special properties of these functions. Especially tight and taut immersions have to be mentioned in this context (see. e. g. [2, 4, 7, 8]). Recently S. Carter, N. G. Mansour and A. West [1] generalized these notions in their paper on cylindrically taut immersions, making similar assumptions for distance functions to affine subspaces of euclidean space. Here an outline of Milnor's program will be given for these cylindrical distance functions. It will be shown that almost all of them are nondegenerate in a sense that Morse inequalities can be developed. Additionally a special version of the Morse-Index-Theorem can be shown.

1. Zylindrische Abstandsfunktionen. Motivation und Ziele dieser Arbeit sind im vorangegangenen Abstract geschildert. Sei nun $x: M \to E^n$ eine C^∞-Immersion der m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M in den n-dimensionalen euklidischen Raum. Sei H ein k-dimensionaler affiner Unterraum (k-Ebene) von E^n, $P_0 \in H$. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung $\underline{0}$ und orthonormierten Achsenvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ von E^n, so daß e_i für $i=1, \dots, n-k$ zu H senkrecht steht. $\mathfrak{H}$ sei die zu H parallele k-Ebene durch $\underline{0}$, $\mathfrak{H}^\perp$ ihr orthogonales Komplement durch $\underline{0}$. Die senkrechte Projektion $\mathrm{pr}: E^n \to \mathfrak{H}^\perp$ wird in den gegebenen Koordinaten durch

$$\mathrm{pr}(p) = \sum_{i=1}^{n-k} \langle p - \underline{0}, e_i \rangle e_i \tag{1.1}$$

beschrieben, wobei $\langle , \rangle$ die Metrik von E^n angibt. Die quadratische Abstandsfunktion zur k-Ebene H, eingeschränkt auf M, nennen wir zylindrische Abstandsfunktion auf M mit Achse H, $d_H: M \to \mathbb{R}$. Sie ist nach (1.1) gegeben durch

$$d_H(u) = \sum_{i=1}^{n-k} \langle x(u) - p_0, e_i \rangle^2 = \| \mathrm{pr}(x(u) - p_0) \|^2. \tag{1.2}$$

Sie ist offenbar von der Klasse C^∞ und enthält $x^{-1}(H)$ in der Menge ihre kritischen Punkte. Ein Wechsel von p_0 in H ändert d_H nicht.

Bezeichne T_uM den Tangentialraum von M in u. Wie üblich wird T_uM mit $x_*(T_uM)$ identifiziert und der Nullvektor $\mathfrak{o}$ von T_uM mit $\underline{0}$. Analog betrachten wir den Normalraum N_uM von x in u.

Behauptung 1: *u ist kritischer Punkt von d_H. $\Leftrightarrow \mathrm{pr}(x(u) - p_0) \in N_uM$.*

Beweis: Zu untersuchen ist, wann das totale Differential von d_H verschwindet. Seien $u_1, \dots, u_m$ Koordinaten um u:

$$\frac{\partial d_H}{\partial u_j}\Big|_u = 2\langle \mathrm{pr}(x(u) - p_0), \mathrm{pr}\Big(\frac{\partial x}{\partial u_j}\Big|_u\Big)\rangle = 2\langle \mathrm{pr}(x(u) - p_0), \frac{\partial x}{\partial u_j}\Big|_u\rangle. \tag{1.3}$$

Daraus folgt Behauptung 1 unmittelbar.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 15, 1989, p. 19—27.

Zur Untersuchung, welchen Typ solch ein kritischer Punkt hat, wollen wir O. B. d. A annehmen, daß p_0 Fußpunkt des Lotes von $x(u)$ auf H ist und $x(u) \notin H$ gilt. Dann haben wir

$$\operatorname{pr}(x(u)-p_0) = x(u)-p_0 \neq v.$$

Sei $\Delta = \| x(u)-p_0 \|$; $(x(u)-p_0)/\Delta =: e$ ist im kritischen Fall nach Behauptung 1 Einheitsnormale von x in u und zu H senkrecht. Die Berechnung der Hesseform von d_H ergibt dann nach (1.2) und (1.3)

$$\frac{\partial^2 d_H}{\partial u_l \partial u_j u}\Big|_u = 2(\langle x(u)-p_0, \frac{\partial^2 x}{\partial u_l \partial u_j}\Big|_u\rangle + \langle \operatorname{pr}(\frac{\partial x}{\partial u_l})\Big|_u, \operatorname{pr}(\frac{\partial x}{\partial u_j})\Big|_u\rangle). \tag{1.4}$$

Bezeichnet pt die orthogonale Projektion von E^n auf T_uM, α die zweite Fundamentalform von x in u in Richtung e, β die durch

$$\beta(X, Y) = \langle \operatorname{pr}(X), \operatorname{pr}(Y) \rangle$$

definierte symmetrische Bilinearform auf T_uM, so läßt sich (1.4) schreiben als

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 d_H}{\partial u_l \partial u_j}\Big|_u = \Delta\alpha(\frac{\partial x}{\partial u_l}, \frac{\partial x}{\partial u_j}) + \beta(\frac{\partial x}{\partial u_l}, \frac{\partial x}{\partial u_j}). \tag{1.5}$$

