Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ДВУХМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ПОСТОЯННОЙ ВНЕШНЕЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

С. Б. КАДОМЦЕВ

В работе рассмотрены такие поверхности класса C^0 в n-мерном евклидовом пространстве, любые две точки которых имеют конгруэнтные в смысле движений объемлющего пространства окрестности. Доказано, что всякая такая поверхность является траекторией некоторой группы Ли движений объемлющего пространства и, следовательно, аналитической поверхностью. Установлено, что кривизна такой поверхности неотрицательна, причем равна нулю, или положительна в зависимости от того, допускает ли поверхность непрерывные вращения вокруг своей точки, или нет.

В работах Т. Гарибе [1, 2] рассматриваются так называемые поверхности с постоянной внешней геометрией, то есть поверхности, любые две точки которых имеют конгруэнтные в смысле движений объемлющего пространства окрестности. Более точно, поверхность называется поверхностью с постоянной внешней геометрией, если любые две ее точки a и b имеют такие окрестности (во внутреннем смысле), которые можно совместить движением объемлющего пространства, совместив при этом точки a и b. Примерами двухмерных поверхностей с постоянной внешней геометрией могут служить плоскость, сфера, круговой цилиндр, тор Клиффорда, а также описанная Л. Бибербахом [3] поверхность постоянной отрицательной кривизны в гильбертовом пространстве.

В упомянутых работах [1, 2] найдены все двухмерные поверхности с постоянной внешней геометрией класса C^3 в четырехмерном евклидовом пространстве E^4, а также все такие поверхности неотрицательной кривизны в E^5. Кроме того, доказано, что в E^5 не существует двухмерной поверхности постоянной отрицательной кривизны класса C^3, внешняя геометрия которой постоянна, и, сверх того, плоскость эллипса нормальных кривизн в каждой течке проходит через эту точку.

В настоящей заметке предлагается другой подход к исследованию двухмерных поверхностей с постоянной внешней геометрией в E^n (принадлежность везде понимается в строгом смысле), позволяющий установить ряд их свойств при минимальных предположениях относительно их регулярности. Перечислим эти свойства.

Теорема. *Всякая полная двухмерная поверхность Ω класса C^0 с постоянной внешней геометрией в E^n является траекторией некоторой группы Ли движений пространства E^n и, следовательно, аналитической поверхностью;*

кривизна поверхности Ω не может быть отрицательной;

если поверхность Ω не допускает непрерывных вращений вокруг какой-нибудь своей точки, то ее кривизна равна нулю;

если поверхность Ω допускает непрерывные вращения вокруг некоторой своей точки и не является евклидовой плоскостью, то ее кривизна положительна.

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству этой теоремы, установим одно важное свойство поверхностей с постоянной внешней геометрией. С этой целью рассмотрим какие-нибудь две точки такой поверхности и движение, совмещающее окрестности этих точек. Переместим поверхность при помощи указанного движения и совместим окрестность одной точки с окрестностью другой точки. Может ли случиться так, что перемещенная поверхность совместится с исходной лишь по малой окрестности, а вне этой окрестности поверхности „расклеются"? Ответ оказывается отрицательным. Точнее, имеет место следующий факт.

Лемма. *Пусть a и b — две произвольные точки поверхности Ω, g — движение пространства E^n, совмещающее окрестность точки a с окрестностью точки b, U — множество всех внутренних точек множества $g(\Omega)\cap\Omega$. Тогда множество $g(\Omega)\cap\Omega$ не содержит ни одной граничной точки множества U.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Пусть b' — граничная точка множества U, принадлежащая множеству $g(\Omega)\cap\Omega$. $a'=g^{-1}(b')$ — ее прообраз на поверхности Ω. Согласно определению, точки a' и b' имеют конгруэнтные окрестности $U_{a'}$ и $U_{b'}$. Движение g, однако, совмещает эти окрестности лишь частично: некоторая „полуокрестность" точки a' (а именно, множество $g^{-1}(U_{b'}\cap U)$ совмещается с „полуокрестностью" $U_{b'}\cap U$ точки b', а сами точки a' и b' являются граничными точками этих „полуокрестностей". Следовательно, окрестность точки b' допускает такой поворот (т. е. движение с неподвижной точкой) вокруг b', при котором некоторые ее части U_1 и U_2, имеющие b' своей граничной точкой, совмещаются, а оставшиеся части не совмещаются. Но тогда, согласно определению поверхностей с постоянной внешней геометрией, аналогичным свойством обладает окрестность любой точки поверхности Ω.

