Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

LOI LIMITE DU REGRESSOGRAMME POUR UN PROCESSUS PONCTUEL

GALAYE DIA

L'étude est la suite de notre article [1]. On montre que la loi limite de l'estimateur de J. W. Tukey [4] sur un processus ponctuel est une loi de Gumbel.

1. Notations et définitions. Soit $f_0^{\cdot}$ un processus ponctuel défini sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ à valeurs dans $\mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}$. On suppose que le support de $f_0^{\cdot}$ est $\mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}$. Pour tout borélien B de $\mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}$, on désigne par $N(f_0^{\cdot}, B)$ l'effectif aléatoire de $f_0^{\cdot}$ sur B. On suppose $e = N(f_0^{\cdot}, \mathsf{R}_+ \times \mathsf{R}) < +\infty$ presque sûrement.

Considérons n processus indépendants $f_i^{\cdot}$ $i=1, \dots, n$, définis sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ et de même loi que $f_0^{\cdot}$. Désignons par $f_{1,i}^{\cdot} = i = 0, 1, \dots, n$ la projection de $f_i^{\cdot}$ sur R_+.

Posons $f_{(n)}^{\cdot} = \Sigma_{i=1}^n f_i^{\cdot}$, $f_{1,(n)}^{\cdot} = \Sigma_{i=1}^n f_{1,i}^{\cdot}$, $m = \Sigma_{i=1}^n N(f_i^{\cdot}, \mathsf{R}_+ \times \mathsf{R})$.

Pour tout $x \in \mathsf{R}_+$ posons $\mu(x) = E(N(f_{1,0}^{\cdot}, [0, x[))$ et $\|\mu\| = E(N(f_{1,0}^{\cdot}, \mathsf{R}))$. On suppose que $\|\mu\| < +\infty$ et que la fonction $\mu(x)$ est absolument continue de densité f continue.

Lorsque $e \geqq 1$, désignons par $(X_1, Y_1), \dots, (X_e, Y_e)$ les points de $f_0^{\cdot}$ ordonnés suivant l'ordre lexicographique. Si $e=0$, on pose $(X_0, Y_0) = (0, 0)$.

Pour $m \geqq 1$ on note $(X_1^{(n)}, Y_1^{(n)}), \dots, (X_m^{(n)}, Y_m^{(n)})$ les variables de la superposition $f_{(n)}^{\cdot}$. Si $m=0$, on pose $(X_0^{(n)}, Y_0^{(n)}) = (0, 0)$.

On fait l'hypothèse suivante:

H_1 — Pour tout $e = e_0 (e_0 \geqq 1)$ et pour tout entier $j \geqq 1$

a) $E(Y^j_{i/X_1, \dots, X_{e_0}}) = E(Y^j_{i/X_i})$ pour $i = 1, \dots, e_0$

b) $E(Y^j_{i/X_i})$ est indépendante de i et de e_0 pour $i = 1, \dots, e_0$.

L'étude de l'estimation de la fonction $\psi(x) = E(Y_{1/X_1} = x)$ $x \in \Delta = [0, 1[$ a été faite dans [1]. Rappelons les résultats obtenus.

2. Résultats préliminaires. Soit K un entier supérieur ou égal à 2 et dépendant de n. Partionnons Δ en K intervalles de longueur $1/K$ qu'on désignera par $\Delta_{K,r} (r = 1, 2, \dots, K)$.

Si $i \geqq 1$, désignons par $\nu_{n,r}$ le nombre d'indices $i \geqq 1$ tels que $X_i^{(n)}$ appartient à $\Delta_{K,r}$ et $\zeta_{n,r}$ l'ensemble aléatoire de tels indices. Posons

$$\bar{Y}_{n,r} = \begin{cases} \nu_{n,r}^{-1} \sum_{i \in \zeta_{n,r}} Y_i^{(n)} & \text{si} \quad \nu_{n,r} \geqq 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad \nu_{n,r} = 0. \end{cases}$$

SERDICA, Bulgaricae mathematicae publicationes, Vol. 15, 1989, p. 203—209.

