Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

НУЛЬМЕРНОСТЬ И ПОЛНОТА В СВОБОДНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ. I

О. В. СИПАЧЕВА

В работе [12], являющейся продолжением этой работы, доказаны следующие теоремы: а) свободная топологическая группа полного по Дьедонне тихоновского пространства является полной по Вейлю; б) если X — тихоновское пространство и $\dim X=0$, тогда свободная топологическая группа пространства X нульмерна в смысле ind. В данной работе подготавливаются средства для доказательства этих теорем.

В первом разделе предлагается новое описание фундаментальной системы окрестностей единицы для свободной топологической группы произвольного тихоновского пространства. Оно необходимо для доказательства основных результатов этой работы и представляет собой, по мнению автора, некоторый самостоятельный интерес.

Во втором разделе доказывается основная лемма, которая применяется в [12] для доказательства теоремы а).

Свободную группу, порожденную множеством X, будем обозначать через $F(X)$: $F(X)$ есть множество всех несократимых слов из букв алфавита $\tilde{X}=X^{-1}\cup X$. Множество всех (необязательно несократимых) слоев из букв алфавита $\tilde{X}$ будем обозначать через $F_0(X)$. Если $\bar{g}$ — произвольное слово из $F_0(X)$, то $l(\bar{g})$ — его длина, т. е. количество содержащихся в нем букв. Буквой e обозначается единица группы $F(X)$. Как правило, элементы $F(X)$ и $F_0(X)$ обозначаются латинскими буквами с чертой сверху, элементы алфавита $\tilde{X}$ — буквами без черты. Например, $\bar{g}$ и $\bar{x}$ — это слова (т. е. элементы $F(X)$ или $F_0(X)$), а g и x — буквы (т. е. элементы алфавита $\tilde{X}$).

Всегда X — тихоновское пространство, $F_M(X)$ — свободная топологическая группа пространства X в смысле Маркова. Символом $\tilde{X}$ обозначается сумма пространства X и его дизъюнктной копии X^{-1}. Будем говорить, что пространство X нульмерно в смысле dim ($\dim X=0$), если во всякое функционально открытое конечное покрытие пространства X можно вписать дизъюнктное открытое покрытие. Топологическое пространство Y будем называть нульмерным в смысле ind ($\operatorname{ind} Y=0$), если для его топологии найдется база, состоящая из открыто-замкнутых множеств.

Если γ — произвольное покрытие множества $\tilde{X}$ и $A\subseteq\tilde{X}$, то звездой A относительно γ называется множество $\cup\{V\in\gamma:\ V\cap A\neq\emptyset\}$.

Через N^+ обозначается множество всех натуральных чисел, $\mathsf{N}=\mathsf{N}^+\cup\{0\}$. Для произвольного натурального n, S_n — группа всех перестановок длины n, S_n^* — множество всех отображений из $\{1,\ldots,n\}$ в $\{1,\ldots,n\}$, $\emptyset$ — пустое множество.

Если имеется какая-нибудь последовательность некоторых объектов, то значок $\hat{}$ над i-м объектом означает, что его нужно пропустить. Символом $\wedge$ обозначается поэлементное пересечение покрытий, вертикальной чертой — сужение покрытия: $\gamma\wedge\mu=\{U\cap V:\ U\in\gamma,\ V\in\mu,\ U\cap V\neq\emptyset\}$, $\gamma|A=\{U\cap A:\ U\in\gamma\}$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 15, 1989, с. 119—140.

Буква ε с индексами и без них всегда обозначает числа ± 1.

Покрытие γ пространства $\widetilde{X}^n$ будем называть симметричным, если $A \in \gamma$, тогда и только тогда, когда $\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{-1}) : (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in A\} \in \gamma$. В дальнейшем, во избежание лишних оговорок, все покрытия пространств $\widetilde{X}^n$ при $n \in \mathsf{N}^+$ предполагаются симметричными.

Записи вида $\{i, \ldots, j, j+1, \ldots, j+s\}$ при $i=j+1$ следует читать как $\{j+1, \ldots, j+s\}$; $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ при $n=1$ есть $\{a_1\}$, $(x_1, \ldots, x_{j-1}) = \varnothing$ при $j \leq 1$. $\widetilde{X}^0$ — пустое множество.

1. Описание фундаментальной системы окрестностей единицы в свободной топологической группе $F_M(X)$, порожденной пространством X. Воспользуемся описанием топологии свободной топологической группы $F_M(X)$, предложенным В. Г Пестовым [2], в слегка измененном варианте.

Пусть $\mathscr{U}_{\widetilde{X}}$ — семейство всех равномерных окружений диагонали в $\widetilde{X}^2$. Определим отображение $j_2 : \widetilde{X}^2 \to F_2(X)$, полагая $j_2(x, y) = x^{-1}y$ для всех $x, y \in \widetilde{X}$. Через $(\mathscr{U}_{\widetilde{X}})^{F(X)}$ обозначим семейство всех отображений из $F(X)$ в $\mathscr{U}_{\widetilde{X}}$. Для любого $\Psi \in (\mathscr{U}_{\widetilde{X}})^{F(X)}$ обозначим через $\widehat{\Psi}$ множество $\{\bar{g} \cdot j_2(\Psi(g)) \cdot \bar{g}^{-1} : \bar{g} \in F(X)\} \subseteq F(X)$. Наконец, для любой последовательности $\{B_n : n \in \mathsf{N}^+\}$ подмножеств из $F(X)$ через $\langle B_n \rangle$ обозначим множество $\bigcup_{n \in \mathsf{N}^+} \bigcup_{\pi \in S_n} B_{\pi(1)} \ldots B_{\pi(n)}$. Базу окрестностей единицы в $F_M(X)$ образует семейство множеств $\{\langle \widehat{\Psi}_n \rangle : \Psi_n \in (\mathscr{U}_{\widetilde{X}})^{F(X)}$ для всех $n \in \mathsf{N}^+\}$.

Построим теперь новую фундаментальную систему окрестностей единицы в $F_M(X)$.

Имеет место следующая

Лемма 1.1. *Пусть $\mathscr{U}_{\widetilde{X}}$ — универсальная равномерность на вполне регулярном пространстве $\widetilde{X}$. Тогда для любого $U \in \mathscr{U}_{\widetilde{X}}$ существует такое покрытие γ множества $\widetilde{X}$, что $U_\gamma = U\{V \times V : V \in \gamma\} \subseteq U$, причем γ открыто и локально конечно в топологии, порожденной некоторой непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрикой d.*

Доказательство. Пусть $U \in \mathscr{U}_{\widetilde{X}}$. Существует непрерывная псевдометрика d на $\widetilde{X}$ такая, что $\{(x, y) \in \widetilde{X}^2 : d(x, y) < 1\} \subseteq U$ [3]. Отождествляя точки в $\widetilde{X}$, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга относительно псевдометрики d, получим метрическое пространство $(Y, \bar{d})$ и естественное непрерывное отображение $\pi : \widetilde{X} \xrightarrow{\text{на}} Y$. Пусть θ — покрытие пространства Y открытыми шарами радиуса $1/4$ (относительно метрики $\bar{d}$), μ — локально конечное открытое покрытие Y, вписанное в θ. Положим $\gamma = \{\pi^{-1}(V) : V \in \mu\}$. Тогда γ — покрытие пространства $\widetilde{X}$, причем $U_\gamma \subseteq U$ и γ открыто и локально конечно в топологии, порожденной на $\widetilde{X}$ псевдометрикой d.

Лемма доказана.

Замечание. Изложенное доказательство леммы 1.1 представляет собой почти точный фрагмент доказательства М. Г. Ткаченко леммы 1 из [4].

В дальнейшем, если покрытие γ пространства $\widetilde{X}$ открыто и локально конечно в топологии, порожденной на $\widetilde{X}$ некоторой псевдометрикой d, будем говорить, что γ открыто и локально конечно относительно d. Очевидно, что всякое покрытие γ, открытое и локально конечное относительно некоторой непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрики, открыто и локально конечно и в топологии самого $\widetilde{X}$.

Положим $V_{\widetilde{X}}=\{U_\gamma:\ \gamma$ открытое и локально конечное относительно некоторой непрерывной псевдометрики на $\widetilde{X}$ покрытие пространства $\widetilde{X}$, причем никакой элемент γ не пересекает одновременно X и $X^{-1}\}$. Из леммы 1.1 и того факта, что $U_\gamma \in \mathscr{U}_{\widetilde{X}}$ для всех $U_\gamma \in V_{\widetilde{X}}$, вытекает, что семейство $\mathscr{B}=\{\langle\widehat{\Psi_n}\rangle:\ \Psi_n \in (V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$ для всех $n\in \mathrm{N}^+\}$ является базой в единице топологии группы $F_M(X)$. Цель этого раздела — построение некоторой новой базы $\mathscr{U}$ на основе имеющегося описания базы $\mathscr{B}$.

Пусть μ, ξ — любые покрытия множества $\widetilde{X}$. Через $\mu\circ\xi$ будем обозначать семейство звезд элементов покрытия μ относительно покрытия ξ. В дальнейшем, вместо записи $(\mu\circ\xi)\circ\eta$, всегда будет использоваться запись $\mu\circ\xi\circ\eta$ для любых покрытий μ, ξ и η множества $\widetilde{X}$.

Предположим, что имеется последовательность $\{\mu_n:\ n\in \mathrm{N}^+\}$ покрытий множества $\widetilde{X}$. Пусть $x\in\widetilde{X}$, $n\in \mathrm{N}^+$, $\pi\in S_n^*$. Через $U_{\pi(1)}^{\{\mu_n\}}(x)$ обозначим звезду точки x относительно покрытия $\mu_{\pi(1)}$. Пусть $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, и пусть множество $U_{\pi(1)\ldots\pi(k)}^{\{\mu_n\}}(x)$ уже определено. Через $U_{\pi(1)\ldots\pi(k)\,\pi(k+1)}^{\{\mu_n\}}(x)$ обозначим звезду множества $U_{\pi(1)\ldots\pi(k)}^{\{\mu_n\}}(x)$ относительно покрытия $\mu_{\pi(k+1)}$.

Таким образом, мы определили множество $U_{\pi(1)\ldots\pi(n)}^{\{\mu_n\}}(x)$ для произвольных $x\in\widetilde{X}$, $n\in \mathrm{N}^+$, $\pi\in S_n^*$. Чрез $\circ\{\mu_n:\ n\in \mathrm{N}^+\}$ будем обозначать покрытие $\{\bigcup\{\bigcup\{U_{\pi(1)\ldots\pi(n)}^{\{\mu_n\}}(x):\ \pi\in S_n\}:\ n\in \mathrm{N}^+\}:\ x\in\widetilde{X}\}$ множества $\widetilde{X}$.

Предположим, что U — произвольный элемент универсальной равномерности $\mathscr{U}_{\widetilde{X}}$ пространства $\widetilde{X}$. Следуя [5], обозначим через $U[x]$ множество $\{y:\ (x,y)\in U\}$ для любого x из $\widetilde{X}$. Покрытие γ пространства $\widetilde{X}$ называется нормальным, если существует $U\in\mathscr{U}_{\widetilde{X}}$ такое, что семейство $\{U[x]:\ x\in\widetilde{X}\}$ вписано в γ (эквивалентное определение: если найдется последовательность $\{\gamma_n:\ n\in \mathrm{N}^+\}$ открытых покрытий пространства $\widetilde{X}$ такая, что γ_1 звездно вписано в γ и для всех натуральных n γ_{n+1} звездно вписано в γ_n).

Лемма 1.2. *Пусть $\{\gamma_n:\ n\in \mathrm{N}^+\}$ — произвольная последовательность открытых покрытий пространства $\widetilde{X}$. Тогда покрытие $\circ\{\gamma_n:\ n\in \mathrm{N}^+\}$ нормально.*

Доказательство. Положим $\mu_1=\gamma_1$. Пусть покрытие μ_n уже определено, $n\geq 1$. Положим $\mu_{n+1}=\gamma_{n+1}\wedge\mu_n$. Мы получили последовательность $\{\mu_n:\ n\in \mathrm{N}^+\}$ открытых покрытий пространства $\widetilde{X}$, каждое из которых (кроме μ_1) вписано в предыдущее.

Положим $\xi_k=\circ\{\mu_{3^k\cdot n}:\ n\in \mathrm{N}^+\}$ для каждого k из N. Покажем, что для любого натурального числа k покрытие ξ_k пространства $\widetilde{X}$ звездно вписано в ξ_{k-1}.

Пусть $x\in\widetilde{X}$. Покажем, что звезда точки x относительно покрытия ξ_{k+1} содержится в некоторой окрестности точки x из покрытия ξ_k, причем эта окрестность имеет вид $\bigcup\{\bigcup\{U_{\pi(1)\ldots\pi(m)}^{\{\mu_{3^k\cdot n}\}}(x):\ \pi\in S_m\}:\ m\in \mathrm{N}^+\}$.

Пусть точка y содержится в том же элементе покрытия ξ_{k+1}, что и точка x. Найдем $z\in\widetilde{X}$, s, $t\in \mathrm{N}^+$, $\pi\in S_s$ и $\sigma\in S_t$ такие, что $x\in U_{\pi(1)\ldots\pi(s)}^{\{\mu_{3^{k+1}\cdot n}\}}(z)$, $y\in U_{\sigma(1)\ldots\sigma(t)}^{\{\mu_{3^{k+1}\cdot n}\}}(z)$.

Ясно, что $y\in U_{\pi(s)\ldots\pi(1)\ \pi(1)\ldots\pi(s)\,\sigma(1)\ldots\sigma(t)}^{\{\mu_{3^{k+1}\cdot n}\}}(x)$. Без ограничения общности можно считать, что $s=t$. Положим

$$\delta=\begin{pmatrix} 1 & \ldots & t & t+1 & \ldots & 2t & 2t+1 & \ldots & 3t \\ 3\pi(t)-2 & \ldots & 3\pi(1)-2 & 3\pi(1)-1 & \ldots & 3\pi(t)-1 & 3\sigma(1) & \ldots & 3\sigma(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\delta \in S_{3t}$ и $y \in U^{\{\mu_{3^k} \cdot n\}}_{\delta(1) \ldots \delta(3t)}(x)$, что и требовалось показать.

Заметим, что покрытие ξ_0 вписано в покрытие $\circ\{\gamma_n\colon n \in \mathsf{N}^+\}$, поскольку μ_n вписано в γ_n для всех натуральных n; значит, покрытие ξ_1 звездно вписано в $\circ\{\gamma_n\colon n \in \mathsf{N}^+\}$. Таким образом, мы построили последовательность $\{\xi_n\colon n \in \mathsf{N}^+\}$ открытых покрытий пространства $\widetilde{X}$, такую, что ξ_1 звездно вписано в $\circ\{\gamma_n\colon n \in \mathsf{N}^+\}$ и ξ_{n+1} звездно вписано в ξ_n для всех натуральных n, что и доказывает нормальность покрытия $\circ\{\gamma_n\colon n \in \mathsf{N}^+\}$.