Sei A die Weingarten-Abbildung von x in u in Richtung e und für $\tau \in \mathrm{R}$

$$L_\tau := \tau A + B \tag{1.6}$$

mit $B = \operatorname{pr} \circ \operatorname{pr}$. L_τ ist bezüglich $\langle , \rangle$ selbstadjungiert. $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} B$ bzw. $\operatorname{Ker} L_\tau$ sind die Nullräume von α, β bzw. der Hesseform der zylindrischen Abstandsfunktion mit der Achse $x(u) - \tau e + \mathfrak{H}$, womit die zu H parallele k-Ebene durch $x(u) - \tau e$ beschrieben wird. Entsprechendes gilt für die negativen Eigenwerte dieser linearen Abbildungen und die Indizes der jeweiligen Bilinearformen. Insbesondere wird der Index von d_H in u beschrieben durch den Index von $\Delta\alpha + \beta$, also durch die Anzahl der negativen Eigenwerte von L_Δ (gezählt in ihrer Vielfachheit). Mit $N(g)$ werde der Nullraum der Bilinearform g bezeichnet.

Behauptung 2: $N(\beta) = \operatorname{Ker} B = \mathfrak{H} \cap T_uM$.

Beweis: Die nichttriviale Inklusion erhalten wir folgendermaßen: $X \in \operatorname{Ker} B$ werde zerlegt in $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in \mathfrak{H}$, $X_2 \in \mathfrak{H}^\perp$. $B(X) = 0$ liefert $0 = \operatorname{pt}(\operatorname{pr}(X)) = \operatorname{pt}(X_2)$. $\Rightarrow X_2 \in N_uM$. $\Rightarrow \langle X, X_2 \rangle = 0 \Rightarrow 0 = \| X_2 \|^2$. $\Rightarrow X = X_1 \in \mathfrak{H}$.

Behauptung 3: *L_τ ist entweder für höchstens endlich viele $\tau \in \mathrm{R}$ singulär oder es gilt* $\operatorname{Ker} A \cap \mathfrak{H} = N(\alpha) \cap \mathfrak{H} \neq \{0\}$.

Beweis: Die Determinante von L_τ ist ein Polynom in τ. Damit verschwindet sie entweder an höchstens endlich vielen Stellen oder identisch. Es bleibt die zweite Alternative zu diskutieren. Eine Richtung ist nach Behauptung 2 evident. Sei also $\det L_\tau = 0$ für alle $\tau \in \mathrm{R}$. Bezüglich eines Orthonormalsystems von Eigenvektoren $X_1, \ldots, X_m$ von A mit Eigenwerten $k_1, \ldots, k_m$ ergibt sich für den höchsten Koeffizienten von $\det L_\tau$

$$0 = (\prod_{i=1}^{m} k_i)_{k_i \neq 0} \cdot \det(\beta \mid \operatorname{Ker} A),$$

also folgt, daß $\beta \mid \operatorname{Ker} A$ nicht verschwindenden Nullraum besitzt. Da β positiv semidefinit ist, gilt, daß dieser auch zum Nullraum von β gehört.

Behauptung 4: *Sei* $\operatorname{Ker} A \cap \mathfrak{H} = \{0\}$, $W = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} L_{\tau_i}$ *für* $\tau_1, \ldots, \tau_s \in \mathrm{R}$. *Dann gilt* $\operatorname{Ker} A \cap W = \{0\}$.

Beweis: Sei $X \in W \cap \operatorname{Ker} A$, $Y \in \operatorname{Ker} L_{\tau_j}$. Dann gilt: $0 = \langle X, L_{\tau_j} Y\rangle = \beta(X, Y)$ und

$$X = \sum_{i=1}^{s} a_i Y_i \text{ mit } Y_i \in \operatorname{Ker} L_{\tau_i} \text{ und } a_i \in R.$$

Das ergibt $\beta(X, X) = \sum_{i=1}^{s} a_i \, \beta(X, Y_i) = 0$, also $X \in \operatorname{Ker} B$. Aus Behauptung 2 folgt dann $X = \mathfrak{o}$.

Behauptung 5: *Sei* $\operatorname{Ker} A \cap \mathfrak{h} = \{\mathfrak{o}\}$, $W = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} L_{\tau_i}$ *für* $\tau_1, \ldots, \tau_s \in \mathsf{R}$. *Dann gilt für* $\tau \in \mathsf{R}$, $\tau \neq \tau_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, s$ *die Beziehung* $\operatorname{Ker} L_\tau \cap W = \{\mathfrak{o}\}$.

