Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НАПРАВЛЕННО НЕДОУПОРЯДОЧИВАЕМЫЕ ГРУППЫ

С. А. ТОДОРИНОВ, Н. Л. ПЕТРОВА

В этой работе рассматривается вопрос о непринадлежности данной группы к классу H^* (класс направленно-доупорядочиваемых групп). Этот вопрос о классе доупорядочиваемых групп — O^* рассматривали М. Каргаполов [1], А. Кокорин [2] и В. Копытов [3]. Класс H^* содержит класс O^* и по сравнению с ним довольно шире. Это определяет важность найденных условий *н*-недоупорядочиваемости группы.

Лемма 1. *Расширение произвольной группы A при помощи н-группы B является н-группой.*

Доказательство: Пусть группа G — расширение группы A при помощи *н*-группы B, т. е. $G/A \cong B$ и пусть $\bar{Q}$ *н*-порядок группы B. Порядку $\bar{Q}$ соответствует *н*-порядок в G/A, полученный следующим образом: $\bar{g} = gA \in G/A$ принадлежит Q тогда, и только тогда, когда (gA) принадлежит $\bar{Q}$ (здесь через φ обозначен изоморфизм между группами G/A и B).

Рассмотрим множество $P = \{x/x \in gA,\ gA \in Q,\ gA \neq A\} \cup \{e\}$. P является чистой полугруппой: Для произвольных элементов x_1, $x_2 \in P \setminus \{e\}$ выполняется $x_1 \in g_1A = \bar{g}_1 \in Q \setminus \{\bar{e}\}$ и $x_2 = g_2A = \bar{g}_2 \in Q \setminus \{\bar{e}\}$. Тогда x_1, $x_2 \in g_1 g_2 A = g_1Ag_2A = \bar{g}_1 \bar{g}_2 \in Q \setminus \{\bar{e}\}$ и следовательно, $x_1x_2 \in P \setminus \{e\}$.

Из инвариантности Q следует, что P инвариантная подполугруппа группы G и определяет в G частичный порядок. Покажем, что P *н*-порядок, т. е. что для произвольных элементов g_1, $g_2 \in G$ существует такой элемент $s \in G$, что $g_1^{-1}s$, $g_2^{-1}s \in P$. Возможны следующие три случая:

1. g_1, $g_2 \in G \setminus A$. Так как G/A *н*-группа, то для элементов $g_1A = \bar{g}_1$ и $g_2A = \bar{g}_2$ из G/A можно найти такой элемент $\bar{s} = sA \in G/A$, что

$$g_1A < sA \text{ и } g_2A < sA.$$

Следовательно

$$eA < g_1^{-1}sA \text{ и } eA < g_2^{-1}sA,$$

а это показывает, что $g_1^{-1}s$, $g_2^{-1}s \in P$.

2. $g_1 \in G \setminus A$, $g_2 \in A$ ($g_2 \in G \setminus A$, $g_1 \in A$). В G/A можно найти такой элемент $\bar{s} = sA$, что $g_1A < sA$ и $eA = g_2A < sA$, и следовательно $eA < g_1^{-1} sA$ и $eA < g_2^{-1}sA$, т. е. $g_1^{-1}s$, $g_2^{-1}s \in P$.

3. g_1, $g_2 \in A$. Пусть sA — произвольный положительный элемент G/A. Для этого элемента $eA < sA$ и отсюда следует $g_1 < sA$ и $g_2A < sA$. Из этого получаем, что $eA < g_1^{-1}sA$ и $eA < g_2^{-1}sA$ и $g_1^{-1}s$, $g_2^{-1}s \in P$.

Теорема 2. *Если фактор-группа B группы G не принадлежит классу H, но имеет хотя бы один нетривиальный частичный порядок, то G н-недоупорядочиваемая группа.*

Доказательство: Пусть $\bar{P}$ — нетривиальный порядок группы B и $\bar{P}_0$ множество его положительных элементов. Обозначим через P_0 польный праобраз $\bar{P}_0$ в G. Очевидно, что P_0 является строгим частичным порядком группы G, который удовлетворяет условию $P_0A=P_0$. Ввиду этого для произвольных элементов $p\in P_0$ и $a\in A$ выполняется $pa\in P_0$, т. е. $pa>e$, и следовательно $p>a^{-1}$. Иными словами, каждый элемент из A меньше любого элемента из P_0.