Лемма доказана:

Вернемся к построению базы в единице топологии группы $F_M(X)$. Пусть для каждого $k \in \mathsf{N}$ определена U_k — симметричная окрестность единицы группы $F_M(X)$ из $\mathscr{B}$: $U_k = \langle \widehat{\Psi}^{(k)}_n \rangle$, где для всякого натурального n $\Psi^{(k)}_n \in (V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$, и пусть $U^{\sigma}_k \subseteq U_{k-1}$ для любого $k \in \mathsf{N}^+$. Для всех $x \in \widetilde{X}$, $\overline{g} \in F(X)$, $n \in \mathsf{N}^+$ через $O^{(n)}_{\overline{g}}(x)$ обозначим какую-нибудь фиксированную окрестность точки x из покрытия, определяющего равномерное окружение $\Psi^{(n)}_n(\overline{g})$ диагонали в $\widetilde{X}^2$. Если r — натуральное число, x_n при $n \in \mathsf{N}^+$ — произвольные элементы множества $\widetilde{X}$, то через $\widetilde{\gamma}^{(i)}_1(r)$ условимся обозначать покрытие $\{O^{(r+i)}_x(x)\colon x \in \widetilde{X}\}$ пространства $\widetilde{X}$, через $\gamma^{(i)}_1(r)$ — покрытие $\circ\{\widetilde{\gamma}^{(i+n)}_1(r)\colon n \in \mathsf{N}^+\}$ для всех натуральных i; для $j \geq 2$ положим $\widetilde{\gamma}^{(i)}_j(r, x_1, \ldots, x_{j-1}) = \{O^{(r+1)}_{x_1 \ldots x_{j-1} x}(x)\colon x \in \widetilde{X}\}$, $\gamma^{(i)}_j(r, x_1, \ldots, x_{j-1}) = \circ\{\widetilde{\gamma}^{(i+n)}_j(r, x_1, \ldots, x_{j-1})\colon n \in \mathsf{N}^+\}$ при $i \in \mathsf{N}^+$. Сейчас мы построим множество $\{\gamma_n(r)\colon n, r \in \mathsf{N}^+\}$ и соответствующие ему семейства $\{\mu_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\colon n, r \in \mathsf{N}^+, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \widetilde{X}^{n-1}\}$, $\{d_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\colon n, r \in \mathsf{N}^+, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \widetilde{X}^{n-1}\}$ и $\{f_n(r)\colon n, r \in \mathsf{N}^+\}$. Начнем с построения последовательностей $\{\gamma_1(r)\colon r \in \mathsf{N}^+\}$, $\{\mu_1(r)\colon r \in \mathsf{N}^+\}$, $\{d_1(r)\colon r \in \mathsf{N}^+\}$ и $\{f_1(r)\colon r \in \mathsf{N}^+\}$.

Найдем элемент $U_1(1)$ универсальной равномерности пространства $\widetilde{X}$, такой, что семейство $\{U_1(1)[x]\colon x \in \widetilde{X}\}$ вписано в $\gamma^{(1)}_1(1)$; такой элемент найдется, ибо покрытие $\gamma^{(1)}_1(1)$ нормально в силу леммы 1.2. По лемме 1.1 найдется открытое и локально конечное относительно некоторой непрерывной псевдометрики $d_1(1)$ на $\widetilde{X}$ покрытие $\mu_1(1)$ пространства $\widetilde{X}$, такое, что $U_{\mu_1(1)} \subseteq U_1(1)$. Ясно, что $\mu_1(1)$ вписано в $\gamma^{(1)}_1(1)$. Положим $\gamma_1(1) = \mu_1(1)$. Зафиксируем какое-нибудь отображение $f_1(1)\colon \gamma_1(1) \to \widetilde{X}$, каждому элементу покрытия $\gamma_1(1)$ ставящее в соответствие принадлежащую ему точку.

Пусть $r \geq 1$ и пусть $\gamma_1(r)$, $\mu_1(r)$, $d_1(r)$ и $f_1(r)$ уже определены, причем $\mu_1(r)$ — открытое и локально конечное относительно непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрики $d_1(r)$ покрытие пространства $\widetilde{X}$. Найдем элемент $U_1(r+1)$ универсальной равномерности пространства $\widetilde{X}$, такой, что семейство $\{U_1(r+1)[x]\colon x \in \widetilde{X}\}$ вписано в $\gamma^{(1)}_1(r+1)$. По лемме 1.1 найдется локально конечное и открытое относительно некоторой непрерывной псевдометрики $d'_1(r+1)$ на $\widetilde{X}$ покрытие $\mu'_1(r+1)$ такое, что $U_{\mu'_1(r+1)} \subseteq U_1(r+1)$. Положим $\mu''_1(r+1) = \mu'_1(r+1) \wedge \mu_1(r)$; очевидно, $\mu''_1(r+1)$ открыто и локально конечно относительно непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрики $d_1(r+1) = \max\{d_1(r), d'_1(r+1)\}$. Положим $\mu'''_1(r+1) = \{V\colon V$ открыто относительно $d_1(r+1)$, V содержится в элементном покрытии $\mu''_1(r+1)$ и V пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\mu''_1(r+1)\}$. Пусть $\mu_1(r+1)$ — открытое и локально конечное относительно $d_1(r+1)$ покрытие $\widetilde{X}$, такое, что $\mu_1(r+1) \circ \mu_1(r+1)$ вписано в покрытие $\mu'''_1(r+1)$; такое покрытие найдется в силу того, что $\mu'''_1(r+1)$ открыто в псевдометрическом пространстве $(\widetilde{X},\ d_1(r+1))$ (см. [5]). Положим $\gamma_1(r+1)=\mu_1(r+1)$. Через $f_1(r+1)$ обозначим какое-нибудь отображение, каждому элементу $\gamma_1(r+1)$ ставящее в соответствие содержащуюся в нем точку. Построение для $n=1$ завершено.

Пусть уже построены множества $\{\gamma_n(r):\ r\in \mathsf{N}^+\}$, $\{\mu_n(r)(x_1,\ldots,x_{n-1}):\ r\in\mathsf{N}^+,\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in\widetilde{X}^{n-1}\}$, $\{d_n(r)\ (x_1,\ldots,x_{n-1}):\ r\in\mathsf{N}^+,(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\widetilde{X}^{n-1}\}$ и $\{f_n(r):\ r\in\mathsf{N}^+\}$ для всех $n\leq k$, где k — некоторое натуральное число, причем выполнены следующие условия:

1^0. $\gamma_n(r)$ — открытое локально конечное покрытие пространства $\widetilde{X}^n$, $\mu_n(r)\ (x_1,\ldots,x_{n-1})$ — открытое и локально конечное относительно непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрики $d_n(r)\,(x_1,\ldots,x_{n-1})$ покрытие пространства $\widetilde{X}$, ни один элемент которого не пересекает одновременно X и X^{-1}, для всех $r\in\mathsf{N}^+$, $n\leq k$, $(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\widetilde{X}^{n-1}$.

2^0. $\gamma_n(r)$ состоит из множеств вида $A_1\times\cdots\times A_n$, где $A_1,\ldots,A_n\subseteq\widetilde{X}$, для всех $r\in\mathsf{N}^+$, $n\leq k$.

3^0. Если $A_1\times\cdots\times A_n$ — элемент покрытия $\gamma_n(r)$, то $A_1\times\cdots\times A_{n-1}$ — элемент покрытия $\gamma_{n-1}(r)$, и, если $A_1\times\cdots\times A_{n-1}$ — элемент покрытия $\gamma_{n-1}(r)$, то для каждой точки x из $\widetilde{X}$ найдется такое $A\subseteq\widetilde{X}$, что $x\in A$ и $A_1\times\cdots\times A_{n-1}\times A$ — элемент покрытия $\gamma_n(r)$ для всех $r\in\mathsf{N}^+$, $2\leq n\leq k$ (если $k\geq 2$).

4^0. Если $A_1\times\cdots\times A_n$ — элемент покрытия $\gamma_n(r)$, то $A_1\times\cdots\times\widehat{A_i}\times\cdots\times A_n$ содержится в некотором элементе покрытия $\gamma_{n-1}(r)$ для всех $i\in\{1,\ldots,n\}$, $2\leq n\leq k$, $r\in\mathsf{N}^+$ (если $k\geq 2$).

5^0. Покрытие $\gamma_n(r+1)\circ\gamma_n(r+1)$ вписано в покрытие $\gamma_n(r)$ для всех $r\in\mathsf{N}^+$, $n\leq k$.

6^0. Каждый элемент покрытия $\gamma_n(r+1)$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\gamma_n(r)$ при $r\in\mathsf{N}^+$, $n\leq k$.

7^0. Для всех $r\in\mathsf{N}^+$, $n\leq k$ $\{\{(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})\}\times V:\ \ V\in\mu_n(r)(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})\}$ $=\gamma_n(r)\big|_{\{(x_1,\ldots,x_{n-1})\}+\widetilde{X}}$ при $(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\widetilde{X}^{n-1}$.

8^0. Для любого $A\in\gamma_{n-1}(r)$ существует открытое и локально конечное относительно непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрики $p_n(r)(A)$ покрытие $\theta_n(r)(A)$, такое, что $\{B:\ A\times B\in\gamma_n(r)\}=\theta_n(r)(A)$ (в силу условия 3^0 это означает, что $\gamma_n(r)=\{A\times B:\ A\in\gamma_{n-1}(r),\ B\in\theta_n(r)(A)\}$) для всех $r\in\mathsf{N}^+$, $2\leq n\leq k$ (если $k\geq 2$).

9^0. $f_n(r)$ — отображение, каждому элементу покрытия $\gamma_n(r)$ ставящее в соответствие некоторую содержащуюся в нем точку пространства $\widetilde{X}^n$ для всех $r\in\mathsf{N}^+$, $n\leq k$.

10^0. Если $A_1\times\cdots\times A_n\in\gamma_n(r)$, $f_n(r)(A_1\times\cdots\times A_n)=(x_1,\ldots,x_n)$, то $f_{n-1}(r)(A_1\times\cdots\times A_{n-1})=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ для всех $r\in\mathsf{N}^+$, $2\leq n\leq k$ (если $k\geq 2$).

Пусть $r\in\mathsf{N}^+$. Для каждого $A\in\gamma_k(r)$ в нормальное по лемме 1.2 покрытие $\gamma_{k+1}^{(k+1)}(r,\ f_k(r)(A))$ пространства $\widetilde{X}$ впишем открытое и локально конечное относительно некоторой непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрики $p'_{k+1}(r)\ (A)$ покрытие $\theta'_{k+1}(r)(A)$.

Пусть $A\in\gamma_k(1)$, $(x_1,\ \ldots,\ x_k)=f_k(1)(A)$. По индуктивному предположению, $\gamma_{k-1}(1)$ локально конечно, поэтому для каждого $i\leq k$ лишь конечное число элементов $\gamma_{k-1}(1)$ содержит точку $(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_k)$. Через $\eta_{k+1}(1)(A)$ обозначим покрытие $\bigwedge\{\theta_k(1)(B):\ B\in\gamma_{k-1}(1),(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_k)\in B,\ i\leq k\}$ пространства $\widetilde{X}$, открытое и локально конечное относительно непрерывной псевдометрики $q_{k+1}(1)(A)$ $=\max\{p_k(1)(B):\ B\in\gamma_{k-1}(1),\ (x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ \ldots,\ x_k)\in B,\ \ i\leq k\}$. Положим $\theta_{k+1}(1)(A)$ $=\eta_{k+1}(1)(A)\wedge\theta'_{k+1}(1)(A)$, $p_{k+1}(1)(A)=\max\{q_{k+1}(1)(A),p'_{k+1}(1)(A)\}$. Ясно, что покрытие $\theta_{k+1}(1)(A)$ открыто и локально конечно относительно непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрики $p_{k+1}(1)(A)$. Мы определили $\theta_{k+1}(1)(A)$ и $p_{k+1}(1)\ (A)$ для всех A из $\gamma_k(1)$; положим $\gamma_{k+1}(1)=\{A\times B:\ A\in\gamma_k(1),\ B\in\theta_{k+1}(1)(A)\}$.

Пусть $(y_1, \ldots, y_k) \in \widetilde{X}^k$. По индуктивному предположению, покрытие $\gamma_k(1)$ локально конечно; тем более, оно точечно конечно. Пусть $A_1, \ldots, A_l$ — все элементы покрытия $\gamma_k(1)$, содержащие точку $(y_1, \ldots, y_k)$. Положим $\mu_{k+1}(1)(y_1, \ldots, y_k) = \cup\{\theta_{k+1}(1)(A_i)\colon i \leqq l\}$, $d_{k+1}(1)(y_1, \ldots, y_k) = \max\{p_{k+1}(1)(A_i)\colon i \leqq l\}$; покрытие $\mu_{k+1}(1)(y_1, \ldots, y_k)$ открыто и локально конечно относительно непрерывной псевдометрики $d_{k+1}(1)(y_1, \ldots, y_k)$. Через $f_{k+1}(1)$ обозначим какое-нибудь отображение из $\gamma_{k+1}(1)$ в $\widetilde{X}^{k+1}$ такое, что если $f_{k+1}(1)(A_1 \times \cdots \times A_{k+1}) = (z_1, \ldots, z_{k+1})$, то $(z_1, \ldots, z_{k+1}) \in A_1 \times \cdots \times A_{k+1}$ и $f_k(1)(A_1 \times \cdots \times A_k) = (z_1, \ldots, z_k)$.

Пусть теперь $r \geqq 1$, $\gamma_{k+1}(r)$, $\mu_{k+1}(r)(x_1, \ldots, x_k)$, $d_{k+1}(r)(x_1, \ldots, x_k)$ и $f_{k+1}(r)$ уже построены для всех $(x_1, \ldots, x_k) \in \widetilde{X}^k$. Для каждого $A \in \gamma_k(r)$ зафиксируем покрытие $\theta''_{k+1}(r)(A)$, открытое и локально конечное относительно непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрики $p_{k+1}(r)(A)$, такое, что $\theta''_{k+1}(r)(A) \circ \theta''_{k+1}(r)(A)$ вписано в покрытие $\theta_{k+1}(r)(A)$.

Пусть $A \in \gamma_k(r+1)$, $(x_1, \ldots, x_k) = f_k(r+1)(A)$. Через $\eta_{k+1}(r+1)(A)$ обозначим покрытие $\bigwedge\{\theta_k(r+1)(B)\colon B \in \gamma_{k-1}(r+1), (x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_k) \in B, i \leqq k\}$ пространства $\widetilde{X}$, открытое и локально конечное относительно непрерывной на $\widetilde{X}$ псевдометрики $q_{k+1}(r+1)(A) = \max\{p_k(r+1)(B)\colon B \in \gamma_{k-1}(r+1), (x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_k) \in B, i \leqq k\}$. Положим $\xi_{k+1}(r+1)(A) = \eta_{k+1}(r+1)(A) \wedge \theta'_{k+1}(r+1)(A) \wedge (\bigwedge\{\theta''_{k+1}(r)(B) \wedge \theta_{k+1}(r)(B)\colon B \in \gamma_k(r)\, B \cap A \neq \varnothing\})$, $p_{k+1}(r+1)(A) = \max\{q_{k+1}(r+1)(A), p'_{k+1}(r+1)(A), \max\{p_{k+1}(r)(B)\colon B \in \gamma_k(r), B \cap A \neq \varnothing\}\}$. По индуктивному предположению множество $\{B \in \gamma_k(r)\colon B \cap A \neq \varnothing\}$ конечно, поэтому псевдометрика $p_{k+1}(r+1)(A)$ непрерывна на $\widetilde{X}$ и покрытие $\xi_{k+1}(r+1)(A)$ открыто и локально конечно относительно $p_{k+1}(r+1)(A)$. В покрытие $\xi_{k+1}(r+1)(A)$ впишем открытое и локально конечное относительно $p_{k+1}(r+1)(A)$ покрытие $\theta_{k+1}(r+1)(A)$ так, чтобы каждый элемент $\theta_{k+1}(r+1)(A)$ пересекал лишь конечное число элементов покрытия $\xi_{k+1}(r+1)(A)$. Положим $\gamma_{k+1}(r+1) = \{A \times B\colon A \in \gamma_k(r+1), B \in \theta_{k+1}(r+1)(A)\}$. Для каждого $(x_1, \ldots, x_k) \in \widetilde{X}$ положим $\mu_{k+1}(r+1)(x_1, \ldots, x_k) = \cup\{\theta_{k+1}(r+1)(A)\colon (x_1, \ldots, x_k) \in A\}$, $d_{k+1}(r+1)(x_1, \ldots, x_k) = \max\{p_{k+1}(r+1)(A)\colon (x_1, \ldots, x_k) \in A\}$. Ясно, что $\mu_{k+1}(r+1)(x_1, \ldots, x_k)$ открыто и локально конечно относительно непрерывной псевдометрики $d_{k+1}(r+1)(x_1, \ldots, x_k)$ на $\widetilde{X}$. Через $f_{k+1}(r+1)$ обозначим какое-нибудь отображение из $\gamma_{k+1}(r+1)$ в $\widetilde{X}^{k+1}$ такое, что если $f_{k+1}(r+1)(A_1 \times \cdots \times A_{k+1}) = (x_1, \ldots, x_{k+1})$, то $(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in A_1 \times \cdots \times A_{k+1}$ и $f_k(r+1)(A_1 \times \cdots \times A_k) = (x_1, \ldots, x_k)$.