Beweis: Sei $X \in \operatorname{Ker} L_\tau \cap W$, $Y \in \operatorname{Ker} L_{\tau_j}$. Dann gilt: $0 = \langle X, L_{\tau_j} Y\rangle = \langle L_{\tau_j} X, Y\rangle = \langle L_\tau X, Y\rangle + (\tau_j - \tau)\alpha(X, Y)^j = (\tau_j - \tau)\alpha(X, Y)$; $\tau_j \neq \tau. \Rightarrow \alpha(X, Y) = 0 \Rightarrow \beta(X, Y) = 0$. Aus $X \in W$ folgt wie im Beweis von Behauptung 4 $\beta(X, X) = 0$ und daraus $X = \mathfrak{o}$.

Die Argumentationen in den Behauptungen 3, 4 und 5 lassen sich zusammenfassen zu

Folgerung 1: *Sei* $\operatorname{Ker} A \cap \mathfrak{H} = \{\mathfrak{o}\}$, $\tau_1, \ldots, \tau_s$ *die Menge der nicht verschwindenden Nullstellen von* $\det L_\tau$. *Dann ist die Summe*

$$\operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B + \sum_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} L_{\tau_i} \tag{1.7}$$

direkt und für X und Y aus jeweils zwei verschiedenden Summanden gilt $\alpha(X, Y) = 0 = \beta(X, Y)$.

Behauptung 6: *Sei* $\operatorname{Ker} A \cap \mathfrak{H} = \{\mathfrak{o}\}$. *Die direkte Summe* (1.7) *ist genau dann* $T_u M$, *wenn* $A(\operatorname{Ker} B) \cap (\operatorname{Ker} B)^\perp = \{\mathfrak{o}\}$ *gilt. Dabei bezeichnet* $(\operatorname{Ker} B)^\perp$ *das orthogonale Komplement von* $\operatorname{Ker} B$ *in* $T_u M$.

Beweis: I: Sei $T_u M = \Sigma_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} L_{\tau_j} + \operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B$, $X \in A(\operatorname{Ker} B) \cap (\operatorname{Ker} B)^\perp$. Dann gilt $X = A(Y)$ mit $Y \in \operatorname{Ker} B$ und $\langle A(Y), Z\rangle = 0$ für alle $Z \in \operatorname{Ker} B$. $\langle A(Y), Z\rangle = 0$ für alle $Z \in \operatorname{Ker} A$ und nach Folgerung 1 für alle $Z \in \Sigma_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} L_{\tau_i}$. Damit ist $Y \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B$. Nach Voraussetzung folgt daraus $X = A(Y) = \mathfrak{o}$.

II: Sei $A(\operatorname{Ker} B) \cap (\operatorname{Ker} B)^\perp = \{\mathfrak{o}\}$, $W := A^{-1}((\operatorname{Ker} B)^\perp)$. Wegen der Implikation $X \in \operatorname{Ker} B \cup W \Rightarrow A(X) \in A(\operatorname{Ker} B) \cap (\operatorname{Ker} B)^\perp = \{\mathfrak{o}\}$ ist $X \in \operatorname{Ker} A$ und damit voraussetzungsgemäß $\operatorname{Ker} B \cap W\{\mathfrak{o}\}$. Aus Dimensionsgründen haben wir die direkte Summe $T_u M = W + \operatorname{Ker} B$. Damit ist $\beta \mid W$ positiv definit. Es existiert also eine Basis $X_1, \ldots, X_r$ von W und reelle λ_i, $i = 1, \ldots, r$, mit

$$\left.\begin{aligned} \beta(X_i, X_j) &= \delta_{ij} \\ -\alpha(X_i, X_j) &= \lambda_i \delta_{ij} \end{aligned}\right\} i, j = 1, \ldots, r.$$

$\lambda_i = 0$ hat zur Folge $\alpha(X_i, X_j) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, r$ sowie $\alpha(X_i, Z) = 0$ für alle $Z \in \operatorname{Ker} B$ wegen $X_i \in W$. Das ergibt $X_i \in \operatorname{Ker} A$. $\lambda_i \neq 0$ hat zur Folge $\langle L_{1/\lambda_i}(X_i), X_j\rangle = 1/\lambda_i \alpha(X_i, X_j) + \beta(X_i, X_j) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, r$ sowie $\langle L_{1/\lambda_i}(X_i), Z\rangle = 0$ für alle $Z \in \operatorname{Ker} B$ wegen $\alpha(X_i, Z) = 0 = \beta(X_i, Z)$. Das ergibt dann $X_i \in \operatorname{Ker} L_{1/\lambda_i}$. Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung 1: Daß $\operatorname{Ker} A \cap \mathfrak{H} \neq \{\mathfrak{o}\}$ in Sonderfällen möglich ist, ist klar. Die Möglichkeit, daß $A(\operatorname{Ker} B) \cap (\operatorname{Ker} B)^\perp \neq \{\mathfrak{o}\}$ ist, wird an einem Beispiel deutlich. Dazu betrachte man einen hyperbolischen Punkt einer Fläche im E^3, so daß beide Hauptkrümmungen betragsmäßig übereinstimmen. Ist nun eindimensional und zeigt $\mathfrak{h}$ in eine der Asymptotenrichtungen in diesem Punkt, so ist die in Behauptung 6 aufgestellte Zerlegung nicht mehr möglich. Im Spezialfall des Hyperboloids $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ und der eindimensionalen Achse $H = \{t. t, 1) \mid t \in \mathsf{R}\}$ ist $(0, 0)$ nichtdegeneriert kritisch, der Index von d_{H_λ} ergibt sich zu 1. Der einzige nichtverschwindende Raum in der Summe (1.7) ist jedoch $\operatorname{Ker} B = \{t, t, 0) \mid t \in \mathrm{R}\}$.