L'estimateur $\psi_{n,K}$ de ψ par la méthode du régressogramme à pas fixe est défini par $(\forall r \in \{1, 2, \ldots, K\})$, $(\forall x \in \Delta_{K,r})$ $\psi_{n,K}(x) = \bar{Y}_{n,r}$ et on pose $d(\psi, \psi_{n,K}) = \sup_{x \in \Delta} |\psi(x) - \psi_{n,K}(x)|$.

Pour étudier $\psi_{n,K}$ on utilise un estimateur auxiliaire noté $\tilde{\psi}_{n,K}$, défini de la manière suivante: si $N(f_{1,i}, \Delta_{K,r}) \geqq 1$, soit $(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i)$ la plus grande valeur du i^ème^ nuage projeté suivant l'ordre naturel dans R_+. Désignons pour $\tilde{N}_{n,r}$ la v. a. définie par $\tilde{N}_{n,r} = \mathrm{Card}\{i,\ i=1, \ldots, n,\ N(f_{1,i}, \Delta_{K,r}) \geqq 1\}$ on pose

$$\bar{\bar{Y}}_{n,r} = \left| \begin{array}{ll} \tilde{N}_{n,r}^{-1} \sum\limits_{i \in \tilde{\zeta}_{n,r}} \tilde{Y}_i & \text{si } \tilde{N}_{n,r} \geqq 1 \\ 0 & \text{si } \tilde{N}_{n,r} = 0 \end{array} \right.$$

où $\tilde{\zeta}_{n,r}$ est l'ensemble aléatoire des indices i tels que $N(f_{1,i}, \Delta_{K,r}) \geqq 1$.

On définit $\tilde{\psi}_{n,K}$ par $(\forall r \in \{1, 2, \ldots, K\}$, $(\forall x \in \Delta_{K,r})$, $\tilde{\psi}^{\bullet}_{n,K}(x) = \bar{\bar{Y}}_{n,r}$.

On aura besoin des hypothèses i, ii, iii, iv suivantes:

i $E(Y_j)$ existe pour tout $j \geqq 0$

ii $\psi(\cdot)$ est uniformément continue sur Δ

iii il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour tout intervalle π inclus dans Δ on ait $\mu[\pi] \geqq \rho |\pi|^*$, où on a posé $|\cdot|^*$ comme étant la mesure de Labesgue et $\mu[\cdot] = E(N(f_{1,0}, \cdot))$.

iv Pour tout intervalle π inclus dons Δ de mesure de Labesgue tendant vers 0, **on a:**

$\mu[\pi] = (1 + \varepsilon(|\pi|^*))P(N(f_{1,0}, \pi) > 0)$ où $\varepsilon(|\pi|^*)$ tend vers 0 avec $|\pi|^*$.

Lemme 1.2. [1] *Soit* ρ *un nombre positif satisfaisant à la condition* iii *et soit* $\rho' \in]0, \rho/2[$.

Posons: $\tilde{H}_n = \bigcap_{r=1}^{K} \{\tilde{N}_{n,r} \geqq nK^{-1}\rho'\}$. *Si* K *satisfait à la condition* $K = o(n/\mathrm{Log}\, n)$ *alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\bar{\tilde{H}}_n) < +\infty.$$

Considérons les hypothèses suivantes:

H_0^*) $N(f_{1,0}, [0, 1[)$ admet des moments de tous les ordres,

H_1^*) $(\exists B > 0)$, $(\forall C \in \mathscr{B}[0, 1[)$, $(\forall k \geqq 2)$,

$$|E(N(f_{1,0}, C) - \mu(C))^k| \leqq \frac{1}{2} B^{k-2} k!\ \mathrm{Var}(N(f_{1,0}, C))$$

H_2^*) $(\exists A > 0)$, $(\forall C \in \mathscr{B}([0, 1[))$, $\mathrm{Var}(N(f_{1,0}, C)) < A|C|^*$

$\mathscr{B}([0, 1[)$ désignant l'ensemble des boréliens de $[0, 1[$.

a) $(\forall x \in [0, 1[)$, $(\forall k \in \mathrm{N}^*)\, |E(Y^k_{1/X_1 = x})| < +\infty$,

b) $(\exists V > 0)$, $(\forall x \in [0, 1[)$ $\mathrm{Var}(Y_{1/X_1 = x}) < V$,

c) $(\exists M > 0)$, $(\forall x \in [0, 1[)$, $(\forall k \geqq 2)$.

$$|E([Y_1 - E(Y_1/X = x)]^k / X = x)| \leqq \frac{k!}{2} M^{k-2}\, \mathrm{Var}(Y_1/X = x).$$

Le théorème suivant s'établit exactement de la même manière que dans [1], théorèmes 1.V et 2.V.