Индуктивное построение завершено. Покажем, что для $\gamma_{k+1}(r)$, $\mu_{k+1}(r)(x_1, \ldots, x_k)$, $d_{k+1}(r)(x_1, \ldots, x_k)$ и $f_{k+1}(r)$ при $r \in \mathsf{N}^+$, $(x_1, \ldots, x_k) \in \widetilde{X}^k$ выполнены условия 1^0—10^0, если k в формулировке этих условий заменить на $k+1$.

Выполнение условий 2^0, 3^0, 8^0, 9^0 и 10^0 вытекает непосредственно из построения. Пусть $A_1 \times \cdots \times A_{k+1} \in \gamma_{k+1}(r)$. Покажем, что $A_1 \times \cdots \times \widehat{A}_i \times \cdots \times A_{k+1}$ содержится в некотором элементе покрытия $\gamma_k(r)$ для всех $i \leqq k+1$, $r \in \mathsf{N}^+$; тем самым будет установлено выполнение условия 4^0. Пусть $i = k+1$. По построению $A_1 \times \cdots \times A_k \in \gamma_k(r)$. Пусть $1 \leqq i \leqq k$. По индуктивному предположению $A_1 \times \ldots \times \widehat{A}_i \times \cdots \times A_k$ содержится в некотором элементе A покрытия $\gamma_{k-1}(r)$. Пусть $f_k(r)(A_1 \times \cdots \times A_k) = (x_1, \ldots, x_k)$. Ясно, что $(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_k) \in A$. По построению $A_{k+1} \in \theta_{k+1}(r)(A_1 \times \cdots \times A_k)$ и $\theta_{k+1}(r)(A_1 \times \cdots \times A_k)$ вписано в покрытие $\theta_k(r)(A)$, ведь $\theta_{k+1}(r)(A_1 \times \cdots \times A_k)$ вписано в $\eta_{k+1}(r)(A_1 \times \cdots \times A_k) = \bigwedge\{\theta_k(r)(B)\colon B \in \gamma_{k-1}(r), (x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_k) \in B, i \leqq k\}$. Значит, найдется элемент A' покрытия $\theta_k(r)(A)$ такой, что $A_{k+1} \subseteq A'$. По свойству 8^0 $A \times A' \in \gamma_k(r)$. Ясно, что $A_1 \times \cdots \times \widehat{A}_i \times \cdots \times A_{k+1} \subseteq A \times A'$.

Покажем выполнение свойства 7^0. Пусть $r \in \mathsf{N}^+$, $(x_1, \ldots, x_k) \in \widetilde{X}^k$. Поскольку $\gamma_{k+1}(r) = \{A \times B\colon A \in \gamma_k(r), B \in \theta_{k+1}(r)(A)\}$, $\{A_1 \times \cdots \times A_{k+1} \in \gamma_{k+1}(r)\colon (x_1, \ldots, x_k) \in A_1 \times \cdots$

$\times A_k\}=\{A\times B:\ A\in\gamma_k(r),\ B\in\theta_{k+1}(r)(A),\ (x_1,\ldots,x_k)\in A\}$. Значит, $\gamma_{k+1}(r)|_{\{(x_1,\ldots,x_k)\}\times\widetilde{X}}$ $=\{\{(x_1,\ldots,x_k)\}\times B:\ B\in\theta_{k+1}(r)(A)$ для некоторого элемента A покрытия $\gamma_k(r)$, содержащего точку $(x_1,\ldots,x_k)\}$, откуда немедленно вытекает выполнение условия 7^0.

Докажем, что условие 5^0 тоже выполняется. Пусть $r\in\mathrm{N}^+$, $A\in\gamma_{k+1}(r+1)$, $A=A_1\times\cdots\times A_{k+1}$. Покажем, что звезда множества A относительно покрытия $\gamma_{k+1}(r+1)$ содержится в некотором элементе покрытия $\gamma_{k+1}(r)$. По индуктивному предположению звезда множества $A_1\times\cdots\times A_k$ относительно покрытия $\gamma_k(r+1)$ содержится в некотором элементе B покрытия $\gamma_k(r)$. Элемент B пересекает как само множество $A_1\times\cdots\times A_k$, так и все $A'\in\gamma_k(r+1)$ такие, что $A'\cap A_1\times\cdots\times A_k\neq\emptyset$. По построению для каждого такого A' покрытие $\theta_{k+1}(r+1)(A')$ вписано в $\xi_{k+1}(r+1)(A')$ и, следовательно, в $\theta''_{k+1}(r)(B)$. Значит, покрытие $\{C:\ C\in\theta_{k+1}(r+1)(A')$ для некоторого $A'\in\gamma_k(r+1)$, такого, что $A'\cap A_1\times\cdots\times A_k\neq\emptyset\}$ вписано в покрытие $\theta''_{k+1}(r)(B)$, и звезда элемента A_{k+1} этого покрытия содержится в звезде некоторого элемента покрытия $\theta''_{k+1}(r)(B)$ и, по определению покрытия $\theta''_{k+1}(r)(B)$, в некотором элементе C покрытия $\theta_{k+1}(r)(B)$. По свойству 8^0 $B\times C\in\gamma_{k+1}(r)$. Звезда множества A относительно покрытия $\gamma_{k+1}(r+1)$ содержится в $B\times C$. В самом деле: пусть $D\in\gamma_{k+1}(r+1)$, $D\cap A\neq\emptyset$. Тогда $D=A'\times C'$, где $A'\cap A_1\times\cdots\times A_k\neq\emptyset$, $C'\cap A_{k+1}\neq\emptyset$, $A'\in\gamma_k(r+1)$, $C'\in\theta_{k+1}(r+1)(A')$. По построению $A'\subseteq B$ и по доказанному $C'\subseteq C$; значит, $D=A'\times C'\subseteq B\times C$.

Докажем теперь, что любой элемент покрытия $\gamma_{k+1}(r+1)$ пересекает лишь конечное число элементов покрытия $\gamma_{k+1}(r)$ при $r\in\mathrm{N}^+$. Пусть $A\in\gamma_{k+1}(r+1)$, $A=A_1\times\cdots\times A_{k+1}$. По индуктивному предположению множество $A_1\times\cdots\times A_k$ пересекается с конечным числом элементов покрытия $\gamma_k(r)$; пусть $B_1,\ldots,B_l$ — эти элементы. Поскольку $A_{k+1}\in\theta_{k+1}(r+1)(A_1\times\cdots\times A_k)$ и покрытие $\theta_{k+1}(r+1)(A_1\times\cdots\times A_k)$ такое, что каждый его элемент пересекает лишь конечное число элементов покрытия $\xi_{k+1}(r+1)(A_1\times\cdots\times A_k)$, а покрытие $\xi_{k+1}(r+1)(A_1\times\cdots\times A_k)$ представляет собой поэлементное пересечение конечного множества покрытий, в число которых входят все покрытия $\theta_{k+1}(r)(B)$ для $B\in\gamma_k(r)$, таких, что $B\cap A_1\times\cdots\times A_k\neq\emptyset$, заключаем, что A_{k+1} пересекает лишь конечное число элементов покрытия $\theta_{k+1}(r)(B)$ для всякого $B\in\gamma_k(r)$, такого, что $B\cap A_1\times\cdots\times A_k\neq\emptyset$. Значит, A_{k+1} пересекает лишь конечное число элементов покрытий $\theta_{k+1}(r)(B_i)$ при $i\leq l$. Если $A'\in\gamma_{k+1}(r)$, $A'\cap A\neq\emptyset$, то $A'=B_i\times C$ для некоторых $i\leq l$ и $C\in\theta_{k+1}(r)(B_i)$, откуда немедленно вытекает доказываемое утверждение. Таким образом, условие 6^0 тоже выполнено.

Из условия 6^0 немедленно следует локальная конечность покрытий $\gamma_{k+1}(r)$ при $r\in\mathrm{N}^+$. Открытость и локальная конечность $\mu_{k+1}(r)(x_1,\ldots,x_k)$ относительно $d_{k+1}(r)(x_1,\ldots,x_k)$ при $r\in\mathrm{N}^+$, $(x_1,\ldots,x_k)\in\widetilde{X}^k$, а также непрерывность $d_{k+1}(r)(x_1,\ldots,x_k)$ на $\widetilde{X}$ вытекают непосредственно из определения этих объектов.

Всякое покрытие вида $\mu_n(r)(x_1,\ldots,x_{n-1})$ есть объединение конечного числа покрытий, каждое из которых вписано в некоторое покрытие вида $\gamma_n^{(n)}(r,y_1,\ldots,y_{n-1})=\circ\{\widetilde{\gamma}_n^{(n+i)}(r,y_1,\ldots,y_{n-1}):\ i\in\mathrm{N}^+\}$. Но всякое покрытие вида $\widetilde{\gamma}^l_{(n)}(r,x_1,\ldots,x_{n-1})$ состоит из элементов покрытий, определяющих некоторые $U_\gamma\in V_{\widetilde{X}}$; значит, никакой из элементов никакого покрытия вида $\widetilde{\gamma}_n^{(l)}(r,x_1,\ldots,x_{n-1})$ и, следовательно, никакого покрытия вида $\gamma_n^{(n)}(r,x_1,\ldots,x_{n-1})$ и $\mu_n(r)(y_1,\ldots,y_{n-1})$ не пересекается одновременно с X и X^{-1}. Следовательно, условие 1^0 тоже выполнено.

Положим $\Gamma=\{\gamma_n(r):\ n,r\in\mathrm{N}^+\}$, $M=\{\mu_n(r)(x_1,\ldots,x_{n-1}):\ n,r\in\mathrm{N}^+,\ (x_1,\ldots,x_{n-1}):\in X^{n-1}\}$, $D=\{d_d(r)(x_1,\ldots,x_{n-1}):\ n,r\in\mathrm{N}^+,\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in\widetilde{X}^{n-1}\}$, $F=\{f_n(r):\ n,r\in\mathrm{N}^+\}$. Для любого натурального r и произвольного несократимого слова $g_1\cdot\ldots\cdot g_k$ из букв алфавита $\widetilde{X}$ через $\Psi_r(\Gamma,M,D,F)(g_1\ldots g_k)$ обозначим $U_{\mu_{k+1}(r)(g_1,\ldots,g_k)}$; ясно, что $\Psi_r(\Gamma,M,D,F)(g_1\ldots g_k)\in V_{\widetilde{X}}$, т. е. $\Psi_r(\Gamma,M,D,F)\in(V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$ при $r\in\mathrm{N}^+$.

Лемма 1.3. $\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma,\ M,\ D,\ F)\rangle\subseteq U_0$.

Доказательство. Доказательство этой леммы разобьем на несколько этапов.

I. Вспомним, что нами была определена последовательность $\{U_n:\ n\in\mathrm{N}\}$ окрестностей единицы группы $F_M(X)$, где $U_n=\langle\widehat{\Psi}_k^{(n)}\rangle$. Положим $\widetilde{\Psi}_n=\cup\{\cup\{\widehat{\Psi}^{(\pi(1)+n)}_{\pi(1)+n}\cdot\widehat{\Psi}^{(\pi(2)+n)}_{\pi(2)+n}\cdot\ldots\cdot\widehat{\Psi}^{(\pi(m)+n)}_{\pi(m)+n}\cdot\widehat{\Psi}^{(\sigma(1)+n)}_{\sigma(1)+n}\cdot\widehat{\Psi}^{(\sigma(2)+n)}_{\sigma(2)+n}\cdot\ldots\cdot\widehat{\Psi}^{(\sigma(m)+n)}_{\sigma(m)+n}:\pi,\ \sigma\in S_m\}:m\in\mathrm{N}^+\}$ для любого натурального n. Через $\Phi_n\ (g_1\ldots g_k)$ при $n\in\mathrm{N}^+$, $g_1\ldots g_k\in F_0(X)$ обозначим множество $(g_1\ldots g_k x\cdot y^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$: x и y содержатся в одном элементе покрытия $\gamma^{(k+1)}_{k+1}(n,\ g_1,\ldots,g_k)\}$. Тогда $\Phi_n\ (g_1\ldots g_k)\subseteq\widetilde{\Psi}_{n+k+1}$ для произвольных $n\in\mathrm{N}^+$, $g_1\ldots g_k\in F_0(X)$. В самом деле: пусть $g_1\ldots g_k x\cdot y^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}\in\Phi_h\ (g_1\ldots g_k)$, т. е. x и y содержатся в одном элементе покрытия $\gamma^{(k+1)}_{k+1}\ (n,\ g_1,\ldots,g_k)=\circ\{\widetilde{\gamma}^{(k+1+i)}_{k+1}\ (n,\ g_1,\ \ldots,\ g_k):\ i\in\mathrm{N}^+\}$. Найдем $m\in\mathrm{N}^+$, $\sigma,\ \pi\in S_m$ и $z,\ a_1,\ldots,a_{m-1},\ b_1,\ \ldots,\ b_{m-1},\ u_2,\ldots,u_m,\ v_2,\ldots,v_m\in\widetilde{X}$ такие, что $a_1\in O^{(n+k+1+\pi(1))}_{g_1\ldots g_k z}(z)$, $a_1,\ a_2\in O^{(n+k+1+\pi(2))}_{g_1\ldots g_k u_2}(u_2)$, $a_2,\ a_3\in O^{(n+k+1+\pi(3))}_{g_1\ldots g_k u_3}(u_3),\ldots,a_{m-2}$, $a_{m-1}\in O^{(n+k+1+\pi(m-1))}_{g_1\ldots g_k u_{m-1}}\ (u_{m-1})$, a_{m-1}, $x\in O^{(n+k+1+\pi(m))}_{g_1\ldots g_k u_m}\ (u_m)$, $b_1\in O^{(n+k+1+\sigma(1))}_{g_1\ldots g_k z}\ (z)$, $b_1,\ b_2\in O^{(n+k+1+\sigma(2))}_{g_1\ldots g_k v_2}\ (v_2)$, $b_2,\ b_3\in O^{(n+k+1+\sigma(3))}_{g_1\ldots g_k v_3}\ (v_3),\ \ldots,\ b_{m-2},\ b_{m-1}\in O^{(n+k+1+\sigma(m-1))}_{g_1\ldots g_k v_{m-1}}\ (v_{m-1})$, $b_{m-1},\ y\in O^{(n+k+1+\sigma(m))}_{g_1\ldots g_k v_m}(v_m)$. Ясно, что $g_1\ldots g_k x y^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}=(g_1\ldots g_k x a^{-1}_{m-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1})\cdot(g_1\ \ldots\ g_k a_{m-1}a^{-1}_{m-2}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1})\cdot(g_1\ \ldots\ g_k a_{m-2}a^{-1}_{m-3}g_k^{-1}\ \ldots\ g_1^{-1})\cdot\ \ldots\ \cdot(g_1\ldots g_k a_3 a_2^{-1}g_k^{-1}\ \ldots\ g_1^{-1})\cdot(g_1\ldots g_k a_2 a_1^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1})\cdot(g_1\ldots g_k a_1 z^{-1}\ g_k^{-1}\ldots g_1^{-1})\cdot(g_1\ldots g_k z b_1^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1})\cdot(g_1\ldots g_k b_1 b_2^{-1}g_k^{-1}\ \ldots\ g_1^{-1})\cdot(g_1\ldots g_k b_2 b_3^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1})\cdot\ldots\cdot(g_1\ldots g_k b_{m-3}b^{-1}_{m-2}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1})\cdot(g_1\ldots g_k b_{m-2}b^{-1}_{m-1}g_k^{-1}\ \ldots\ g_1^{-1})\cdot(g_1\ldots g_k b_{m-1}y^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1})\in\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\pi(m))}_{n+k+1+\pi(m)}\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\pi(m-1))}_{n+k+1+\pi(m-1)}\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\pi(m-2))}_{n+k+1+\pi(m-2)}\cdot\ldots\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\pi(3))}_{n+k+1+\pi(3)}\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\pi(2))}_{n+k+1+\pi(2)}\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\pi(1))}_{n+k+1+\pi(1)}\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\sigma(1))}_{n+k+1+\sigma(1)}\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\sigma(2))}_{n+k+1+\sigma(2)}\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\sigma(3))}_{n+k+1+\sigma(3)}\cdot\ldots\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\sigma(m-2))}_{n+k+1+\sigma(m-2)}\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\sigma(m-1))}_{n+k+1+\sigma(m-1)}\cdot\widehat{\Psi}^{(n+k+1+\sigma(m))}_{n+k+1+\sigma(m)}$, что и требовалось доказать.