Satz 1: *Sei $x\colon M \to E^n$ eine Immersion mit dem kritischen Punkt u der Abstandsfunktion d_H und den oben erklärten Größen A, α,B β, L_τ und Δ. Sei* $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{\mathfrak{o}\}$ *und* $A(\operatorname{Ker} B) \cap (\operatorname{Ker} B)^\perp = \{\mathfrak{o}\}$. *Dann gilt: d_H ist in u genau dann nichtdegeneriert, wenn* $\det L_\Delta \neq 0$. *Der* Index *λ von d_H in u ergibt sich dann zu*

$$\lambda = \sum_{\tau \in (0,\Delta)} \dim \operatorname{Ker} L_\tau + \lambda_0, \tag{1.8}$$

wobei λ_0 der Index der Einschränkung von α auf $\operatorname{Ker} B$ *ist.*

Beweis: Nach (1.5), (1.6) ist d_H in u genau dann nichtdegeneriert, wenn $\det L_\Delta \neq 0$. Der Index λ ergibt sich als Index von $\Delta\alpha + \beta$. Aus Folgerung 1 und Behauptung 6 ergibt sich

$$\lambda = \operatorname{Ind}(\Delta\alpha+\beta) \mid \operatorname{Ker} A + \operatorname{Ind}(\Delta\alpha+\beta) \mid \operatorname{Ker} B + \sum_{i=1}^{s} \operatorname{Ind}(\Delta\alpha+\beta) \mid \operatorname{Ker} L_{\tau_i},$$

wobei τ_i die verschiedenen nicht verschwindenden Nullstellen von $\det L_\tau$ durchläuft. Es ist wegen $\{\mathfrak{o}\} = \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B$ und der positiven Semidefinitheit von β

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ind}(\Delta\alpha+\beta) \mid \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ind} \beta \mid \operatorname{Ker} A = 0.\\
&\operatorname{Ind}(\Delta\alpha+\beta) \mid \operatorname{Ker} B = \operatorname{Ind} \alpha \mid \operatorname{Ker} B = \lambda_0,\\
&\operatorname{Ind}(\Delta\alpha+\beta) \mid \operatorname{Ker} L_{\tau_i} = \operatorname{Ind}\left(\alpha + \frac{1}{\Delta}\beta\right) \mid \operatorname{Ker} L_{\tau_i}\\
&= \operatorname{Ind}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\tau_i}\right)\beta \mid \operatorname{Ker} L_{\tau_i} = \begin{cases} \dim \operatorname{Ker} L_{\tau_i} & \tau_i \in (0,\Delta)\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Bemerkung 2: Aus dem Beispiel in Bemerkung 1 ergibt sich, daß die Index formel (1.8) im Fall $A(\operatorname{Ker} B) \cap (\operatorname{Ker} B)^\perp \neq \{0\}$ nicht gilt. Eine in einigen Teilen kompliziertere Beweisführung führt jedoch zu einem Korrekturglied λ_1, dessen Addition auf der rechten Seite wieder eine gültige Indexformel ergibt. λ_1 ist gerade die Nullität der Einschränkung von α auf $\operatorname{Ker} B$. Auf die Voraussetzung $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$ kann jedoch nicht verzichtet werden.

2. Existenz von nichtdegenerierten zylindrischen Abstandsfunktionen. Daß für Untermannigfaltigkeiten von euklidischen Räumen die meisten Abstandsfunktionen zu Punkten nichtdegeneriert sind, wird durch Betrachtung der Endpunktabbildung auf dem Normalenbündel der Immersion $x\colon M \to E^n$ bewiesen [5]. Im allgemeineren Fall von zylindrischen Abstandsfunktionen treten zwei Schwierigkeiten auf: 1) Das Null-Niveau kann für einen offenen Bereich von Achsen aus degenerierten kritischen Punkten bestehen. 2) Die Endpunktabbildung liefert hierfür zu wenig Informationen. Hinsichtlich der Anwendbarkeit von Morse-Theorie läßt sich die erste Schwierigkeit durch eine Transversalitätsannahme beseitigen. Das zweite Problem läßt sich durch die Betrachtung einer geeignet verallgemeinerten Endpunktabbildung lösen.