Зафиксируем произвольную точку a_0 поверхности Ω. Наряду с поворотом, о котором говорилось выше, окрестности точки a_0 могут допускать и дискретные вращения вокруг точки a_0, переводящие их в себя. Обсудим этот вопрос подробнее. Обозначим через ε_0 измеренный с помощью метрики объемлющего пространства радиус окрестности U_0 точки a_0, гомеоморфной соответствующей части поверхности Ω (существование такой окрестности гарантируется определением поверхности). Поставим в соответствии каждому вращению g число $\varepsilon(g)$ — максимальный радиус той окрестности точки a_0, которую вращение g переводит в себя (если какое-либо вращение переводит в себя окрестность, целиком содержащую U_0, возьмем в качестве ε радиус ε_0 окрестности U_0). Ясно, что если окрестности точки a_0 допускают лишь дискретные вращения, переводящие их в себя, то количество таких вращений не более, чем счетно. Следовательно, и число значений функции $\varepsilon(g)$ в этом случае не более, чем счетно. Ясно также, что последнее утверждение остается справедливым и в том случае, когда какая-нибудь окрестность точки a_0 допускает и непрерывные вращения. Таким образом, в любом случае множество значений фунции ε (g) не более, чем счетно.

Пусть δ — любое положительное число, меньшее ε_0. Рассмотрим множество M_δ всех точек поверхности Ω, которые имеют окрестности, конгруэнтные окрестностям точки a_0 радиуса не менее δ. Докажем, что множество M_δ нигде не плотно. С этой целью убедимся прежде всего в том, что множество M_δ не содержит ни одной внутренней точки. В самом деле, пусть m — произвольная точка множества M_δ, ε — любое положительное число, меньшее δ. Как отмечалось выше, окрестность точки m допускает такой поворот вокруг m, при котором некоторые ее части V_1 и V_2, имеющие m своей граничной точкой, совмещаются, а оставшиеся части не совмещаются. Выберем в области V_1 какую-нибудь точку m_1, лежащую в ε-окрестности точки m и находящуюся от границы области V_1 на расстоянии ρ, не равном ни одному из значений функции $\varepsilon(g)$. Пусть m_2 — точка, в которую переходит точка m_1 при повороте вокруг m, совмещающем области V_1 и V_2. Тогда хотя бы одна из точек m_1 и m_2 не принадлежит множеству M_δ. Действительно, если предположить, что обе точки принадлежат множеству M_δ, то окажется, что окрестность точки m_1, а значит и точки a_0, радиуса ρ переходит в себя при некотором повороте вокруг m_1 (или, соответственно, a_0), что противоречит условию выбора ρ. Итак, в любой окрестности точки $m\in M_\delta$ имеются точки, не принадлежащие множеству M_δ.

Докажем теперь, что множество M_δ замкнуто. С этой целью рассмотрим последовательность $\{m_i\}$ точек множества M_δ, сходящуюся (во внутреннем смысле) к некоторой точке $m \in \Omega$, и докажем, что $m \in M_\delta$. Последовательности $\{m_i\}$ отвечает последовательность (вообще говоря, не единственная) движений g_i пространства E^n, переводящих окрестности точки a_0 радиуса не менее δ в окрестности точек m_i. Выберем из последовательности $\{g_i\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{\tilde{g}_i\}$ движений, переводящих окрестности точки a_0 в окрестности точек $\tilde{m}_i$. Имея цель доказать, что предел g этой последовательности есть движение пространства E^n, переводящее окрестность точки a_0 радиуса не менее δ в окрестность точки m, рассмотрим последовательность тех точек b_i, в которые переводится некоторая точка b_0, находящаяся от a_0 на расстоянии, меньшем δ, движениями $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ и т. д. Эта последовательность, очевидно, является сходящейся в пространстве E^n. Чтобы доказать ее сходимость во внутреннем смысле, заметим, что все ее члены, начиная с достаточно большого номера k, лежат в δ-окрестности некоторой точки $\tilde{m}_i$. В самом деле, для любых i и k имеет место неравенство $\rho(b_k, \tilde{m}_i) \leqq \rho(b_k, \tilde{m}_k) + \rho(\tilde{m}_k, \tilde{m}_i)$. Но $\rho(b_k, \tilde{m}_k) = \rho(b_0, a_0) < \delta$, а $\rho(\tilde{m}_k, \tilde{m}_i)$ при соответствующем выборе i меньше $\delta - \rho(b_0, a_0)$ при всех $k \geqq i$, что следует из сходимости последовательности $\{\tilde{m}_i\}$. Итак, все члены последовательности $\{b_i\}$, начиная с номера i, лежат в δ-окрестности точки $\tilde{m}_i$ и, следовательно, принадлежат той области, которая гомеоморфна соответствующей части поверхности Ω Поэтому из сходимости последовательности $\{b_i\}$ в пространстве E^n следует сходимость во внутреннем смысле к некоторой точке $b \in \Omega$. Следовательно, движение g переводит окрестность точки m радиуса не менее δ в окрестность точки m. Но это и означает, что $m \in M_\delta$.