II. Для произвольного натурального n, $\widetilde{\Psi}_n\subseteq U_n^2$. Действительно, по определению $\widehat{\Psi}^{(s)}_{(s)}\subseteq U_s$ для каждого s из N, поэтому $\widetilde{\Psi}_n\subseteq\cup\{\cup\{U_{\pi(1)+n}\cdot U_{\pi(2)+n}\cdot\ldots\cdot U_{\pi(m)+n}\cdot U_{\sigma(1)+n}\cdot U_{\sigma(2)+n}\cdot\ldots\cdot U_{\sigma(m)+n}:\ \pi,\ \sigma\in S_m\}:\ m\in\mathrm{N}^+\}\cdot U_k^6\subseteq U_{k-1}$ для всякого натурального k; тем более, $U_k^3\subseteq U_{k-1}$. По лемме 1.3 из [6] из этого условия вытекает, что если $k\in\mathrm{N}$, $p,\ k_1,\ldots,k_p\in\mathrm{N}^+$ и $\Sigma^p_{i=1}2^{-k_i}<2^{-k}$, то $U_{k_1}\cdot\ldots\cdot U_{k_p}\subseteq U_k$; поэтому $U_{\pi(1)+n}\cdot U_{\pi(2)+n}\cdot\ldots\cdot U_{\pi(m)+n}\subseteq U_n$ и $U_{\sigma(1)+n}\cdot U_{\sigma(2)+n}\cdot\ldots\cdot U_{\sigma(m)+n}\subseteq U_n$ при $\pi,\ \sigma\in S_m$, откуда $\widetilde{\Psi}_n\subseteq U_n^2$.

III. Для всякого натурального n $\widehat{\Psi}_n(\Gamma,\ M,\ D,\ F)\subseteq\cup\{\widetilde{\Psi}_{n+1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{\Psi}_{n+k}\cdot\ldots\cdot\widetilde{\Psi}_{n+1}:\ k\in\mathrm{N}^+\}$. Действительно, всякий элемент множества $\widehat{\Psi}_n\ (\Gamma,\ M,\ D,\ F)$ представим в виде $g_1\ldots g_k xy^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$, где $g_1\ldots g_k\in F(X)$, $x,\ y\in A\in\mu_{k+1}(n)\,(g_1,\ldots,g_k)$. В силу условия 7^0 найдется элемент $A_1\times\cdots\times A_{k+1}$ покрытия $\gamma_{k+1}(n)$ такой, что $(g_1,\ldots,g_k,\ x)$, $(g_1,\ldots,g_k,\ y)\in A_1\times\cdots\times A_{k+1}$. Пусть $(x_1,\ldots,x_{k+1})=f_{k+1}(n)\,(A_1\times\cdots\times A_{k+1})$. В силу условий 3^0 и 10^0 для всякого $i\leq k+1$ $A_1\times\cdots\times A_i\in\gamma_i(n)$ и $f_i(n)(A_1\times\cdots\times A_i)=(x_1,\ldots,x_i)$. Значит, $g_1\ldots g_k xy^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}=(g_1x_1^{-1})\cdot(x_1g_2x_2^{-1}x_1^{-1})\cdot\ldots\cdot(x_1\ldots x_k x y^{-1}x_k^{-1}\ldots x_1^{-1})\cdot\ \ldots\ \cdot(x_1x_2g_2^{-1}x_1^{-1})\cdot(x_1g_1^{-1})\in\Phi_n(e)\cdot\Phi_n(x_1)\cdot\ldots\cdot\Phi_n(x_1\ldots x_k)\cdot\ldots\cdot\Phi_n(x_1)\cdot\Phi_n(e)$, поскольку $A_{i+1}\in\theta_{i+1}(n)\,(A_1\times\cdots\times A_i)$ при $i\leq k$ и $A_1\in\mu_1(n)$, а все покрытия $\theta_{i+1}(n)(A)$ вписаны в $\gamma^{(i+1)}_{i+1}(n,\ f_i(n)\ (A))$ для $A\in\gamma_i(n)$ и $\mu_1(n)$ вписано в $\gamma_1^{(1)}(n)$. По доказанному $g_1\ldots g_k xy^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}\in\widetilde{\Psi}_{n+1}\cdot\widetilde{\Psi}_{n+2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{\Psi}_{n+k+1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{\Psi}_{n+2}\cdot\widetilde{\Psi}_{n+1}$.

IV. Докажем, что $\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle\subseteq U_0$. Поскольку $(U_k^2)^3=U_k^\sigma\subseteq U_{k-1}$ для всех натуральных k, из леммы 1.3, доказанной в [6] (см. выше), вытекает, что $\widetilde{\Psi}_{n+1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{\Psi}_{n+k}\subseteq U_{n+1}^2\cdot\ldots\cdot U_{n+k}^2\subseteq U_n$ и $\widetilde{\Psi}_{n+k}\cdot\ldots\cdot\widetilde{\Psi}_{n+1}\subseteq U_{n+k}^2\cdot\ldots\cdot U_{n+1}^2\subseteq U_n$ при $n, k\in\mathrm{N}^+$. Следовательно, по доказанному в III $\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\subseteq U_n^2$ для всех n из N^+. Так как $(U_n^2)^3\subseteq U_{n-1}$ для каждого натурального n, с помощью леммы 1.3 из (6) получаем, что $\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle\subseteq U_0$.

Лемма доказана.

Множество всех четверок $\Gamma=\{\gamma_n(r)\colon n, r\in\mathrm{N}^+\}$, $M=\{\mu_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\colon n, r\in\mathrm{N}^+$ $(x_1, \ldots, x_{n-1})\in\widetilde{X}^{n-1}\}$, $D=\{d_n(r)(x_1, \ldots, x_{n-1})\colon n, r\in\mathrm{N}^+, (x_1, \ldots, x_{n-1})\in\widetilde{X}^{n-1}\}$, $F=\{f_n(r)\colon n, r\in\mathrm{N}^+\}$, удовлетворяющих условиям 1^0-10^0 для всех натуральных k, обозначим через $\mathfrak{G}$. Поскольку для всякого $U_0\in\mathscr{B}$ можно найти последовательность $\{U_n\in\mathscr{B}\colon n\in\mathrm{N}^+\}$ такую, что $U_n^\sigma\subseteq U_{n-1}$ при $n\in\mathrm{N}^+$, для всякого $U_0\in\mathscr{B}$ можно построить $(\Gamma, M, D, F)\in\mathfrak{G}$, для которого $\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle\subseteq U_0$ (например, так, как это сделано выше). С другой стороны, для всякого $(\Gamma, M, D, F)\in\mathfrak{G}$ в силу ограничений на M, налагаемых условием 1^0, $\Psi_n(\Gamma, M, D, F)(g_1\ldots g_k)\in V_{\widetilde{X}}$ при $n\in\mathrm{N}^+$, $g_1\ldots g_k\in F(X)$, т. е. $\Psi_n(\Gamma, M, D, F)\in(V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$ для всех натуральных n и, значит, $\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle\in\mathscr{B}$. Поскольку $\mathscr{B}$ — база открытых окрестностей единицы топологии группы $F_M(X)$, отсюда немедленно вытекает

Т е о р е м а 1.1. *Семейство* $\mathscr{U}=\{\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle\colon(\Gamma, M, D, F)\in\mathfrak{G}\}$ *является базой в единице топологии группы* $F_M(X)$.

2. Основная лемма. В работе [7] М. Г. Т к а ч е н к о построил на свободной группе $F(X)$ произвольного вполне регулярного пространства X некоторую отделимую топологию ρ и доказал, что топологическая группа $(F(X), \rho)$ полна по Вейлю тогда и только тогда, когда X полно по Дьёдонне.

Подпространство X топологической группы G называется тонким в G, если для всякой окрестности единицы U в группе G найдется такая окрестность единицы V в G, что $xVx^{-1}\subseteq U$ для любого $x\in X$ [7]. М. Г. Ткаченко доказал, что построенная им топология ρ на $F(X)$ — самая сильная из всех таких топологий $\mathscr{T}$ на $F(X)$, что X тонко в $(F(X), \mathscr{T})$. Наша ближайшая цель — показать, что для любой окрестности единицы U в группе $F_M(X)$ найдется такая окрестность единицы V в $F_M(X)$, что замыкание V в ρ-топологии содержится в окрестности единицы U.

Нам понадобится база $\mathscr{U}$ окрестностей единицы в группе $F_M(X)$, построенная в предыдущем разделе. Напомним, что она имеет вид $\{\langle\widehat{\Psi}_n(\Gamma, M, D, F)\rangle\colon(\Gamma, M, D, F)\in\mathfrak{G}\}$, где $\mathfrak{G}$ — семейство четверок, обладающих сформулированными выше свойствами 1^0-10^0.

Пусть $\Psi\in(V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$, $\bar{x}\in\widehat{\Psi}$. Это означает, что найдутся $k\in\mathrm{N}^+$ и несократимое слово $g_1\ldots g_k$ из букв алфавита $\widetilde{X}$ такие, что $\bar{x}=g_1\ldots g_k\cdot x\cdot y^{-1}\cdot g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$, где $(x, y)\in\Psi(g_1\ldots g_k)$. Такую запись слова $\bar{x}$ как элемента множества $\widehat{\Psi}$ будем называть канонической.

Л е м м а 2.1. *Пусть* $\Psi\in(V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$ *и для произвольного* $g_1\ldots g_k\in F(X)$, $\Psi(g_1\ldots g_k)\subseteq\Psi(g_1\ldots\widehat{g_i}\ldots g_k)$ *при* $i\leq k$. *Тогда для любого* $\bar{x}\in\widehat{\Psi}$ *найдется несократимая каноническая запись.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g_1\ldots g_k xy^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$ — какая-нибудь каноническая запись слова $\bar{x}$, и пусть в ней возможны сокращения. Предположим, что $x=g_k^{-1}$. Поскольку $\Psi(g_1\ldots g_k)\subseteq\Psi(g_1\ldots g_{k-1})$ и $(x, y)\in\Psi(g_1\ldots g_k)$, $g_1\ldots g_{k-1}y^{-1}xg_{k-1}^{-1}\ldots g_1^{-1}$ — тоже каноническая запись слова $\bar{x}$. Аналогичные рассуждения справедливы и для случая, когда $y^{-1}=g_k$. Произведя все возможные сокращения, получим несократимую каноническую запись слова $\overline{x}$ как элемента множества $\widehat{\Psi}$.

Лемма доказана.

Воспользуемся терминологией, введенной М. Г. Ткаченко в [8]. Пусть $F_0(X)$ — множество всех (не обязательно несократимых) слов, записываемых при помощи алфавита $\widetilde{X}$. Запись $g\equiv h$, где g, $h\in F_0(X)$, означает, что слова g и h идентичны. Произвольное слово g из $F_0(X)$ будем называть каноническим, если $g\equiv a_1 \dots a_n x^{\varepsilon} y^{-\varepsilon} a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$, где $n\in \mathbb{N}$, $a_i\in \widetilde{X}$ для всех $i\in\{1,\dots,n\}$, $\varepsilon=\pm 1$, x, $y\in X$. Каноническими словами являются, в частности, все канонические записи элементов множеств $\widehat{\Psi}$ при $\Psi\in (V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$.

1) „В любом каноническом слове $g\equiv a_1^{\varepsilon_1}\dots a_n^{\varepsilon_n} x^{\varepsilon} y^{-\varepsilon} a_n^{-\varepsilon_n}\dots a_1^{-\varepsilon_1}$ из $F_0(X)$ множество всех составляющих его букв естественным образом разбивается на пары $(a_1^{\varepsilon_1}, a_1^{-\varepsilon_1}),\dots,(a_n^{\varepsilon_n}, a_n^{-\varepsilon_n})$, $(x^{\varepsilon}, y^{-\varepsilon})$. Каждую из перечисленных пар букв будем называть связанной парой (в слове g). Отметим, что здесь и далее при упоминании буквы некоторого слова имеется в виду не только элемент алфавита $\widetilde{X}$, но и определенное его вхождение в это слово. Положим $C_g(a_i^{\varepsilon_i}, a_i^{-\varepsilon_i})=\{a_i^{\varepsilon_i}, a_i^{-\varepsilon_i}\}$, где $i=1,\dots, n$, и $C_g(x^{\varepsilon}, y^{-\varepsilon})=\{x^{\varepsilon}, y^{-\varepsilon}\}$.

Пусть $g_1,\dots,g_n$ — канонические слова из $F_0(X)$, и слово g получено в результате нескольких последовательных сокращений в слове $u\equiv g_1\dots g_n$. В дальнейшем это будет кратко записываться в виде $g=g_1\odot\cdots\odot g_n$. Определим разбиение букв в слове g на связанные пары индукцией по числу сокращений в слове u, после выполнения которых получается слово g. Связанными парами в слове u считаем те и только те пары, которые связаны в одном из канонических слов $g_1,\dots,g_n$. Для любой связанной в слове u пары букв α^{ε} и $\beta^{-\varepsilon}$ по-прежнему полагаем $C_u(\alpha^{\varepsilon},\beta^{-\varepsilon})=\{\alpha^{\varepsilon}, \beta^{-\varepsilon}\}$. Если слово u несократимо, то $g\equiv u$, и разбиение букв в слоеве g на пары уже определено.

Предположим, что $l(g)<l(u)$. Зафиксируем некоторый порядок сокращений в слове u, преобразующий u в слово g. Разбиение букв в u на пары уже определено. Пусть $k\geqq 0$, в слове u произведено k сокращений, в результате которых получено слово h, и определено разбиение букв в h на связанные пары. Кроме того, пусть для каждой связанной пары a^{ε}, $b^{-\varepsilon}$ в слове h определено множество $C_h(a^{\varepsilon}, b^{-\varepsilon})$, состоящее из букв слова u. Множество $C_h(a^{\varepsilon}, b^{-\varepsilon})$ будем называть цепочкой между a^{ε} и $b^{-\varepsilon}$ или цепочкой с концами a^{ε} и $b^{-\varepsilon}$. Пусть $k+1$-е сокращение в слове u состоит в вычеркивании из слова h пары стоящих рядом букв x^{ε} и $x^{-\varepsilon}$. Если эта пара x^{ε}, $x^{-\varepsilon}$ является связанной в слове h, то разбиение букв слова h', полученного вычеркиванием x^{ε} и $x^{-\varepsilon}$ из слова h, состоит из всех пар, связанных в слове h, кроме пары $(x^{\varepsilon}, x^{-\varepsilon})$. Если же буквы x^{ε} и $x^{-\varepsilon}$ не составляют связанной пары в h, то существуют различные буквы $a^{-\varepsilon}$ и b^{ε} в слове h, для которых пары $(a^{-\varepsilon}, x^{\varepsilon})$ и $(x^{-\varepsilon}, b^{\varepsilon})$ являются связанными в h. Связанные пары в слове h' определяем как все связанные пары в слове h, кроме двух пар $(a^{-\varepsilon}, x^{\varepsilon})$ и $(x^{-\varepsilon}, b^{\varepsilon})$, а также добавляем сюда пару $(a^{-\varepsilon}, b^{\varepsilon})$. Цепочки для связанных в h' пар, отличных от пары $(a^{-\varepsilon}, b^{\varepsilon})$, оставляем без изменения. Для пары $a^{-\varepsilon}$, b^{ε} полагаем $C_{h'}(a^{-\varepsilon}, b^{\varepsilon})=C_h(a^{-\varepsilon}, x^{\varepsilon}) \cup C_h(x^{-\varepsilon}, b^{\varepsilon})$.