Definition 1: *Die zylindrische Abstandsfunktion $d_H\colon M \to \mathrm{R}$ heißt* **wesentlich nichtdegeneriert**, *wenn d_H außerhalb des Null-Niveaus nichtdegeneriert ist und $Hx(M)$ transversal schneidet.*

Für den Definitionsbereich der verallgemeinerten Endpunktabbildung bieten sich nach Behauptung 1 die k-Ebenen an, die zu Normalen von $x(M)$ senkrecht stehen und diese auch treffen. Unter Beibehaltung der Terminologie vom ersten Abschnitt lassen sie sich zu einem Bündel über M zusammenfassen, dessen Totalraum durch

$$\hat{E}_k := \{(u, N, \mathfrak{h}) \mid u \in M,\ N \in N_u M \setminus \{\mathfrak{o}\},\ \mathfrak{h} \text{ ist } k\text{-Ebene durch } \underline{0}, \text{ die zu } N \text{ senkrecht steht.}\} \tag{2.1}$$

gegeben ist und das in offensichtlicher Weise eine kanonische differenzierbare Struktur trägt. Für $k=0$ erhält man das Normalenbündel ohne den Nullschnitt. Sei nun $H(k, n)$ die (offene) Grassmann-Mannigfaltigkeit der k-dimensionalen affinen Unterräume des E^n. Die verallgemeinerte Endpunktabbildung wird dann definiert durch

$$\Phi_k: \widehat{E}_k \to H(k, n), \tag{2.2}$$

$$\Phi_k(u, N, \mathfrak{H}) = x(u) + N + \mathfrak{H}.$$

Φ_k ist von der Klasse C^∞, $\widehat{E}_k$ und $H(k, n)$ haben dieselbe Dimension. Damit ist der Satz von Sard auf diese Situation anwendbar. Bevor das geschieht, sollen die Singularitäten von Φ_k interpretiert werden.

Satz 2: *Sei $x: M \to E^n$ eine C^∞-Immersion. Mit den Bezeichnungen* (2.1) *und* (2.2) *gilt für eine k-Ebene H in E^n: Die Abstandsfunktion d_H zu H ist in $u \in M$ degeneriert kritisch. $\Leftrightarrow$ H ist singulärer Wert von Φ_k, wobei die entsprechende singuläre Stelle ξ von Φ_k in $\widehat{E}_k$ die Projektion u in M besitzt. Genauer gesagt gilt, daß der Korang des Differentials von Φ_k in ξ gleich der Nullität der Hesseform von d_H in u ist.*

Beweis: Sei $H=\Phi_k(u, N, \mathfrak{H})$, $n_0=N/\|N\|$. Seien $u_1, \ldots, u_m$ lokale Koordinaten von M, die für u sämtlich verschwinden. Seien $e_1, \ldots, e_{n-m}$ orthonormierte Normalvektorfelder von x in einer Umgebung von u, so daß $e_{n-m}(\mathfrak{o})=n_0$ gilt und alle e_i bezüglich des Zusammenhangs im Normalenbündel an der Stelle $\mathfrak{o}$, die ja u entspricht, parallel sind, d. h., es gilt

$$\left(\frac{\partial}{u\partial_i} e_j\right)(\mathfrak{o}) \in T_u M \tag{2.3}$$

für alle $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n-m$. Dann erhält man mit

$$\eta(u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_{n-m}) = \sum_{\nu=1}^{n-m} w_\nu e_\nu(u_1, \ldots, u_m) + \|N\|\, e_{n-m}(u_1, \ldots, u_m). \tag{2.4}$$

Koordinaten im Normalenbündel von x um (u, N), die für (u, N) verschwinden. Sei $E_1^0, \ldots, E_{n-1}^0$ orthonormierte Vektoren im E^n, die zu N senkrecht stehen, so daß $E_1^0, \ldots, E_k^0 \mathfrak{h}$ aufspannen. Dann ist das System

$$E_j(u_1, \ldots, w_{n-m}) = E_j^0 - \langle E_j^0, \eta\rangle \frac{\eta}{\|\eta\|^2}\Big|_{(u_1, \ldots, w_{n-m})}, \tag{2.5}$$

$j=1, \ldots, n-1$, zu $\eta(u_1, \ldots, w_{n-m})$ senkrecht und in einer Umgebung von $\mathfrak{o}$ linear unabhängig. Für $(\bar{u}, \bar{N}, \bar{\mathfrak{H}})$ in einer Umgebung von $(u, N, \mathfrak{H})$ in $\widehat{E}_k$ gibt es daher eindeutig bestimmte Koordinaten $\alpha_{il}(i=1, \ldots, k, l=1, \ldots, n-1-k)$, so daß $\bar{\mathfrak{H}}$ von dem System

$$\sum_{l=1}^{n-1-k} \alpha_{ij} E_{k+1} + E_i, \quad i=1, \ldots, k, \tag{2.6}$$

aufgespannt wird. Die in (2.4) und (2.6) definierten Koordinaten liefern insgesamt ein Koordinatensystem $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_{n-m}, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{kn-1-k}$ von $\widehat{E}_k$ um $(u, N, \mathfrak{h})=\xi$, das in diesem Punkt verschwindet.