Если допустим, что G $н^*$-группа, то порядок P_0 можно продолжить до $н$-порядка P группы G. Рассмотрим наименьшую выпуклую относительно порядка P подгруппу V группы G, содержащую A. Известно, что [4] $V=AP\cap AP^{-1}$. Следовательно для произвольного элемента $g\in V\setminus A$ имеем $g=a_1p_1=a_2p_2^{-1}$, где $a_1, a_2\in A$; $p_1, p_2\in P$. Отсюда и из свойств порядка P следует, что $e<p_1<p_2p_1=a_1^{-1}a_2$, что приводит к $a_1<a_1p_1=g<a_2$.

Таким образом получается, что каждый элемент из $V\setminus A$ можно заключить между двумя элементами группы A, а это означает, что $V\neq G$ (уже отмечалось, что произвольный элемент из P_0 больше любого элемента из A). Из $V=AP\cap AP^{-1}$ получается еще, что V — нормальная подгруппа группы G.

Рассмотрим фактор-группу G/V. Из свойств $н$-групп следует, что G/V является $н$-группой. Из $G/A\cong B$ и из теоремы об изоморфизмах получается

$$G/V\cong G/A/V/A\cong B/C=B_1,$$

где $C\triangle B$, и так как G/V — $н$-группа, следует, что B_1 тоже $н$-группа. Следовательно группа B является расширением группы C при помощи $н$-группы B. Согласно Лемме 1 B $н$-группа. Последнее противоречит условию теоремы и показывает, что предположение о принадлежности группы G к классу H^* было бы неправильным.

Этим теорема доказана.

Вигольд [5] рассматривает группу

$$B=\langle b,\ u,\ v;\ [[u,\ v]\,u]=[[u,\ v]\,v]=e;\ b^{-1}ub=u^{-1};\ b^{-1}vb=v^{-1};\ [u,\ v]=b^{-16}\rangle.$$

Она исследована Смирновым [6] и Тодориновым [7] и для нее установлено, что множество $P(B)=\{b^{2n},\ n=0,\ 1,\dots\}$ — частичний порядок в B и, что B не является $н$-группой.

Следствие 3. Любая группа G, имеющая фактор-группу G/A, изоморфную группе Вигольда является $н$-недоупорядочиваемой.

Правильность утверждения следует из Теоремы 2 и из того, что группа Вигольда не принадлежит классу H, но имеет нетривиальный порядок.

На базе Следствия 3 доказываются следующие утверждения:

Следствие 4. Свободная группа, число образующих которой больше или равно трем является $н$-недоупорядочиваемой.

Следствие 5. Свободная n-ступенно разрешимая группа с k образующими при $n\geq 3$ и $k\geq 3$ является $н$ — недоупорядочиваемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Каргаполов. Доупорядочиваемые группы. *Алгебра и логика*, 2 1963, № 6, 5—14.
2. А. И. Кокорин. К теории доупорядочиваемых групп. *Алгебра и логика*, 2, 1963, № 6, 15—20.
3. В. М. Копытов. К теории доупорядочиваемых групп. *Алгебра и логика*, 5, 1966, № 6, 27—31.
4. А. И. Кокорин. В. М. Копытов. Линейно упорядоченные группы. М., 1972.
5. J. Wiegold. Semigroups coverings of groups. *Mat. fys. cas.*, 12, 1962, № 3, 217-223.
6. Д. М. Смирнов. Правоупорядоченные группы. *Алгебра и логика*, 5, 1966, № 6, 41—59.
7. С. А. Тодоринов. Частичные порядки групп, обобщающие линейные и решеточные порядки. (Диссертация) Новосибирск, 1972.

Высший институт пищевой и вкусовой промышленности
Кафедра Математики,
4002 Пловдив, Болгария

Поступила 5. 11. 1987
В переработанном виде 22. 6. 1988