В результате выполнения зафиксированного числа сокращений в слове u получается требуемое разбиение букв в слове g на пары и соответствующие этим парам цепочки, „соединяющие“ связанные между собой буквы. Отметим, что если цепочки C_1 и C_2 соответствуют различным парам связанных между собой букв, то

[1] Заключенный в кавычки текст цитирован по работе [8].

множества C_1 и C_2 не пересекаются в том смысле, что вхождения букв из C_1 в слово u отличны от всех вхождений букв из C_2. Следует отметить также, что разбиение букв в слове g на пары зависит от способа его представления в виде произведения канонических элементов.

Выше отмечалось, что каноническими словами являются, в частности, элементы множеств вида $\widehat{\Psi}$ при $\Psi \in (V_{\widetilde{X}})^{F(X)}$, поэтому все определения М. Г. Ткаченко переносятся и на случай, когда слово представимо как результат выполнения некоторых сокращений в произведении слов, являющихся элементами $\widehat{\Psi}$. Для дальнейших рассуждений нам понадобится еще несколько определений.

Пусть $g_1 \dots g_k x y^{-1} g_k^{-1} \dots g_1^{-1}$ — каноническая запись некоторого слова из $F_0(X)$; слово $g_1 \dots g_k$ ($g_k^{-1} \dots g_1^{-1}$) будем называть левой (соотв. правой) половиной этого слова, а букву x (y^{-1}) — левой (правой) средней его буквой.

Рассмотрим произвольное натуральное число k, любые элементы множества $\widetilde{X}$ $g_1, \dots, g_k$, a и b такие, что $g = g_1 \dots g_k a\, b^{-1} g_k^{-1} \dots g_1^{-1}$ — каноническое слово из $F_0(X)$. Пусть $\Gamma = \{\gamma_n(r)\colon n,\ r \in \mathrm{N}^+\}$ — последовательность последовательностей покрытий конечных степеней множеств $\widetilde{X}$ ($\gamma_n(r)$ — покрытие множества $\widetilde{X}^n$ при n, $r \in \mathrm{N}^+$), а $F = \{f_n(r)\colon n,\ r \in \mathrm{N}^+\}$ — последовательность отображений: для всех n, r $f_n(r)$ отображает покрытие $\gamma_n(r)$ в $\widetilde{X}^n$ и каждому элементу $\gamma_n(r)$ ставит в соответствие некоторую содержащуюся в нем точку.

Пусть $0 \leq m \leq k$, $(r_1, \dots, r_k)$ — произвольный упорядоченный набор натуральных чисел. Если $m = k$, положим $\bar{x} = ab^{-1}$. Предположим, что $m < k$. Найдем какой-нибудь элемент A_1 покрытия $\gamma_1(r_1)$, содержащий точку g_1. Пусть $v_1 = f_1(r_1)(A_1)$ или $v_1 = g_1$. Положим $\bar{v}_1 = v_1$ или $\bar{v}_1 = e$ (если $m = 0$, то обязательно $\bar{v}_1 = v_1$). В первом случае положим $i_1 = 0$, во втором — $i_1 = 1$. Пусть $t < k$, $\bar{v}_t$ и i_t уже определены, $i_t \leq m$. Определим $\bar{v}_{t+1}$ и i_{t+1}. Пусть $\bar{v}_t = h_1 \dots h_{t-i_t}$. Найдем какой-нибудь элемент A_{t+1} покрытия $\gamma_{t-i_t+1}(r_{t+1})$, содержащий точку $(h_1, \dots, h_{t-i_t}, g_{t+1})$. Пусть $(u_1, \dots, u_{t-i_t}, u_{t+1}) = f_{t-i_t+1}(r_{t+1})(A_{t+1})$, $v_{t+1} = u_{t+1}$ или $v_{t+1} = g_{t+1}$. Через $\bar{v}_{t+1}$ обозначим слово $\bar{v}_t \cdot v_{t+1}$ или слово $\bar{v}_t$; в первом случае положим $j_{t+1} = 0$, во втором — $j_{t+1} = 1$ и $i_{t+1} = i_t + j_{t+1}$

Таким образом, мы определили слова $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ (точнее, мы определили, какой вид они могут иметь). Если $i_k = m$, то положим $\bar{x} = \bar{v}_k ab^{-1} \bar{v}_k^{-1}$, и любое определенное таким образом слово $\bar{x}$ назовем F-сдвинутым на $(r_1, \dots, r_k)$ и укороченным на m словом g. Слово $\bar{x}$ будем называть F-сдвинутым на $\{r_1, \dots, r_k\}$ и укороченным на m словом g, если найдется $\pi \in S_k$ такое, что $\bar{x}$ является F-сдвинутым на $(r_{\pi(1)}, \dots, r_{\pi(k)})$ и укороченным на m словом g. В дальнейшем, как правило, рассматриваются только слова, F-сдвинутые на наборы разных чисел.

Пусть $\bar{x} = \bar{g}_1 \odot \dots \odot \bar{g}_n$, где $n \in \mathrm{N}^+$, $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$ — некоторые канонические слова из $F_0(X)$. Предположим, что при выполнении в слове $\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n$ сокращений, приводящих к получению слова $\bar{x}$, левая (правая) средняя буква в слове $\bar{g}_i$ либо не сокращается, либо сокращается с буквой из слова, стоящего слева (соответственно, справа) от слова $\bar{g}_i$ в слове $\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n$, и буквы из слова $\bar{g}_i$ могут сокращаться только с буквами из других слоев при $i = 1, \dots, n$. Пусть a — произвольная буква из слова $\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n$ (вовсе не обязательно a входит в $\bar{x}$), не являющаяся (являющаяся) средней. Для определенности будем считать, что a — буква из левой половины (соответственно, левая средняя буква) слова $\bar{g}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим цепочку, связывающую букву a с некоторой буквой b^{-1} в слове $\bar{g} = \bar{g}_i \odot \dots \odot \bar{g}_n$ (произведены те же сокращения, что и при получении слова $\overline{x}$ из слова $\overline{g}_1 \ldots \overline{g}_n$). Пусть b^{-1} — буква из слова $\overline{g}_j$. Ясно, что $j \geqq i$. Найдем слово $\overline{g}_p$ с наименьшим номером p таким, что цепочка $C_{\overline{g}}(a, b^{-1})$ содержит две средние буквы (содержит не средние буквы) из слова $\overline{g}_p$. Если такого слова нет, положим $p=j+1$. Найдем букву b'^{-1}, связанную с буквой a в слове $\overline{x}'=\overline{g}_i \odot \cdots \odot \overline{g}_{p-1}$ (произведены те же сокращения, что и при получении слова $\overline{x}$ из слова $\overline{g}_1 \ldots \overline{g}_n$), и цепочку $C_{\overline{x}'}(a, b'^{-1})$. Букву b'^{-1} назоваем буквой, идеально (соответственно, квазиидеальной) связанной с буквой a в слове $\overline{x}$, $C_{\overline{x}'}(a, b'^{-1})$ — идеальной (квазиидеальной) цепочкой, связывающей a и b'^{-1}. Вполне возможно, что буква b'^{-1} в слово $\overline{x}$ не входит.

Предположим, что заданы семейства $\Gamma'=\{\gamma'_n(r)\colon n, r \in \mathsf{N}^+\}$, $\Gamma=\{\gamma_n(r)\colon n, r \in \mathsf{N}^+\}$ и $F=\{f_n(r)\colon n, r \in \mathsf{N}^+\}$, где $\gamma'_n(r)$ и $\gamma_n(r)$ — покрытия пространства $\widetilde{X}^n$, причем если $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in A \in \gamma'_n(r)$ $(\gamma_n(r))$ и $x_i^\varepsilon \in X$, то $y_i^\varepsilon \in X$, $f_n(r)\colon \gamma_n(r) \to \widetilde{X}^n$— отображение, каждому элементу покрытия $\gamma_n(r)$ ставящее в соответствие некоторую содержащуюся в нем точку для всех натуральных r и n. Пусть выполнено условие $(*)$:

для любых $n \in \mathsf{N}^+$, $\pi \in S_n$ произвольное слово $\overline{x} \equiv x_1 \ldots x_p g_0 g_n^{-1} x_p^{-1} \ldots x_1^{-1}$, представимое в виде $x_1 \ldots x_p g_0 g_1^{-1} x_p^{-1} \ldots x_1^{-1} \odot x_1 \ldots x_p g_1 g_2^{-1} x_p^{-1} \ldots x_1^{-1} \odot \cdots \odot x_1 \ldots x_p g_{n-1} g_n^{-1} x_p^{-1} \ldots x_1^{-1}$, принадлежит множеству $\widehat{\Psi}_r(\Gamma)=\{y_1 \ldots y_k u v^{-1} y_k^{-1} \ldots y_1^{-1}\colon k \in \mathsf{N}, y_1, \ldots, y_k, u, v \in \widetilde{X}$, $(y_1, \ldots, y_k, u)$ и $(y_1, \ldots, y_k, v)$ содержатся в одном элементе покрытия $\gamma_{k+1}(r)\}$, если $x_1 \cdot \ldots \cdot x_p \cdot g_{i-1} \cdot g_1^{-1} \cdot x_p^{-1} \cdot \ldots \cdot x_1^{-1}$ является F-сдвинутым на некоторый набор $(r_1^{(i)}, \ldots, r_{p_i}^{(i)})$ разных чисел и укороченным на $m_i=p_i-p$ элементом множества $\widehat{\Psi}_{\pi(i)-1+r}(\Gamma')$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Эквивалентное утверждение: все точки $(x_1, \ldots, x_p, g_i)$ при $i=0, \ldots, n$ содержатся в одном элементе покрытия $\gamma_{p+1}(r)$ при тех же ограничениях на $x_1, \ldots, x_p, g_0, \ldots, g_n$.

В этих предположениях справедлива

Основная лемма. *Пусть $p \in \mathsf{N}^+$, $k_1, \ldots, k_p$ — различные натуральные числа, и пусть $\overline{x}=\overline{x}_{k_1} \odot \cdots \odot \overline{x}_{k_p}$, где $\overline{x}_{k_i} \in \widehat{\Psi}_{k_i}(\Gamma')$ и $\overline{x}_{k_i}$ несократимо для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$. Тогда найдется представление (в дальнейшем называемое правильным) слова $\overline{x}$ в виде $\overline{y}_{n_1} \odot \cdots \odot \overline{y}_{n_m}$, где $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathsf{N}^+$, обладающее следующими свойствами:*

1) *для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ $\overline{y}_{n_i}$ — каноническое слово, и при выполнении сокращений в слове $\overline{y}_{n_1} \ldots \overline{y}_{n_m}$, приводящих к получению слова $\overline{x}$,* буквы слова $\overline{y}_{n_i}$ *сокращаются только с буквами из других слов и хотя бы одна из двух средних букв в слове $\overline{y}_{n_i}$ или не сокращается, или сокращается с ближайшей к ней средней буквой ближайшего соседнего слова (например, если это правая средняя буква, то она сокращается с левой средней буквой слова $\overline{y}_{n_{i+1}}$); если вторая средняя буква при этом сокращается, то она обязательно должна сократиться либо с ближайшей средней буквой ближайшего соседнего слова, либо с буквой из ближайшей половины этого слова;*

2) *если цепочка, соединяющая некоторые буквы в слове $\overline{x}=\overline{y}_{n_1} \odot \cdots \odot \overline{y}_{n_m}$, содержит две не являющиеся средними буквы, связанные в некотором слове $\overline{y}=\overline{y}_{n_1} \odot \cdots \odot \overline{y}_{n_m}$, в котором произведены те же сокращения, что и при получении слова $\overline{x}$, но в меньшем количестве, то эти две буквы должны быть идеально связаны в слове $\overline{y}$;*

3) *множеству слов* $\{\bar{y}_{n_1}, \ldots, \bar{y}_{n_m}\}$ *соответствует множество пар* $\{\bar{y}_{n_1^{(i)}}, \bar{y}_{n_2^{(i)}}\}$ $i \in I \subseteq \{1, \ldots, p, \omega\}$; *эти пары не пересекаются, и для каждого* $i \in I$ *или* $\bar{y}_{n_1^{(i)}}$, *и* $\bar{y}_{n_2^{(i)}}$ *совпадают как слова* (*т. е.* $\bar{y}_{n_1^{(i)}} \equiv \bar{y}_{n_2^{(i)}} \equiv g_1 \ldots g_k a c^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$ *для некоторых* $g_1, \ldots, g_k, a, c \in \tilde{X}$) *и как сомножители в произведении* $\bar{y}_{n_1} \cdot \ldots \cdot \bar{y}_{n_m}$, *или* $\bar{y}_{n_1^{(i)}}$ *и* $\bar{y}_{n_2^{(i)}}$ *имеют следующий вид*: $\bar{y}_{n_1^{(i)}} \equiv g_1 \ldots g_k a b^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$, $\bar{y}_{n_2^{(i)}} \equiv g_1 \ldots g_k b c^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$, *буквы* b^{-1} *и* b *сокращаются при выполнении в слове* $\bar{y}_{n_1} \cdot \ldots \cdot \bar{y}_{n_m}$ *сокращений, приводящих к получению слова* $\bar{x}$, *буквы* b' *и* b'^{-1}, *с которыми сокращаются буквы* b^{-1} и b *соответственно, должны быть идеально связаны в слове* $\bar{x}$; *друг с другом* b^{-1} *и* b *сокращаться не должны. Если* j — *номер пары, содержащей слово, буква из которого входит в цепочку, включающую буквы* b^{-1} *и* b, *должно быть* $k_j \geq k_t$. *Пусть* $\{u_1, \ldots, u_l\}$ — *цепочка, включающая буквы* b^{-1} *и* b. *Положим* $\tilde{u}_r = u_r$, *если* u_r — *буква из левой половины или левая средняя дуква содержащего ее слова,* $\tilde{u}_r = u_r^{-1}$ *в противном случае. Все точки* $(g_1, \ldots, g_k, \tilde{u}_1)$, $(g_1, \ldots, g_k, \tilde{u}_2)$, $\ldots$, $(g_1, \ldots, g_k, \tilde{u}_r)$ (*в этом множестве содержатся, в частности, точки* $(g_1, \ldots, g_k, a)$ *и* $(g_1, \ldots, g_k, c)$) *должны принадлежать одному элементу* A *покрытия* $\gamma_{k+1}(k_i)$, *и для некоторых* $x_1, \ldots, x_k \in \tilde{X}$ *должно выполняться равенство* $(x_1, \ldots, x_k, b) = f_{k+1}(k_i)(A)$; *считаем, что* $\gamma_n(k_\omega) = \tilde{X}^n$, $f_n(k_\omega)$ — *тождественное отображение для всех натуральных* n. *Букву* $b^{-1}(b)$ *будем называть главной буквой в содержащем ее слове* $\bar{y}_{n_1^{(i)}}$ (*в слове* $\bar{y}_{n_2^{(i)}}$ *соответственно*), *а слова* $\bar{y}_{n_1^{(i)}}$ и $\bar{y}_{n_2^{(i)}}$ — *результатом деления слова* $g_1 \ldots g_k a c^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$.

В любом случае, если $i \in I \cap \{1, \ldots, p\}$, *то* $g_1 \ldots g_k a c^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$ — F-*сдвинутый на некоторое подмножество множества* $\{k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_p\}$ *и укороченный на* $m_i \in \mathbb{N}$ (m_i *произвольно*) *элемент* $\bar{z}_i$ *множества* $\tilde{\Psi}_{k_i}(\Gamma')$; *при этом либо* $\bar{z}_i \equiv \bar{x}_{k_i}$, *либо* $\bar{z}_i$ *есть слово* $\bar{x}_{k_i}$ *с представленными средними буквами. Если же* $i = \omega$, *то* $a = c$.