Théorème 1.2. *Supposons que les hypothèses* i, ii, iii, iv, H_1 *soient satisfaites ainsi que les conditions* H_0^*, H_1^*, H_2^*, a, b, c. *Si en outre*

d) $|Y_i^{(n)}|\leq A_0$ *pour tout* $m=m_0$ *et tout* n *où* A_0 *est une constante positive,*

e) ψ *est dérivable de dérivée bornée,*

f) *Pour tout* r $\mu[\Delta_{K,r}]-P_{K,r}=O(K^{-2})$,

alors, en posant $\chi(n)=\mathrm{Min}\,((n/K)^{1/2},\ K/)(\mathrm{Log}\,n)^{\theta}$, *on a pour tout* θ, $\theta>1/2$, *la relation* $K=o(n/\mathrm{Log}\,n)$ *implique*

(1) $P(\lim_{n\to+\infty}\chi(n)\quad d(\psi,\ \tilde{\psi}_{n,K})=0)=1,$

(2) $P(\lim_{n\to+\infty}\chi(n)\quad d(\psi,\ \psi_{n,K})=0)=1.$

3. Loi limite. Posons $v(x)=E\{(Y_1-E(Y_1/X_1=x))^2/X_1=x\}$.

Théorème 1.3. On se place dans les conditions du théorème 1.2.

(0) Supposons que $f(x)$, $v(x)$ soient différentiables et à dérivée bornée sur $[0,\ 1]$ et qu'il existe $c>0$ vérifiant $f(x)>c$, $v(x)>c$ pour tout x, $0\leq x\leq 1$. Si de plus

(1) Il existe $t_0>0$ et $m_1>0$ tels que pour tout $e=e_0$ $|\mathrm{Log}\,E(\exp(tY_i)/X_i=x|<m_1$ $i=1,\ldots,\ e_0|t|\leq t_0$, $x\in\Delta$ alors les conditions (i) $K(\mathrm{Log}\,K)^3=o(n)$, (ii) $n=o(K^3)$ impliquent pour tout $\theta>1/2$ l'existence d'une suite a_n, $a_n\to 0$ p. s, telle que

$$\forall y\in\mathrm{R},\ P\{\sup_{x\in\Delta}(v(x))^{-1/2}((n/K)\,f(x))^{1/2}(\psi_{n,K}(x)-\psi(x))<(2\,\mathrm{Log}\,K-\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,K+y)^{1/2}$$

$$+a_n(\mathrm{Log}\,n)^{\theta}\}\to\exp(e^{-y/2}/2\pi^{1/2})$$

lorsque $n\to+\infty$.

Remarque. Les conditions (i) et (ii) sont satisfaites lorsqu'on choisit K tel que $n^{\alpha}<K<n^{\beta}$, $1/3<\alpha<\beta<1$, voir [2], théorème 1.

Pour établir ce théorème nous allons démontrer le

Théorème 2.3. *Sous les conditions* 0), 1), (i), (ii) *du théorème* 1.3., *on a :*

$$(\forall y\in\mathrm{R}),\ P\{\sup_{x\in\Delta}(v(x))^{-1/2}((n/K)f(x))^{1/2}(\tilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x))<(2\,\mathrm{Log}\,K-\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,K+y)^{1/2}\}$$

$$\to\exp(e^{-y/2}/2\pi^{1/2})\ \textit{lorsque}\ n\to+\infty.$$

Lemme 1.3. *Soit* e_n *une suite d'entiers tendant vers* $+\infty$ *lorsque* $n\to+\infty$ et $\zeta_{n1},\ldots,\xi_{ne_n}$ *une suite de v.a. indépendantes pour tout* $n\in\mathrm{N}^*$ *centrées telles qu'il existe des constantes positives* t_0 *et* c_0 *vérifiant*

(2) $$|\mathrm{Log}\,E(e^{t\xi_{nj}})|<c_0\quad avec\quad |t|<t_0,\quad n\in\mathrm{N}^*,\quad j=1,\ldots,n$$

(3) $$\lim_{n\to+\infty}\inf B_n/e_n>0\quad où\quad B_n=\sum_{j=1}^{e_n}E(\xi_{nj}^2).$$

Alors $P(\Sigma_{j=1}^{e_n}\xi_{nj}>x_n\sqrt{B_n})\sim 1-\varphi(x_n)$ *pour* $x_n=o(\sqrt[6]{e_n})$ *lorsque* $n\to+\infty$.