Analog werden in einer Umgebung von $\mathfrak{o}$ durch

$$\sum_{\mu=1}^{n-k-1} y_\mu E_{k+\mu}^0 + y_{n-k} n_0 + x(u) + N + \mathfrak{G}((\beta_{jr})), \tag{2.7}$$

wobei $\mathfrak{G}((\beta_{jr}))$ die von den k Vektoren

$$\sum_{l=1}^{n-k-1} \beta_{jl} E_{n+1}^0 + \beta_{jn-k} n_0 + E_j^0 \tag{2.8}$$

aufgespannte k-Ebene durch 0 ist, gerade lokale Koordinaten von $H(k, n)$ um $H = x(u) + N + \mathfrak{H}$ definiert, in denen H und $\bar{\mathfrak{o}}$ sich entsprechen. Es soll also in diesen Koordinaten die Funktionalmatrix von Φ_k in $\mathfrak{o}$ bestimmt werden.
Für die ersten $n-k$ Komponenten dieser Koordinatendarstellung folgt aus (2.7) und (2.6) die Beziehung

$$\sum_{\mu=1}^{n-k-1} y_\mu E_{\mu+k}^0 + y_{n-k} n_0 + x(u) + N = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Big(\sum_{l=1}^{n-k-1} \alpha_{ij} E_{l+k} + E_i \Big) + x(v) + \eta, \tag{2.9}$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ geeignete Funktionen in der Umgebung von $\mathfrak{o}$ sind. Die λ_i sind durch (2.9) eindeutig bestimmt und deshalb von der Klasse C^∞. Ferner gilt $\lambda_i(\mathfrak{o}) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Differentiation und Auswertung bei $\mathfrak{o}$ liefert

$$\sum_{\mu=1}^{n-k-1} \frac{\partial y_\mu}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) E_{\mu+k}^0 + \frac{\partial y_{n-k}}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) n_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) E_i^0 + \frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) + \frac{\partial \eta}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}). \tag{2.10}$$

Aus (2.3) und (2.4) folgt

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) = ||N|| \frac{\partial e_{n-m}}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) = -||N|| \bar{A}\Big(\frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o})\Big),$$

wenn $\bar{A}$ wie früher die Weingarten-Abbildung von x in u in Richtung n_0 ist. Mit dieser Beziehung ergibt (2.10) nach Koeffizientenvergleich

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) = \Big\langle \frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) - ||N|| \bar{A}\Big(\frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o})\Big), E_{\mu+k}^0 \Big\rangle \tag{2.11}$$

für $\mu = 1, \ldots, n-k-1$ und $\dfrac{\partial y_{n-k}}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) = 0$, wobei $\zeta = 1, \ldots, m$.

Analog liefert (2.9)

$$\sum_{\mu=1}^{n-k-1} \frac{\partial y_\mu}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) E_{k+\mu}^0 + \frac{\partial y_{n-k}}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) n_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) E_i^0 + \frac{\partial \eta}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) \tag{2.12}$$

zusammen mit $\dfrac{\partial \eta}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) = e_\sigma(\mathfrak{o})$ für $\sigma = 1, \ldots, n-m$

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) = \langle e_\sigma(\mathfrak{o}), E_{\mu+k}^0 \rangle \text{ für } \mu = 1, \ldots, n-k-1 \text{ und} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial y_{n-k}}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) = \langle e_\sigma(\mathfrak{o}), n_0 \rangle.$$

Für die letzten Ableitungen folgt sofort

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_{\sigma\zeta}}(\mathfrak{o}) = 0 \tag{2.14}$$

für alle $\mu = 1, \ldots, n-k$, $\sigma = 1, \ldots, k$, $\zeta = 1, \ldots, n-k-1$.
Die Abhängigkeit der β_{jr} von den betrachteten Koordinaten von $\widehat{E}_k$ erhält man daraus, daß die Basen der k-Ebene in der Faser und der damit über Φ_k identifizierten k-Ebene in E^n verglichen werden. Wiederum gibt es eindeutig bestimmte und von den Koordinaten in $\widehat{E}_k$ differenzierbar abhängige Koeffizienten λ_{jk} mit

$$\sum_{l=1}^{n-k-1} \beta_{jl} E^0_{l+k} + \beta_{jn-k} n_0 + E^0_j = \sum_{h=1}^{k} \lambda_{jh} \Big(\sum_{l=1}^{n-k-1} \alpha_{hl} E_{k+1} + E_h \Big). \tag{2.15}$$

Differentiation nach u_ζ ergibt nach Einsetzen von $\mathfrak{o}$

$$\sum_{l=1}^{n-k-1} \frac{\partial \beta_{jl}}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) E^0_{l+k} + \frac{\partial \beta_{jn-k}}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) n_0 = \sum_{k=1}^{k} \frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) E^0_k + \frac{\partial E_j}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}). \tag{2.16}$$