4) *Пусть* $i \in I \cap \{1, \ldots, p\}$, $\bar{y}_{n_1^{(i)}} \equiv g_1 \ldots g_k a b^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$, $\bar{y}_{n_2^{(i)}} \equiv g_1 \ldots g_k c d^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$, *и пусть* $j \in \{1, \ldots, k\}$. *Слово* $g_1 \ldots g_k a d^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$ *является тогда* F-*сдвинутым на некоторый набор* $(r_1, \ldots, r_q)$ *и укороченным на* $m_i = q - k$ *словом* $\bar{z}_i$ (см. 3)). *Пусть буквы* g_j *и* g_j^{-1} *в слове* $g_1 \ldots g_k a d^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$ *определяются числом* r_s, *т. е. получены на* s-*ом индуктивном шаге* (*см. определение* F-*сдвинутых и укороченных слов*). *В цепочке в слове* $\bar{x}$, *содержащей буквы* g_j *и* g_j^{-1}, *должна быть буква* u *среди левых* (*правых*) *средних букв такая, что* u *стоит на* s-*ом месте справа или слева соответственно в слове* $\bar{z}_i$ *и эта буква не должна быть главной в содержащем ее слове. И сама буква* u, *и ее вхождение в слово* $\bar{x}$ *должны быть одними и теми же для всех слов, буквы из которых входят в идеальную цепочку, содержащую буквы* g_j *и* g_j^{-1}. *Если* r — *номер пары, содержащей слово, две средние буквы которого входят в цепочку* (*в смысле М. Г. Ткаченко, а не идеальную*), *содержащую буквы* g_j *и* g_j^{-1}, *то должно быть* $k_r \geq r_s$, *и если* g_j *и* g_j^{-1} *не совпадают с буквами, стоящими на* s-*х*

местах от концов слова $\bar{z}_i$, *то должна найтись полученная в результате деления пара, главные буквы слов из которой идеально связаны (или совпадают) с буквами, сокращающимися с буквами* g_j *и* g_j^{-1}. *Если же цепочка идеальна, то буквы* g_j *и* g_j^{-1} *должны совпадать с буквами, стоящими на s-х местах от концов слова* $\bar{z}_i$.

5) *Каждый элемент множества* $\{\bar{y}_{n_1}, \ldots, \bar{y}_{n_m}\}$ *должен содержаться в некоторой паре* $\{\bar{y}_{n_1^{(i)}}, \bar{y}_{n_2^{(i)}}\}$, *и каждый элемент пары* $\{\bar{y}_{n_1^{(i)}}, \bar{y}_{n_2^{(i)}}\}$ *при* $i \in I$ *должен принадлежать множеству* $\{\bar{y}_{n_1}, \ldots, \bar{y}_{n_m}\}$, *причем для каждого* $i \in I \cap \{1, \ldots, p\}$ *найдется ровно одна пара с номером* i *(для* $i = \omega$ *таких пар может быть несколько).*

6) *Если* $g_1 \ldots g_k ab^{-1} g_k^{-n} \ldots g_1^{-1} \equiv \bar{y}_{n_j}$ *для* $j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ *и ни одна из букв* $g_i, \ldots, g_k$, a *(или* b^{-1}, $g_k^{-1}, \ldots, g_i^{-1}$*) не сокращается с буквами из слов* $\bar{y}_s$ *при* $s \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$ *(в силу условия 1) это условие означает, что перечисленные буквы не сокращаются в слове* $\bar{x}$*), то слово* $g_i \ldots g_k\, a$ *(слово* $b^{-1} g_k^{-1} \ldots g_i^{-1}$ *соответственно) несократимо.*

Доказательство. Зафиксируем какой-нибудь порядок сокращений в слове $\bar{x}_{k_1} \ldots \bar{x}_{k_p}$, в результате выполнения которых получается слово $\bar{x}$. Пусть этих сокращений оказалось q. Через $\bar{x}^{(k)}$ будем обозначать слово $\bar{x}_{k_1} \ldots \bar{x}_{k_p}$, в котором произведено k первых сокращений, $k \leq q$. Таким образом, $\bar{x}^{(0)} \equiv \bar{x}_{k_1} \ldots \bar{x}_{k_p}$, $\bar{x}^{(q)} \equiv \bar{x}$. Сейчас мы для каждого $\beta \leq q$ построим правильное представление слова $\bar{x}^{(\beta)}$ так, что представление слова $\bar{x}^{(\beta)}$ получается в результате некоторой трансформации представления слова $\bar{x}^{(\beta-1)}$, если $\beta \geq 1$. За представление слова $\bar{x}^{(0)}$ примем представление $\bar{x}_{k_1} \odot \cdots \odot \bar{x}_{k_p}$. Последовательно выполняя описанные ниже преобразования представлений, мы получим правильное представление слова $\bar{x}$.

Пусть $q > 0$, $\beta < q$ и для слова $\bar{x}^{(\beta)}$ уже построено правильное представление $\bar{x}^{(\beta)} = \bar{y}_{n_1} \odot \ldots \odot \bar{y}_{n_m}$, полученное с помощью β преобразований представления $\bar{x}_{k_1} \odot \cdots \odot \bar{x}_{k_p}$. Рассмотрим четыре возможных случая:

А. $\beta + 1$-е сокращение состоит в вычеркивании пары букв вида $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$, где x^{ε} — правая средняя буква или буква из правой половины слова $\bar{y}_{n_i}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $x^{-\varepsilon}$ — левая средняя буква или буква из левой половины слова $\bar{y}_{n_{i+1}}$; при этом хотя бы одна из букв x^{ε}, $x^{-\varepsilon}$ является средней и цепочки, связывающие буквы x^{ε} и $x^{-\varepsilon}$ с некоторыми буквами в слове $\bar{x}^{(\beta)} = \bar{y}_{n_1} \odot \cdots \odot \bar{y}_{n_m}$, содержат буквы, не являющиеся средними ни для каких слов.

Б. $\beta + 1$-е сокращение состоит в вычеркивании пары букв вида $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$, где x^{ε} — буква из правой половины или правая средняя буква слова $\bar{y}_{n_j}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, $x^{-\varepsilon}$ — правая средняя буква в слове $\bar{y}_{n_{i+1}}$, $j \leq i$ (или — аналогичный случай — x^{ε} — левая средняя буква в слове $\bar{y}_{n_j}$, $x^{-\varepsilon}$ — буква из левой половины или левая средняя буква слова $\bar{y}_{n_{i+1}}$).

В. $\beta + 1$-е сокращение состоит в вычеркивании пары букв вида $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$, где x^{ε} — левая средняя буква слова $\bar{y}_{n_j}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, $x^{-\varepsilon}$ — правая средняя буква слова $\bar{y}_{n_{i+1}}$, $j \leq i$.

Г. Все прочие случаи.

Рассмотрим случай А. Пусть $x^{\varepsilon}=b^{-1}$, $x^{-\varepsilon}=g_{k+1}$, $\overline{y}_{n_i}\equiv g_1\ldots g_k ab^{-1}g_k^{-1}\ \ldots\ g_1^{-1}$, $\overline{y}_{n_{i+1}}\equiv g_1\ldots g_k g_{k+1}\ldots g_m cd^{-1}g_m^{-1}\ldots g_{k+1}^{-1}g_k^{-1}\ \ldots\ g_1^{-1}$ или $\overline{y}_{n_{i+1}}\equiv g_1\ldots g_k g_{k+1}\widetilde{g}\ {}^{1}{}_{1}\,g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$ (случай, когда x^{ε} — буква из правой половины слова $\overline{y}_{n_i}$, рассматривается аналогично). Найдем букву a_1, квазиидеально связанную с буквой b^{-1} в слове $\overline{x}^{(\beta)}$, и букву b_1^{-1}, квазиидеально связанную с буквой g_{k+1} в слове $\overline{x}^{(\beta)}$ (если g_{k+1} — буква из левой половины слова $\overline{y}_{n_{i+1}}$, то в качестве b_1^{-1} возьмем g_{k+1}^{-1}). Ясно, что a_1 является левой средней буквой некоторого слова $\overline{y}_{n_l}$, причем фрагмент этого слова, начинающийся с первой буквы и кончающийся буквой a_1, имеет вид $g_1\ldots g_k a_1$, а буква b_1^{-1} является правой средней буквой некоторого слова $\overline{y}_{n_j}$, причем фрагмент этого слова, начинающийся с буквы b_1^{-1} и кончающийся последней буквой, имеет вид $b_1^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$ (если в качестве буквы b_1^{-1} не фигурирует буква g_{k+1}^{-1} из слова $\overline{y}_{n_{i+1}}$; в противном случае положим $j=i$). Пусть буква b_1 из слова $\overline{y}_{n_{j+1}}$ идеально связана с буквой b_1^{-1} из слова $\overline{y}_{n_{j+s}}$, буква a_1^{-1} из слова $\overline{y}_{n_{l-1}}$ — с буквой $\widetilde{a}_1$ из слова $\overline{y}_{n_{l-t}}$. Найдем букву b_1^{-1}, квазиидеально связанную с буквой, которая сокращается с $\widetilde{b}_1^{-1}$ (если такой нет, то в качестве $\widetilde{\widetilde{b}}_1^{-1}$ возьмем $\widetilde{b}_1^{-1}$) и букву $\widetilde{\widetilde{a}}_1$, квазиидеально связанную с буквой, которая сокращается с $\widetilde{a}_1$ (если такой нет, то в качестве $\widetilde{\widetilde{a}}_1$ возьмем букву $\widetilde{a}_1$); иными словами, $\widetilde{\widetilde{b}}_1^{-1}$ и $\widetilde{\widetilde{a}}_1$ — такие связанные в слове $\overline{x}^{(\beta+1)}$ буквы, что $C_{\overline{x}^{(\beta+1)}}(\widetilde{\widetilde{a}}_1, \widetilde{\widetilde{b}}_1^{-1})\supseteq\{x^{\varepsilon}, x^{-\varepsilon}\}$. Пусть $\widetilde{\widetilde{a}}_1$ — буква из слова $\overline{y}_{n_{l-t'}}$, $\widetilde{\widetilde{b}}_1^{-1}$ — буква из слова $\overline{y}_{n_{j+s'}}$ и $\overline{y}_{n_r}\equiv g_1\ldots g_k u_r v_r^{-1}g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$ для всех $r\in\{l-t',\ldots,l-t-1, l,\ldots,j, j+s+1,\ldots,j+s'\}$. Найдем среди слов $\overline{y}_{n_r}$ при $r\in\{l-t',\ldots,l-t-1, l,\ldots,j, j+s+1,\ldots,j+s'\}$ слово $\overline{y}_{n_{r_0}}$, входящее в пару (см. 3)) с номером k_0 таким, что k_{k_0} — наименьшее из всех возможных. Выберем элемент A покрытия $\gamma_{k+1}(k_{k_0})$, содержащий точки $(g_1,\ldots, g_k, u_r)$ для всех $r\in\{l-t',\ldots, l-t-1, l+1,\ldots,j, j+s+2,\ldots,j+s'\}$ и $(g_1,\ldots,g_k, v_r)$ для всех $r\in\{l-t',\ldots, l-t-2, l,\ldots, j-1, j+s+1,\ldots, j+s'\}$. Если слова, $\overline{y}_{n_{l-t-1}}$ и $\overline{y}_{n_l}$ не являются результатом деления некоторого слова, то A должно содержать и точки $(g_1,\ldots,g_k, u_l)$, $(g_1,\ldots,g_k, v_{l-t-1})$. Если слова $\overline{y}_{n_j}$ и $\overline{y}_{n_{j+s+1}}$ не есть результат деления, то A должно содержать $(g_1,\ldots,g_k, v_j)$ и $(g_1,\ldots,g_k, u_{j+s+1})$ (разумеется, только в том случае, если $t'>t$ и $s'>s$ соответственно). Существование такого элемента A вытекает из того, что представление $\overline{x}^{(\beta)}=\overline{y}_{n_1}\odot\cdots\odot\overline{y}_{n_m}$ правильно. В самом деле: в силу индуктивного предположения, для слова $\overline{x}^{(\beta)}$ выполнено условие 3). Из этого условия вытекает, что слова $\overline{y}_{n_r}$ при $r\in\{l-t',\ldots,l-t-2, l+1,\ldots,j-1, j+s+2,\ldots,j+s'\}$ не являются результатом деления, поскольку средние буквы этих слов сокращаются со средними буквами других слов, а если бы эти слова были результатами делений, то хотя бы одна из средних букв каждого такого слова была бы главной и обязана была бы сокращаться с буквой, входящей в некоторую идеальную цепочку, т. е. с буквой из левой или правой половины некоторого слова. Буквы u_{l-t-1}, v_l, u_j и v_{j+s+1} тоже не могут быть главными в содержащих их словах, поскольку эти буквы сокращаются с некоторыми средними буквами. Из последнего замечания вытекает, в частности, что если слово $\overline{y}_{n_{l-t-1}}(\overline{y}_{n_l})$ или слово $\overline{y}_{n_{j+s+1}}$ $(\overline{y}_{n_j})$ получено в результате деления, то пару с ним непременно образует слово $\overline{y}_{n_i}$ $(y_{n_{l-t-1}})$ или, соответственно, $\overline{y}_{n_j}$ $(\overline{y}_{n_{j+s+1}})$. Заметим, что для всех $r \in \{l-t' \ldots, t-t-2, l, \ldots, j-1, j+s+1, \ldots, j+s'-1\}$ буква v_r^{-1} сокращается с буквой $u_{r+1}=v_r$; кроме того, $v_{l-t-1}^{-1}=u_l^{-1}$ и $v_j^{-1}=u_{j+s+1}^{-1}$. По условию 3) для каждого $r \in \{1-t', \ldots, l-t-1, l, \ldots, j, j+s+1, \ldots, j+s'\}$, если слова $\overline{y}_{n_{l-t-1}}$, $\overline{y}_{n_l}$ и $\overline{y}_{n_j}$, $\overline{y}_{n_{j+s+1}}$ не есть результат деления, слово $\overline{y}_{n_r}$ является F-сдвинутым и укороченным элементом множества $\widehat{\Psi}_{i_r}(\Gamma')$, причем в силу выбора k_0 $k_{k_0} \leq i_r$ и i_r разные для разных r. Если же слова $\overline{y}_{n_{l-t-1}}$ и $\overline{y}_{nl}$ $(\overline{y}_{n_j}$ и $\overline{y}_{n_{j+s+1}})$ есть результат деления, то из множества, которое пробегает r, нужно исключить числа $l-t-1$ и l (j и $j+s+1$) и заметить, что по условию 3) слово $g_1 \ldots g_k u_{l-t-1} v_l^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$ $(g_1 \ldots g_k u_j v_{j+s+1}^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1})$ есть F-сдвинутый и укороченный элемент множества $\widehat{\Psi}_{i_l}(\Gamma')$ $(\widehat{\Psi}_{i_j}(\Gamma'))$, причем $k_{k_0} \leq i_l + i_r$ $(k_{k_0} \leq i_j + i_r)$. Отсюда и из условия (*) для семейств Γ' и Γ немедленно вытекает наличие требуемого A.

Пусть $f_{k+1}(k_{k_0})(A)=(x_1, \ldots, x_k, x)$.