La preuve de ce lemme se déduit sans difficulté de théorème de V. Petrov [3].

Lemme 2.3. *Sous les hypothèses* iii) *et* iv) *on a* $P(\lim_{n\to+\infty}(\tilde{N}_{n,r}/np_{K,r})=1)=1$.

Preuve: D'après l'inégalité de Bernstein on a

(4) $$P(|\tilde{N}_{n,r}-np_{K,r}|)>t(np_{K,r}q_{K,r})^{1/2}\leq 2e^{-t^2/4},\quad q_{K,r}=1-p_{K,r}.$$

sous la condition

(5) $$0<t<3(np_{K,r}q_{K,r})^{1/2}.$$

Ecrivons pour tout $\varepsilon>0$

(6) $$P(|(\tilde{N}_{n,r}/np_{K,r})-1|>\varepsilon)=P(|\tilde{N}_{n,r}-np_{K,r}|>\varepsilon np_{K,r}).$$

$t=2(\mathrm{Log}\,n^3)^{1/2}$ satisfait à (5) dès que n est assez grand; montrons alors que $\varepsilon np_{K,r}>t(np^{*}_{K,r}q_{K,r})^{1/2}$ ou encore $\varepsilon(np_{K,r})^{1/2}>t$. Or $\varepsilon(np^{*}_{K,r})^{1/2}\sim\varepsilon(n\mu(\Delta^{*}_{K,r}))^{1/2}>\varepsilon((n/K)\rho)^{1/2}$ et $\varepsilon((n/K)\rho)^{1/2}(3\mathrm{Log}\,n)^{-1/2}\to+\infty$ lorsque $n\to+\infty$.

(4) implique alors $\tilde{P}(|(N_{n,r}/p_{K,r})^{-1}|>\varepsilon)\leq 2e^{-\mathrm{Log}\,n^3}=2n^{-3}$ d'où le résultat annoncé.

Lemme 3.3. *Sous les hypothèses H_i^* $(i=0,\ 1,\ 2)$ on a* $P(\lim_{n\to+\infty}(\nu_{n,r}/n\mu(\Delta_{K,r}))=1)=1$.

Preuve: On utilise l'inégalité de Bernstein

(7) $$P(|\nu_{n,r}-n\mu(\Delta_{K,r})|>(c_r/\alpha_r)+\alpha_r\,\mathrm{Var}(\nu_{n,r}))<2e^{-c_r}$$

avec $c_r>0$ quelconque et α_r tel que $0<B\alpha_r\leq 1/2$. Soit $\varepsilon>0$; écrivons

(8) $$P(|(\nu_{n,r}/n\mu(\Delta_{K,r}))^{-1}|>\varepsilon)=P(|\nu_{n,r}-n\mu(\Delta_{K,r})|>\varepsilon n\mu(\Delta_{K,r})).$$

On choisit c_r et α_r vérifiant:

$$c_r\geq\alpha_r^2\,\mathrm{Var}(\nu_{n,r})\quad\text{et}\quad(c_r/\alpha_r)+\alpha_r\,\mathrm{Var}(\nu_{n,r})<\varepsilon\rho'\,n/K;$$

c'est-à-dire $\alpha_r=\varepsilon\rho'/2A$ et $c_r=(\varepsilon\rho')^2n/4AK$. Comme $\varepsilon\rho'(n/K)<\varepsilon n\mu(\Delta_{K,r})$ (7) implique

(9) $$P(|(\nu_{n,r}/n\mu(\Delta_{K,r}))^{-1}|>\varepsilon)<2\exp(-(\varepsilon\rho')^2n/4AK).$$

La série dont le terme général est le second membre de (9) est convergente.