Итак, множество M_δ замкнуто и не содержит ни одной внутренней точки. Следовательно, оно нигде не плотно. Рассмотрим теперь множество $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_{\delta/i}$. По теореме Бэра в любой достаточно малой замкнутой окрестности точки a_0 существуют точки, не принадлежащие множеству M. Но тогда эти точки не имеют окрестностей, конгруэнтных окрестностям точки a_0. Тем самым, мы пришли к противоречию с определением поверхностей с постоянной внешней геометрией. Лемма доказана.

Следствие. Пусть Ω — полная поверхность с постоянной внешней геометрией, g — движение объемлющего пространства, переводящее окрестность одной из ее точек в окрестность другой ее точки. Тогда поверхности Ω и $g(\Omega)$ тождественно совпадают.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим множество всех движений пространства E^n, переводящих поверхность Ω в себя. Это множество образует группу, так как вместе с любой парой элементов g_1 и g_2 содержит также элемент $g_1 g_2^{-1}$. Далее, согласно следствию, эта группа транзитивна на Ω. Поэтому связная компонента G ее единицы является транзитивной на Ω группой Ли движений пространства E^n, а сама поверхность может рассматриваться как результат действия группы G на какую-нибудь фиксированную точку $a_0 \in \Omega$, то есть как траектория этой группы. Из этого, в свою очередь, следует, что поверхность Ω — аналитическая. Первая часть утверждения теоремы доказана.

Предположим, что поверхность Ω не допускает непрерывных вращений вокруг своей точки a_0. Выберем в касательной плоскости в точке a_0 какие-нибудь два взаимно ортогональных вектора и, пользуясь движениями группы G, перенесем их в остальные точки поверхности. Проводя теперь всевозможные интегральные кривые построенных таким образом двух векторных полей, мы обнаружим, что на поверхности Ω существует ортогональная сеть, переводящаяся в себя движениями группы G.

Если на двух пересекающихся линиях этой сети взять в качестве параметров длины дуг x и y, то первая квадратичная форма поверхности, очевидно, примет вид $d\rho^2=dx^2+dy^2$. Следовательно, кривизна поверхности в этом случае равна нулю.

Предположим теперь, что поверхность Ω допускает непрерывные вращения вокруг своей точки a_0 и не является евклидовой плоскостью. В этом случае ее кривизна не может быть отрицательной [4]. Докажем, что она не может также быть равной нулю. Допустим, что это не так. Представим каждый элемент трехпараметрической группы G в виде суперпозиции ортогонального преобразования $\tilde{g}$ и трансляции. Из рассмотрения соотношений коммутации в группе G ясно, что множество $\tilde{G}$ элементов $\tilde{g}$ должно представлять собой группу, изоморфную группе G. Но группа G не редуктивна: та ее часть, которая соответствует трансляциям на поверхности (во внутреннем смысле), является нормальным делителем, в то время как стационарная подгруппа нормальным делителем не является. С другой стороны, группа $\tilde{G}$, будучи подгруппой компактной ортогональной группы, должна быть редуктивной. Полученное противоречие доказывает утверждение: кривизна поверхности в этом случае положительна.

Мы установили, что вне зависимости от того, является ли поверхность Ω поверхностью вращения, или нет, ее кривизна либо положительна, либо равна нулю. Следовательно, отрицательной она быть не может. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Гарибе. Поверхности с постоянной внешней и внутренней геометрией в E^4. *Укр. геом. сб.*, 1981, № 24, 12—18.
2. Т. Гарибе. Двумерные поверхности с постоянной внешной геометрией в E^5. *Укр. геом. сб.*, 1982 № 25, 11—22.
3. L. Bieberbach. Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. *Comm. Math. Helv.* 4,1932, 248-255.
4. С. Б. Кадомцев. Невозможность некоторых специальных изометрических погружений пространств Лобачевского. *Мат. сб.*, 107, 1978, № 2, 175—198.

София
Студентски град „Христо Ботев“
бл. 10, ст. 340

Поступила 3.6.1988