Над словами $\overline{y}_{n_{l-t}}, \ldots, \overline{y}_{n_{l-1}}$ проделаем операцию $*$:

пусть некоторое слово $\overline{y}_{n_r} \equiv h_1 \ldots h_\nu u v^{-1} h_\nu^{-1} \ldots h_1^{-1}$ из числа слов $\overline{y}_{n_{l-t}}, \ldots, \overline{y}_{n_{l-1}}$ получено в результате деления, буква v^{-1} — главная в нем и ν — наименьшее из возможных. Найдем слово $\overline{y}_{n_{r'}} \equiv h_1 \ldots, h_\nu v w^{-1} h_\nu^{-1} \ldots h_1^{-1}$, парное слову $\overline{y}_{n_r}$; ясно, что $\overline{y}_{n_{r'}}$ тоже находится среди слов $\overline{y}_{n_{l-t}}, \ldots, \overline{y}_{n_{l-1}}$. В самом деле: буква a_1^{-1} из правой половины слова $\overline{y}_{n_{l-1}}$ идеально связана с буквой $\widetilde{a}_1$ из левой половины слова $\overline{y}_{n_{l-t}}$, поэтому все слова $\overline{y}_{n_{l-t}}, \ldots, \overline{y}_{n_{l-1}}$ имеют длину бо́льшую, чем длина слова $\overline{y}_{n_l}$, поскольку буква a_1, с которой сокращается a_1^{-1}, является левой средней буквой в слове $\overline{y}_{n_l}$. Кроме того, буква $\widetilde{a}_1$ либо сокращается с правой средней буквой слова $\overline{y}_{n_{l-t-1}}$, либо не сокращается вовсе (в слове $\overline{x}^{(\beta)}$), ибо она идеально связана с a_1^{-1}. Отсюда и из условия 1) вытекает, что цепочки в слове $\overline{x}^{(\beta)}$, содержащие средние буквы слов $\overline{y}_{n_{l-t}}, \ldots, \overline{y}_{n_{l-1}}$, состоят только из букв этих слов. Нужное утверждение следует из того, что главная буква слова $\overline{y}_{n_{r'}}$ по определению должна принадлежать цепочке, содержащей главную букву слова $\overline{y}_{n_r}$. Предположим, что пара $\{\overline{y}_{n_r}, \overline{y}_{n_{r'}}\}$ имеет номер η. Пусть C^ν — цепочка в слове $\overline{x}^{(\beta)}$, содержащая буквы v^{-1} и v. Положим $\widetilde{C}^\nu = \{\widetilde{c}=c^\varepsilon: c \in C^\nu, \varepsilon=1$, если c — буква из левой половины или левая средняя буква некоторого слова, $\varepsilon=-1$ в противном случае$\}$. В силу условия 1) все слова, чьи буквы входят в C^ν, первыми своими буквами имеют буквы $h_1, \ldots, h_\nu$ и $h_1 \ldots h_k h_{k+1} \equiv g_1 \ldots g_k \widetilde{a}_1$, поскольку буква a_1^{-1} из правой половины слова $\overline{y}_{n_{l-1}}$ идеально связана с буквой $\widetilde{a}_1$ из левой половины слова $\overline{y}_{n_{l-t}}$. Среди элементов покрытия $\gamma_{\nu+1}(k_\eta)$ найдется элемент B, содержащий все точки $(h_1, \ldots, h_k, x, h_{k+2}, \ldots, h_\nu, \widetilde{c})$ для $\widetilde{c} \in \widetilde{C}^\nu \setminus \{v, v\}$. В самом деле: если две средние буквы слова, полученного в результате деления, входят в одну цепочку с буквой h_μ для некоторого $\mu \leq \nu$, то $\mu \leq k+1$ в силу выбора ν. Пусть две средние буквы слова $\overline{y}_{n_\tau}$ входят в $C^\nu \setminus \{v, v^{-1}\}$; слово $\overline{y}_{n_\tau}$ по условию 3) есть F-сдвинутое и укороченное слово $\overline{z}_{\theta_\tau}$ для некоторого θ_τ. По условию 4) при F-сдвиге и укорачивании слова z_{θ_τ} новые, отличные от букв слова $\overline{z}_{\theta_\tau}$, буквы могли появиться только на местах, отстоящих от концов слова $\overline{y}_{n_\tau}$, не более, чем на $k+1$, т. е. все буквы слова $\overline{y}_{n_\tau}$, стоящие на расстоянии, большем $k+1$, от концов этого слова, совпадают с буквами слова $\overline{z}_{\theta_\tau}$ и расположены в том же порядке, только некоторые буквы $\overline{z}_{\theta_\tau}$ могут быть пропущены. То же самое можно сказать и про слово $\overline{y}=h_1\ldots h_\nu uw^{-1}.h_\nu^{-1}\ldots h_1^{-1}$: оно является F-сдвинутым и укороченным словом $\overline{z}_\theta$ для некоторого и буквы, расположенные на большем $k+1$ расстоянии от концов $\overline{y}$, совпадают с буквами слова $\overline{z}_\theta$. По условию 4) либо на $k+1$-х местах от концов слов вида $\overline{y}_{n_\tau}$ или $\overline{y}$ стоят соответствующие буквы $z_{\theta_\tau}^{s_\tau}$ и $z_{\theta_\tau}^{s_\tau-1}$ слова $\overline{z}_{\theta_\tau}$ (или, соответственно, буквы z_θ^s и z_θ^{s-1} слова $\overline{z}_\theta$), либо эти соответствующие буквы принадлежат цепочке, содержащей буквы h_{k+1} и h_{k+1}^{-1} и не являются главными. Заменим во всех словах $\overline{y}_{n_\tau}$, чьи буквы входят в $C^\nu\diagdown\{v, v^{-1}\}$, буквы h_{k+1} и h_{k+1}^{-1} на $z_{\theta_\tau}^{s_\tau}$ и $z_{\theta_\tau}^{s_\tau-1}$ соответственно, а в слове $\overline{y}$ — на буквы z_0^s и $z^{s-1}{}_0$. В силу вышесказанного, измененные таким образом слова, чьи средние буквы входили в $C^\nu\diagdown\{v, v^{-1}\}$, и слово $\overline{y}$ попрежнему остаются F-сдвинутыми и укороченными элементами множеств $\widehat{\Psi}_\mu(\Gamma')$ с теми же номерами μ, только теперь при F-сдвиге и укорачивании новые буквы могли появиться только на местах, находящихся на меньших $k+1$ расстояниях от концов этих измененных слов; эти слова получаются при F-сдвиге и укорачивании тех же, что и прежде, слов вида $\overline{z}_{\theta_\tau}$ и $\overline{z}_\theta$. Вспомним определение точки x: $(x_1\ldots, x_k, x)=f_{k+1}(k_{k_0})(A)$ для некоторого $A\in\gamma_{k+1}(k_{k_0})$. По построению элемент A содержит все точки $(g_1,\ldots, g_k, c)$ для c таких, что c^ε входит в цепочку, содержащую буквы $\widetilde{a}_1$ и a_1^{-1}, c^ε не является главной буквой для содержащего ее слова, $\varepsilon=1$ если c — левая средняя буква содержащего ее слова, $\varepsilon=-1$ в противном случае и буква c^ε — обязательно одна из средних букв. В силу условий 1) и 4) среди этих точек непременно находятся все точки вида $z_{\theta_\tau}^{s_\tau}$, z_θ^s. Значит, $(g_1,\ldots, g_k, z)=(h_1,\ldots h_k, z)\in A$, если z имеет вид $z_{\theta_\tau}^{s_\tau}$ или z_θ^s. Еще раз изменим уже измененные слова $\overline{v}_{n_\tau}$ и $\overline{y}$: на $k+1$-е места от концов этих слов вместо букв $z_{\theta_\tau}^{s_\tau}$ и $z_{\theta_\tau}^{s_\tau-1}$ (или z_θ^s и z_θ^{s-1}) поставим буквы x и x^{-1} соответственно. Получим новые слова вида $\overline{y}'_{n_\tau}$ и $\overline{y}'$. По определению F-сдвинутых и укороченных слов слова $\overline{y}'_{n_\tau}$ и $\overline{y}'$ есть F-сдвинутые и укороченные слова $\overline{z}_{\theta_\tau}$ и $\overline{z}_\theta$ соответственно; из того, что средние буквы слов $\overline{y}_{n_\tau}$ входят в $C^\nu\diagdown\{v, v^{-1}\}$ вытекает, что выстроенные в том же порядке, что и слова $\overline{y}_{n_\tau}$ и $h_1\ldots h_\nu u$, $w^{-1}h_\nu^{-1}\ldots h_1^{-1}$ в произведении $\overline{y}_{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{y}_{n_m}$, слова $\overline{y}'_{n_\tau}$ и $h_1\ldots h_k\,.\,xh_{k+2}\ldots h_\nu u$, $w^{-1}h_\nu^{-1}\ldots h_{k+2}^{-1}x^{-1}h_k^{-1}\ldots h_1^{-1}$ сокращаются друг с другом так же, как и слова $\overline{y}_{n_\tau}$ и $h_1\ldots h_\nu u$, $w^{-1}h_\nu^{-1}\ldots h_1^{-1}$: $\nu+1$ букв, стоящих справа в самом левом слове, сокращаются с $\nu+1$ левыми буквами следующего по порядку слова, $\nu+1$ букв этого слова, стоящие справа, сокращаются с $\nu+1$ буквами следующего слова, стоящими слева, и т. д. Таким образом, $\overline{v}'_{n_\tau}$ и $\overline{y}'$ есть F-сдвинутые и укороченные элементы $\widehat{\Psi}_\mu(\Gamma')$ для разных μ, причем наименьшее μ соответствует слову $\bar{y}'$, и сокращаются слова $\bar{y}'_{n_\tau}$ и $\bar{y}'$ именно так, как описано в условии (*). Отсюда вытекает существование искомого B. Пусть v' — последняя координата точки $f_{\nu+1}$ $.(\min\mu)(B)=f_{\nu+1}(k_\eta)(B)$. В словах $\bar{y}_{n_r}$ и $\bar{y}_{n_{r'}}$ и в идеальной цепочке, связывающей буквы, с которыми сокращаются v и v^{-1}, заменим буквы v и v^{-1}, стоящие на $\nu+1$-х местах от концов содержащих их слов, на буквы v' и v'^{-1} соответственно. Все другие слова оставим без изменения. Получим новый набор слов $\bar{y}''_{n_{l-t}},\ldots,\bar{y}''_{n_{l-1}}$. Снова найдем среди этих слов связанную пару наименьшей длины ν', отличную от пары $\{\bar{y}''_{n_r}, \bar{y}''_{n_{r'}}\}$; возможно, $\nu'=\nu$, но номер этой пары η' должен отличаться от η. Пусть элементами этой пары являются слова $\bar{y}''_{n_s}$ и $\bar{y}''_{n_{s'}}$, $\bar{y}''_{n_s}\equiv h''_1\ldots h''_{\nu'}\, u''\, v''^{-1}\, h''^{-1}_{\nu'}\ldots h''^{-1}_1$, $\bar{y}''_{n_{s'}}\equiv h''_1\ldots h''_{\nu'}\, v''\, w''^{-1}\, h''^{-1}_{\nu}\ldots h''^{-1}_1$. Ясно, что $(h''_1,\ldots,h''_k, h''_{k+1})=(h_1,\ldots,h_k\; x)$. Пусть $C^{\nu'}$ — цепочка в слове $\bar{y}''_{n_{l-t}}\odot\cdots\odot\bar{y}''_{n_{l-1}}=\bar{y}''$, содержащая буквы v'' и v''^{-1}; $\bar{y}''=\bar{y}''_{n_{l-t}}\odot\cdots\odot\bar{y}''_{n_{l-1}}$ — слово, в котором произведены в точности такие же сокращения, как и при получении слова $\bar{x}^{(\beta)}$ из $\bar{y}_{n_1}\cdot\ldots\cdot\bar{y}_{n_m}$ в слове $\bar{y}_{n_{l-t}}\odot\cdots\odot\bar{y}_{n_{l-1}}$. Положим $\widetilde{C}^{\nu'}=\{\tilde{c}=c^\varepsilon\colon c\in C^{\nu'}$, $\varepsilon=1$, если c — буква из левой половины или левая средняя буква в слове, ее содержащем, $\varepsilon=-1$ в противном случае$\}$. Используя рассуждения, совершенно аналогичные проведенным выше, найдем элемент B' покрытия $\gamma_{\nu'+1}(k_{\eta'})$, содержащий все точки вида $(h''_1,\ldots,h''_{\nu'},\tilde{c})$ для $\tilde{c}\in\widetilde{C}^{\nu'}\setminus\{v'',v''\}$. Пусть v''' — последняя координата точки $f_{\nu'+1}(k_{\eta'})(B')$. Заменим буквы v'' и v''^{-1} в словах $\bar{y}''_{n_s}$ и $\bar{y}''_{n_{s'}}$ и все буквы в идеальной цепочке, связывающей буквы, с которыми сокращаются буквы v'' и v''^{-1}, на буквы v''' и v'''^{-1}. Мы получим новый набор слов $\bar{y}'''_{n_{l-t}},\ldots,\bar{y}'''_{n_{l-1}}$. В нем снова найдем связанную пару наименьшей длины, отличную от рассмотренных прежде, и проделаем аналогичные операции. Будем продолжать этот процесс, пока возможно. В конце концов мы получим новый набор $\bar{z}_{n_{l-t}},\ldots,\bar{z}_{n_{l-1}}$ слов, полученный из набора $\bar{y}_{n_{l-t}},\ldots,\bar{y}_{n_{l-1}}$ в результате применения операции $*$.

Над набором слов $\bar{y}_{n_{j+1}},\ldots,\bar{y}_{n_{j+s}}$ тоже проделаем операцию $*$, в результате которой получим новый набор $\bar{z}_{n_{j+1}},\ldots,\bar{z}_{n_{j+s}}$.

Пусть число r_0 (см. выше) находится среди чисел $l,\ldots,j$. Тогда за представление слова $\bar{x}^{(\beta+1)}$ примем представление $\bar{y}_{n_1}\odot\cdots\odot\underline{\bar{y}_{n_{l-t-1}}\odot\bar{y}_{n_l}}\odot\cdots\odot\bar{y}_{n_{r_0-1}}\odot g_1\ldots g_k u_{r_0} x^{-1} g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}\odot\bar{z}_{n_{l-t}}\odot\cdots\odot\bar{z}_{n_{l-1}}\odot\bar{z}_{n_{j+1}}\odot\cdots\odot\bar{z}_{n_{j+s}}\odot g_1\ldots g_k\, x\, v_{r_0}^{-1}\, g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}\odot\bar{y}_{n_{r_0+1}}\odot\cdots\odot\underline{\bar{y}_{n_j}\odot\bar{y}_{n_{j+s+1}}}\odot\cdots\odot\bar{y}_{n_m}$; изменения для случая, когда $r_0\in\{l-t',\ldots,l-t-1\}$ или $r_0\in\{j+s+1,\ldots,j+s'\}$, очевидны. Вместо подчеркнутых слов $\bar{y}_{n_{l-t-1}}\odot\bar{y}_{n_l}$ должно стоять слово $g_1\ldots g_k u_{l-t-1}\cdot v_l^{-1} g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$, если слова $\bar{y}_{n_{l-t-1}}$ и $\bar{y}_{n_l}$ получены в результате деления, и сами эти слова в противном случае; аналогично для слов $\bar{y}_{n_j}\odot\bar{y}_{n_{j+s+1}}$.

Мы получили искомое представление для слова $\bar{x}^{(\beta+1)}$; при этом возникла новая пара полученных в результате деления слов $\{g_1\ldots g_k u_{r_0} x^{-1} g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}, g_1$

$\ldots g_k x v_{r_0}^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}\}$ с номером k_0; если слова $\overline{y}_{n_{l-t-1}}$ и $\overline{y}_{n_l}$ (или $\overline{y}_{n_j}$ и $\overline{y}_{n_{j+s+1}}$) входили в одну пару полученных в результате деления слов, то эта пара „слиплась", т. е. вместо пары разных слов $\{\overline{y}_{n_{l-t-1}}, \overline{y}_{n_l}\}$ возникла пара совпадающих как слова и как сомножители в представлении для $\overline{x}^{(\beta+1)}$ слов $\{g_1 \ldots g_k u_{l-t-1} v_l^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}, g_1 \ldots g_k u_{l-t-1} v_l^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}\}$; номер ее совпадает с номером пары $\{\overline{y}_{n_{l-t-1}}, \overline{y}_{n_l}\}$.