Preuve du Théorème 2.3. Soit $(x_{ri})_{i\in\tilde{\zeta}_{n,r}}$ $r=1,\ldots,K$ une réalisation compatible avec $\tilde{H}_n$. Notons par $\tilde{Y}_{ri}$, $i\in\tilde{\zeta}_{n,r}$ $\tilde{N}_{n,r}$ v.a. définies par

$$(\forall r\in\{1,\ldots,K\}),\quad(\forall i\in\tilde{\zeta}_{n,r}),\quad(x_{ri}\in\Delta_{K,r})$$

(10) $$P(\tilde{Y}_{ri}<y)=P(\tilde{Y}_i<y/x_{ri}).$$

Comme les variables statistiques $(\tilde{X}_i,\ \tilde{Y}_i)_{i\in\tilde{\zeta}_{n,r}}$ sont indépendantes, on a

(11) $$P(\sum_{i\in\tilde{\zeta}_{n,r}}(\tilde{Y}_i<y/x_{ri})_{i\in\tilde{\zeta}_{n,r}})=P(\sum_{i\in\tilde{\zeta}_{n,r}}\tilde{Y}_{ri}<y)$$

et de plus, par hypothèse sur la régression et H_1 pour $j=1$, on a

(12) $$E(\bar{\tilde{Y}}_{n,r}/(x_{ri})_{i\in\tilde{\zeta}_{n,r}})=\tilde{N}_{n,r}^{-1}\sum_{i\in\tilde{\zeta}_{n,r}}\psi(x_{ri})\quad\text{si}\quad\tilde{N}_{n,r}>1=0\quad\text{si}\quad\tilde{N}_{n,r}=0$$

On écrira par la suite $(x_{ri})_i$ pour $(x_{ri})_{i\in\tilde{\zeta}_{n,r}}$. Posons $\tilde{Y}'_{ri}=\tilde{Y}_{ri}-\psi(x_{ri})$, $\sigma_{nr}^2=\Sigma_i\,\mathrm{Var}(\tilde{Y}'_{ri})$ pour $i\in\tilde{\zeta}_{n,r}$, $r=1,\ldots,K$. D'après la continuité de v, on a

(13) $$(\forall r\in\{1,\ldots,K\}),\quad(\exists t_{nr}\in\bar{\Delta}_{K,r}),\ \sigma_{nr}^2=\tilde{N}^{*}_{n,r}v(t_{nr})$$

d'où $\lim_{n\to+\infty}\inf(\sigma_{n,r}^2/N_{n,r})>c>0$ et (3) est vérifiée.

(1) est évidemment satisfaite.

Le lemme 1.3 implique alors

(14) $P(\sigma_{nr}^{-1} \sum_i \widetilde{Y}_{ri} > z_n) = (1-\varphi(z_n))\ (1+o(1))$ pour $z_n = o(N_{n,r}^{1/6})$ et $r=1, \ldots, K$.

Ecrivons

(15) $(\forall x \in \Delta_{K,r}),\ \widetilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x) = \widetilde{\psi}_{n,K}(x) - E(\widetilde{Y}_{nr/(x_{ri})_i} \cap \widetilde{H}_n) + E(\widetilde{Y}_{nr/(x_{ri})_i} \cap \widetilde{H}_n) - \psi(x)$.

Par la continuité de ψ on a d'après (12) $(\exists\, \eta \in \overline{\Delta}_{K,r})$, $E(\overline{\widetilde{Y}}_{nr/(x_{ri})_i} \cap \widetilde{H}_n) = \psi(\eta)$.
Comme $|\psi(\eta)-\psi(x)| < D/K$ où $D = \sup_{x \in [0,1]} |\psi'(x)|$ (15) devient

(16) $$(\forall x \in \Delta_{K,r}),\quad \widetilde{\psi}_{n,K}(x) - \psi(x) = \overline{\widetilde{Y}}_{n,r} - E(\widetilde{Y}_{n,r/(x_{ri})_i} \cap \widetilde{H}_n) + O(1/K).$$

D'après la relation (11) on a

(17) $(\forall x \in \Delta_{K,r}),\ (\forall y \in \mathbb{R}),\ P(\overline{\widetilde{Y}}_{n,r} - E(\overline{\widetilde{Y}}_{n,r}/(x_{ri})_i \cap \widetilde{H}_n) < y/(x_{ri})_i \cap \widetilde{H}_n) = P(\widetilde{N}_{n,r}^{-1} \sum_i \widetilde{Y}'_{ri} < y)$.