Mit (2.4), (2.5) folgt wie oben

$$\frac{\partial E_j}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) = -\langle E^0_j, \frac{\partial \eta}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o})\rangle \frac{n_0}{||N||} = \langle \bar{A}\Big(\frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o})\Big), E^0_j \rangle n_0$$

und daraus mit (2.16) für $j = 1, \ldots, k$, $\zeta = 1, \ldots, m$

$$\frac{\partial \beta_{jl}}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) = 0 \text{ für } l = 1, \ldots, n-k-1, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \beta_{jn-k}}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}) = \langle \bar{A}\Big(\frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o})\Big), E^0_j \rangle.$$

Ferner erhält man

$$\sum_{l=1}^{n-k-1} \frac{\partial \beta_{jl}}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) E^0_{l+k} + \frac{\partial \beta_{jn-k}}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) n_0 = \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial \lambda_{jh}}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) E^0_h + \frac{\partial E_j}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) \tag{2.18}$$

und daraus wegen

$$\frac{\partial E_k}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) = -\langle E^0_j, \frac{\partial \eta}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o})\rangle \frac{n_0}{||N||} = -\langle E^0_j, e_\sigma(\mathfrak{o})\rangle \frac{n_0}{||N||}$$

$$\frac{\partial \beta_{jl}}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) = 0 \text{ für } l = 1, \ldots, n-k-1, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \beta_{jn-k}}{\partial w_\sigma}(\mathfrak{o}) = -\langle E^0_j, e_\sigma(\mathfrak{o})\rangle \frac{1}{||N||}$$

für alle $j = 1, \ldots, k$, $\sigma = 1, \ldots, n-m$. Schließlich ergibt dasselbe Verfahren

$$\frac{\partial \beta_{jl}}{\partial \alpha_{\zeta\sigma}} = \delta_{j\zeta} \cdot \delta_{l\sigma} \tag{2.20}$$

für alle $\zeta, j = 1, \ldots, k$, $l = 1, \ldots, n-k$, $\delta = 1, \ldots, n-k-1$. Nach (2.20), (2.19), (2.17), (2.14), (2.13) und (2.11) hat die Funktionalmatrix von Φ_k in ξ in den gegebenen Koordinaten die Gestalt

$$\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

wobei E eine Einheitsmatrix, 0 Nullmatrix und F die Funktionalmalmatrix der $y_1, \ldots, y_{n-k}, \beta_{1n-k}, \ldots, \beta_{kn-k}$ in den Variablen $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_{n-m}$ bei $\mathfrak{o}$ ist. F ist quadratisch und hat die Koeffizienten

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{c:c} \langle \frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}), E^0_{\mu+k} \rangle - & \langle e_\sigma(\mathfrak{o}), E^0_{\mu+k} \rangle \\ ||N|| \langle \bar{A}\Big(\frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o})\Big), E^0_{\mu+k} \rangle & \\ \hdashline 0 & \langle e_\sigma(\mathfrak{o}), n_0 \rangle \\ \hdashline \langle \bar{A}\Big(\frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o})\Big), E^0_j \rangle & \langle e_\sigma(\mathfrak{o}), E^0_j \rangle \frac{1}{||N||} \end{array} \right|, \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow n-k \\ \\ \end{array}$$

wobei die Bereiche der Indizes offensichtlich sind. Ohne den Korang von F zu ändern, können wir die letzten k Zeilen mit $-||N||$ multiplizieren. Dann sehen wir, daß die ersten m Spalten gerade die Komponenten der Vektoren

$$-||N||\bar{A}(\frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o})) + \mathrm{pr}(\frac{\partial x}{\partial u_\zeta}(\mathfrak{o}))$$

bezüglich der Basis $E_1^0, \ldots, E_{n-1}^0, n_0$ sind; die letzten $n-m$ Spalten enthalten die Komponenten von $e_1(\mathfrak{o}), \ldots, e_{n-m}(\mathfrak{o})$, welche gerade N_uM aufspannen. Durch Spaltenoperationen können wir die ersten m Spalten deshalb auf ihren Anteil in T_uM reduzieren. Damit sieht man, daß der Korang der Funktionalmatrix von Φ_k in ξ gleich dem Korang der linearen Abbildung

$$-||N||\bar{A} + \mathrm{pt} \circ \mathrm{pr}$$

(Bezeichnungen wie in Abschnitt 1) ist. Mit den restlichen Vereinbarungen von Abschnitt 1 gilt jedoch $-\bar{A} = A$, womit Satz 2 nach (1.5) und (1.6) bewiesen ist.

Behauptung 7: *Sei M kompakt, Φ_k wie in* (2.2); a) *Ist $x(M)$ in keiner k-Ebene enthalten, so ist Φ_k surjektiv.*
b) *Ist $x(M)$ in einer k-Ebene enthalten, so umfaßt das Bild von Φ_k $H(k, n) \setminus G(k, n)$, wobei $G(k, n)$ die Menge der k-Ebenen durch einen festen Punkt von $x(M)$ ist.*

Beweis: a) Zu jeder k-Ebene H existiert ein $u \in M$, in dem d_H sein Maximum annimmt. Wegen $x(M) \notin H$ gilt $d_H(u) > 0$, also $x(u) \notin H$. Ist p_0 der Fußpunkt vom Lot von $x(u)$ auf H, so gilt $H = \Phi_k(u, p_0 - x(u), \mathfrak{H})$, wobei $\mathfrak{H}$ zu H parallel ist und durch $\underline{0}$ geht. b) Existiert eine k-Ebene H_0 mit $x(M) \subset H_0$, so sei $G(k, n)$ die Menge aller k-Ebenen durch ein festes $q_0 \in x(M)$. Für die k-Ebenen aus $H(, n) \setminus G(k, n)$ kann man dann wie in Teil a argumentieren.