Правильность полученного представления для слова $\overline{x}^{(\beta+1)}$ почти очевидна: выполнение условий 1), 2), 5) и 6) непосредственно вытекает из построения (каждой паре $\{\overline{y}_{n_r}, \overline{y}_{n_{r'}}\}$ для $r, r' \in \{l-t, \ldots, l-1\}$ или $r, r' \in \{j+1, \ldots, j+s\}$ соответствует пара $\{\overline{z}_{n_r}, \overline{z}_{n_{r'}}\}$ с тем же номером). Выполнение условий 3) и 4) для пары $\{g_1 \ldots g_k u_{r_0} x^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}, g_1 \ldots g_k x v_{r_0}^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}\}$ очевидно; для пар вида $\{\overline{z}_{n_r}, \overline{z}_{n_{r'}}\}$ выполнение этих условий становится ясным, если заметить, что при произведении операции $*$ менялись только главные буквы некоторых слов и идеальные цепочки, связывающие буквы, сокращающиеся с этими главными буквами, причем так, что если слово $\overline{y}_{n_s}$ получено в результате F-сдвига на некоторый набор и укорачивания слова $\overline{z}_{\theta_\tau}$, то соответствующее слову $\overline{y}_{n_s}$ слово $\overline{z}_{n_s}$ тоже получено в результате F-сдвига и укорачивания того же слова $\overline{z}_{\theta_\tau}$; измениться мог только набор чисел, определяющий F-сдвиг.

Перейдем к случаю Б.

I. Пусть $x^\varepsilon = b$, $x^{-\varepsilon} = b^{-1}$, $\overline{y}_{n_j} \equiv g_1 \ldots g_k a' b^{-1} g_{k+1} \ldots g_m c d^{-1} g_m^{-1} \ldots g_{k+1}^{-1} b a'^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$, $\overline{y}_{n_{i+1}} \equiv g_1 \ldots g_k a b^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$. Ясно, что либо $i=j$, либо буква, с которой окращается буква a'^{-1}, квазиидеально связана с буквой b^{-1} из слова $\overline{y}_{n_{i+1}}$ в слове $\overline{x}^{(\beta)}$. Найдем букву $\widetilde{b}^{-1}$, идеально связанную с буквой b из слова $\overline{y}_{n_j}$ в слове $\overline{x}^{(\beta)}$. Ясно, что буква $\widetilde{b}^{-1}$ входит в левую половину некоторого слова $\overline{y}_{n_l}$ и фрагмент этого слова, начинающийся с первой буквы и кончающийся буквой $\widetilde{b}^{-1}$, имеет вид $g_1 \ldots g_k a' \widetilde{b}^{-1}$. Положим $\overline{y}'_{n_l} \equiv \overline{y}_{n_{j+1}}, \overline{y}'_{n_{l+1}} \equiv \overline{y}_{n_{j+2}}, \ldots, \overline{y}'_{n_{l+i-j}} \equiv \overline{y}_{n_{i+1}}$. Над словами $\overline{y}_{n_l}, \ldots, \overline{y}_{n_j}$ проделаем операцию $*$ с очевидными изменениями: на первом шаге вместо замены букв, стоящих на $k+1$-х местах от концов слов $\overline{y}_{n_l}, \ldots, \overline{y}_{n_j}$ вычеркнем по четыре буквы, стоящие на $k+1$-х и $k+2$-х местах от концов этих слов; в результате мы получим слова $\overline{y}''_{n_l}, \ldots, \overline{y}''_{n_j}$, полученные в результате F-сдвигов и укорачиваний тех же слов $\overline{z}_{\theta_\tau}$, что и слова $\overline{y}_{n_l}, \ldots, \overline{y}_{n_j}$, но на этот раз могут измениться не только наборы, определяющие F-сдвиги слов вида $\overline{z}_{\theta_\tau}$, но и числа, определяющие их укорачивание. Изменения на следующих шагах совершенно аналогичны изменениям, описанным при определении операции $*$ в случае A. В итоге мы получим слова $\overline{z}_{n_l}, \ldots, \overline{z}_{n_j}$. Положим $\overline{u} \equiv g_1 \ldots g_k g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$ и позволим слову $\overline{z}_{n_j}$ сокращаться со словом $\overline{u}$ слева до буквы g_k включительно. Слово $\overline{x}^{(\beta+1)}$ запишем в виде $\overline{y}_{n_1} \odot \ldots \odot \overline{y}_{n_{l-1}} \odot \overline{y}'_{n_l} \odot \ldots \odot \overline{y}'_{n_{l+i-j}} \odot \overline{z}_{n_l} \odot \ldots \odot \overline{z}_{n_j} \odot \overline{u} \odot \overline{y}_{n_{i+2}} \odot \ldots \odot \overline{y}_{n_m}$; если слова $\overline{y}_{n_{l-1}}$ и $\overline{y}_{n_{j+1}}$ входят в одну пару, т. е. получены в результате деления некоторого слова $\overline{y}$, то вместо подчеркнутых слов должно стоять слово $\overline{y}$; в противном случае в произведении должны стоять сами подчеркнутые слова. Средние буквы слов $\overline{y}'_{n_l}, \ldots, \overline{y}'_{n_{l+i-j}}$ (или $\overline{y}, \ldots, \overline{y}_{n_{l+i-j}}$, если слова $\overline{y}_{n_{l-1}}$ и $\overline{y}_{n_{j+1}}$ получены в результате деления слова $\overline{y}$) образуют одну квазиидеальную цепочку, т. е. сокращаются так, что в результате получается слово $g_1 \ldots g_k \widetilde{a}\, \widetilde{b}^{-1} g_k^{-1} \ldots g_1^{-1}$; $\widetilde{a}=a'$, если $\overline{y}_{n_{l-1}}$ и $\overline{y}_{n_{j+1}}$ не есть результат деления, и $\widetilde{a}$ совпадает с левой средней буквой слова $\overline{y}_{n_{l-1}}$ в противном случае. Подслово $g_1 \ldots g_k\, \widetilde{a}\, \widetilde{b}^{-1}$ этого слова фигурирует в выписанном выше представлении для $\overline{x}^{(\beta+1)}$ вместо равного ему подслова $\overline{y}_{n_l}$ в представлении $\overline{x}^{(\beta)}=\overline{y}_{n_1} \odot \ldots \odot \overline{y}_{n_m}$ (если $\overline{y}_{n_{l-1}}$ и $\overline{y}_{n_{j+1}}$ не есть результат деления) или подслова, образованного левой половиной и левой средней буквой слова $\overline{y}_{n_{l-1}}$ и $k+2$-й буквой слева слова $\overline{y}_{n_l}$; это слово возникает в представлении $\overline{x}^{(\beta)}=\overline{y}_{n_1}\odot \cdots \odot \overline{y}_{n_m}$ в результате умножения слов $\overline{y}_{n_{l-1}}$ и $\overline{y}_{n_l}$: слово, составленное из $k+2$-х первых букв слова $\overline{y}_{n_{l-l}} \odot \overline{y}_{n_l}$ в представлении для $\overline{x}^{(\beta)}$, как раз равно $g_1 \ldots g_k \widetilde{a}\, \widetilde{b}^{-1}$ (если $\overline{y}_{n_{l-1}}$ и $\overline{y}_{n_{j+1}}$ получены в результате деления). Вместо буквы $\widetilde{b}^{-1}$ фигурирует равная ей правая средняя буква слова $\overline{y}'_{n_{l+i-j}}$. Слова $\overline{z}_{n_l}, \ldots, \overline{z}_{n_j}$ призваны обеспечить в слове $\overline{x}^{(\beta+1)}$ наличие букв, которые стоят на большем $k+2$ расстоянии от концов в словах $\overline{y}_{n_l}, \ldots, \overline{y}_{n_j}$ и входят в слово $\overline{x}^{(\beta)}=\overline{y}_{n_1}\odot \cdots \odot \overline{y}_{n_m}$: при произведении операции $*$ вычеркивались только буквы, которые все равно сокращаются, а изменялись только главные буквы и буквы из идеальных цепочек, которые тоже сокращались. Слово $\overline{u}$ вставлено в произведение для обеспечения выполнения условия 6): буквы, стоящие на k-м и $k+3$-м местах справа в слове $\overline{z}_{n_j}$, могут оказаться сократимыми, в то время как правая половина слова $\overline{y}_{n_{i+1}}$ из представления $\overline{x}^{(\beta)}=\overline{y}_{n_1}\odot \cdots \odot \overline{y}_{n_m}$ может не сокращаться в этом представлении.

Если буква $\widetilde{b}^{-1}$ в правильном представлении для $\overline{x}^{(\beta)}$ (а значит, и правая средняя буква слова $\overline{y}'_{n_{l+i-j}}$ в полученном нами представлении для $\overline{x}^{(\beta+1)}$) не сокращается, то полученное представление — искомое; слово $\overline{u}$ при этом входит в пару вида $\{\overline{u}, \overline{u}\}$, имеющую номер ω. Если же она сокращается, то мы опять находимся в условиях случая Б: в качестве правильного представления для слова $\overline{x}^{(\beta)}$ следует рассмотреть представление, полученное для слова $\overline{x}^{(\beta+1)}$ выше, в котором не произведено одно сокращение — то, в котором участвует правая средняя буква слова $\overline{y}'_{n_{l+i-j}}$. В качестве буквы $x^{-\varepsilon}$ следует рассмотреть правую среднюю букву слова $\overline{y}'_{n_{l+i-j}}$, в качестве буквы x^{ε} — букву, с которой она должна сокращаться в слове $\overline{x}^{(\beta+1)}$. Заметим, что x^{ε} — непременно буква из слова $\overline{y}_{n_{l-1}}$, поскольку только с буквой из этого слова может сокращаться буква $\widetilde{b}^{-1}$ в слове $\overline{x}^{(\beta)}=\overline{y}_{n_1}\odot \cdots \odot \overline{y}_{n_m}$. Номера слов, содержащих буквы x^{ε} и $x^{-\varepsilon}$, уменьшились, т. е. сокращаемые буквы „сдвинулись влево“; в этом и состоит смысл произведенных манипуляций.

II. Пусть $x^{\varepsilon}=b$, $x^{-\varepsilon}=b^{-1}$, $\overline{y}_{n_j}\equiv g_1\ldots g_k a' d^{-1} b a'^{-1} g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$, $\overline{y}_{n_{i+1}}\equiv g_1\ldots g_k a$ $\cdot b^{-1} g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$. Найдем сдово, парное слову $\overline{y}_{n_j}$. Пусть это слово $\overline{y}_{n_l}$. Оно имеет вид $g_1\ldots g_k a' c^{-1} f a'^{-1} g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$, где либо $c=d$, либо $f=d$.

Положим $\overline{y}'_{n_l}\equiv\overline{y}_{n_{j+1}},\ldots,\overline{y}'_{n_{l+i-j}}\equiv\overline{y}_{n_{i+1}}$, $\overline{y}'_{n_{l+i-j+1}}\equiv g_1\ldots g_k b c^{-1} g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$, $\overline{u}\equiv g_1\ldots g_k g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$, а слова $\overline{y}_{n_{l+1}},\ldots,\overline{y}_{n_{j-1}}$ преобразуем с помощью операции $*$ с аналогичными случаю I изменениями. Получим новые разбитые на пары слова $\overline{z}_{n_{l+1}},\ldots,\overline{z}_{n_{j-1}}$. Если буква c^{-1} из слова $\overline{y}'_{n_{l+i-j+1}}$ не сокращается, то представление $\overline{x}^{(\beta+1)}=\overline{y}_{n_1}\odot\ldots\odot\overline{y}_{n_{l-1}}\odot\underline{\overline{y}'_{n_l}\odot\cdots\odot\overline{y}'_{n_{l+i-j+1}}}\odot\overline{z}_{n_{l+1}}\odot\ldots\odot\overline{z}_{n_{j-1}}\odot\overline{u}\odot\overline{y}_{n_{i+2}}\odot$ $\cdots\odot\overline{y}_{n_m}$ — искомое (черта под словами имеет прежнее значение); если она сокращается, то мы опять находимся в условиях случая Б, причем номера слов, в которые входят сокращающиеся буквы x^{ε} и $x^{-\varepsilon}$, уменьшились (в качестве $x^{-\varepsilon}$ следует рассмотреть букву c^{-1} из слова $\overline{y}'_{n_{l+i-j+1}}$, в качестве x^{ε} — сокращающуюся с ней букву).

Таким образом, как в случае I, так и в случае II, мы можем либо получить правильное представление слова $\overline{x}^{(\beta+1)}$, либо „переместить“ сокращаемую пару влево. Число сомножителей в представлении слова $\overline{x}^{(\beta)}$ конечно, поэтому рано или поздно повторение рассуждений приведет нас к получению нужного представления слова $\overline{x}^{(\beta+1)}$.

В. Пусть $x^{\varepsilon}=a$, $x^{-\varepsilon}=a^{-1}$, $\overline{y}_{n_j}\equiv g_1\ldots g_k a b^{-1} g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$, $\overline{y}_{n_{i+1}}\equiv g_1\ldots g_k b a^{-1} g_k^{-1}$ $\ldots g_1^{-1}$. Возможны две ситуации:

I. Либо буква g_k из слова $\overline{y}_{n_j}$, либо буква g_k^{-1} из слова $\overline{y}_{n_{i+1}}$ не сокращается в слове $\overline{x}^{(\beta)}$. В этом случае положим $\overline{y}'_{n_j}\equiv g_1\ldots g_k g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}$ и в качестве представления слова $\overline{x}^{(\beta+1)}$ возьмем представление (очевидно, правильное) $\overline{y}_{n_1}\odot\cdots\odot\overline{y}_{n_{j-1}}$ $\odot\overline{y}'_{n_j}\odot\overline{y}_{n_{i+2}}\odot\cdots\odot\overline{y}_{n_m}$.

II. Обе эти буквы сокращаются. В качестве букв x^{ε} и $x^{-\varepsilon}$ рассмотрим букву g_k^{-1} из слова $\overline{y}_{n_{j-1}}$ и букву g_k из слова $\overline{y}_{n_{i+2}}$ соответственно, а вместо слова $\overline{x}^{(\beta)}$ рассмотрим слово $\overline{x}_1^{(\beta)}=\overline{y}_{n_1}\odot\cdots\odot\overline{y}_{n_{j-1}}\odot\overline{y}_{n_{i+2}}\odot\cdots\odot\overline{y}_{n_m}$, в котором произведены те же сокращения, что и при получении слова $\overline{x}^{(\beta)}$ и, кроме того, вычеркнуты пары букв вида $g_s^{-1}g_s$, где $s\in\{1,\ldots,k-1\}$, g_s^{-1} — буква из слова $\overline{y}_{n_{j-1}}$, а g_s — буква из слова $\overline{y}_{n_{i+2}}$. Тогда мы будем находиться в условиях одного из случаев А, Б и Г.

Г. В качестве представления слова $\overline{x}^{(\beta+1)}$ возьмем представление $\overline{y}_{n_1}\odot\cdots\odot\overline{y}_{n_m}$. Оно правильно, ибо все виды сокращений пар букв вида $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$, нарушающие правильность представления, рассмотрены в А, Б и В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нерешенные задачи топологической алгебры (препринт). Кишинев, 1985.
2. В. Г. Пестов. Окрестности единицы в свободных топологических группах. *Вестник Моск. у-та, мат., мех.*, 1985, № 3, 8—10.
3. Р. Энгелькинг. Общая топология. М., 1986.
4. М. Г. Ткаченко. О нульмерных топологических группах. *Труды Ленинградской межд. конф. по топологии и ее приложениям*, 1982.
5. Дж. Келли. Общая топология. М., 1981.
6. M. G. Tkačenko. On Topologies on Free Groups. *Czechoslovak Math. J.*, 33, № 1, 1984, 57—69.
7. М. Г. Ткаченко. О полноте топологических групп. *Сибирский матем. журнал.* 25, № 1, 1984, 146—158.
8. М. Г. Ткаченко. О полноте конечных слоев свободных топологических групп. Препринт, 1985.
9. Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. М., 1986.
10. В. Г. Пестов. Некоторые свойства свободных топологических групп. *Вестник Моск. у-та, мат., мех.*, 1982, № 1, 35—37.
11. Б. А. Пасынков. О спектральной разложимости топологических пространств. *Матем. сб.*, 66, 1965, 35—79.
12. О. В. Сипачева. Нульмерность и полнота в свободных топологических группах, II. Сердика, 15, 1989, 141—154.

Поступила 24. 10. 1988

Московский государственный университет им. Ломоносова. Механо-математический факультет, Кафедра общей топологии и геометрии, 119899 Москва СССР