Satz 3: *Sei $x: M \to E^n$ wie oben, M kompakt. Dann gibt es eine dichte offene Menge $D \subset H(k, n)$, so daß für $H \in D$ d_H wesentlich nichtdegeneriert ist.*

Beweis: Die k-Ebenen in E^n, die $x(M)$ transversal schneiden, bilden eine Teilmenge von $H(k, n)$, die offen und dicht ist (vgl. [3]). Der Satz von Sard liefert dann zusammen mit der Behauptung 7 und Satz 2 den Beweis von Satz 3.

Bemerkung 3: Es läßt sich für kompaktes M leicht zeigen, daß die Transversalität von H zu $x(M)$ zur Folge hat, daß für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ das Null-Niveau von d_H $(= x^{-1}(x(M) \cap H))$ Deformationsretrakt des δ-Subniveaus von d_H für alle $\delta \in (0, \varepsilon)$ ist. Wenn d_H wesentlich nichtdegeneriert ist, lassen sich also analog zu [5] Morse-Ungleichungen relativ zum Null-Niveau aufstellen und Zerlegungen von M angeben. Die Existenz hinreichend vieler wesentlich nichtdegenerierter zylindrischer Abstandsfunktionen ergibt eine Variante des in [6] und [9] bewiesenen Lemmas von Nomizu-Rodrigues und führt zu speziellen Ergebnissen bei Flächencharakterisierungen. Ferner besteht im Gegensatz zu [1] doch die Möglichkeit, den Begriff "k-zylindrisch taut" in Analogie zu den klassischen Formulierungen von "taut" und "tight" einzuführen, ohne an Tragfähigkeit zu verlieren.

Bemerkung 4: Die verallgemeinerte Endpunktabbildung $\Phi_k: E_k \to H(k, n)$ einer Immersion $x: M \to E^n$ führt zur folgenden Verallgemeinerung der Fokalpunkte: $H \in H(k, n)$ heißt Fokal-k-Ebene von x in u von der Vielfachheit ζ, wenn $H = \Phi_k(u, N, \mathfrak{H})$ und Φ_k in $(u, N, \mathfrak{H})$ singulär vom Korang ζ ist. Aus Satz 1 und Satz 2 ergibt sich in allgemeiner Lage ($\mathfrak{H}$ enthält keine Richtung zur Hauptkrümmung 0 und nicht "zu viele" Asymptotenrichtungen) folgende Variante des Morseschen Indexsatzes für den vorliegenden Fall:

Der Index λ des nichtdegenerierten kritischen Punktes u von d_H ergibt sich zu

$$\lambda = \lambda_0 + \sigma,$$

wobei λ_0 der Index der zweiten Fundamentalform von x in u in Richtung $(x(u)-p_0)/||x(u)-p_0||$ (p_0=Lotfußpunkt von H bzgl. $(x(u))$ eingeschränkt auf $\mathfrak{h} \cap T_uM$ ($\mathfrak{h}$ parallel zu H durch 0) ist und σ die Anzahl der Fokal-k-Ebenen (gezählt in ihrer Vielfachheit) angibt, die zu H parallel sind und die Strecke zwischen p_0 und $x(u)$ treffen.

LITERATUR

1. S. Carter, N. G. Mansour, A. West. Cylindrically taut immersions. *Math. Ann.*, **261**, 1982, 133-139.
2. S. Carter, A. West. Tight and taut immersions. *Proc. Lond. math. Soc.*, **25**, 1972, 701-720.
3. V. Guillemin, A. Pollack. Differential topology. Englewood Cliffs, 1974.
4. N. H. Kuiper. Tight embeddings and maps. — In: The Chern Symposium 1979. Berlin, 1980, 97-145.
5. J. Milnor. Morse theory. (Ann. of Math. Studies No 51) Princeton, 1963.
6. K. Nomizu, L. Rodriguez. Umbilical submanifolds and Morse functions. *Nagoya Math. J.*, **48**, 1972, 197-201.
7. U. Pinkall. Curvature properties of taut submanifolds. Preprint, 1983.
8. G. Thorbergson. Dupin hypersurfaces. *Bull. Lond. math. Soc.*, **15**, 1983, 493-498.
9. B. Wegner. Existence of four concurrent normals to a smooth closed hypersurface of E^n. *Amer. math. Monthly*, **80**, 1973, 782-785.

Fachbereich Mathematik
TU Berlin
Straße des 17. Juni 135
D 1000 Berlin 12

Eingegangen am 15. 2. 1988