Posons $s_r = \overline{\widetilde{Y}}_{n,r} - E(\overline{\widetilde{Y}}_{n,r}/(x_{ri})_i \cap \widetilde{H}_n)$. On a la relation

(18) $P(s_1 < y_1, \ldots, s_K < y_K/\{(x_{ri})_i \cap \widetilde{H}_n,\ \ r=1, \ldots, K\}) = \prod_{r=1}^{K} P(s_r < y_r/(x_{ri})_i \cap \widetilde{H}_n)$.

On déduit de (17)

(19) $$P(\sigma_{nr}^{-1} \sum_i \widetilde{Y}'_{ri} < y_r) = P(\sigma_{nr}^{-1} \widetilde{N}_{n,r} - s_r < y_r/(x_{ri})_i \cap \widetilde{H}_n).$$

L'égalité (18) implique

(20) $P(\sup_{r=1,\ldots,K} \sigma_{nr}^{-1} \widetilde{N}_{n,r}\, s_r < z_n/\{(x_{ri})_i \cap \widetilde{H}_n,\ \ r=1, \ldots, K\}) = \prod_{r=1}^{K} P(\sigma_{nr}^{-1} \sum_i \widetilde{Y}'_{ri} < z_n)$.

On peut écrire d'après le lemme 2.

$$\widetilde{N}_{n,r} = (1+o_s(1))np_{K,r} \sim (1+o_s(1))n\mu(\Delta_{K,r}).$$

$$\mu(\Delta_{K,r}) = \int_{r-1/K}^{r/K} f(t)dt = K^{-1} f(\xi),\ \xi \in \Delta_{K,r}.$$

Développons $f(\xi) = f(x) + (\xi - x)\ f'(x+\theta(\xi-x))$, $0<\theta<1$, $x \in \Delta_{K,r}$; d'où $\mu(\Delta_{K,r}) = K^{-1}f(x) + O(K^{-2})$; par suite

(21) $$\widetilde{N}_{n,r} \sim (1+o_s(1))n[K^{-1} f(x) + O(K^{-2})].$$

De même $v(t_{nr}) = v(x) + (t_{nr}-x)v'(x+\theta'(t_{nr}-x))$, $x \in \Delta_{K,r}$, $0<\theta'<1$; d'où $(t_{nr}) = v(x)$ $(1+0(K^{-1}))$.
De (13) on déduit que

(22) $$\sigma_{n,r}^2 = K^{-1} n f(x) \cdot v(x)\ (1+o_s(1))\ (1+O(K^{-1})).$$

L'égalité (18) devient en tenant compte de (16)

$$(23)\qquad P\{\sup_{x\in\Delta}[\,\tilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x)+O(K^{-1})]\,(v(x))^{-1/2}((n/Kf(x))^{1/2}\,(1+O(K^{-1}))$$
$$<z_n/\{(x_{ri})_i\cap\tilde{H}_n,\quad r=1,\ldots,K\}\}=\prod_{r=1}^{K}P({}_i(\tilde{Y}'_{ri}/\sigma_{nr})<z).$$

Le premier membre de (23) s'écrit

$$(24)\qquad P\{\sup_{x\in\Delta}(v(x))^{-1/2}((n/K\,f(x))^{1/2}(\tilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x))<(z_n+O(K^{-1}(n/K)^{1/2})\;(1+O(K^{-1}))/$$
$$\{(x_{ri})_i\cap\tilde{H}_n,\quad r=1,\ldots,K\}\}.$$

Prenons

$$[z_n+O(K^{-1}(n/K)^{1/2})]\,(1+O(K^{-1}))=(2\,\mathrm{Log}\,K-\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,K+y)^{1/2}\,];$$

ou encore

$$z_n=(1+O(K^{-1}))\;(2\,\mathrm{Log}\,K-\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,K+y)^{1/2}+O(K^{-1}(n/K)^{1/2}).$$

Si $K(\mathrm{Log}\,K)^3=o(n)$ et $n=o(K^3)$, alors $z=o(\tilde{N}_{n,r}^{1/6}\sim o((n/K)^{1/6})$. Par le lemme 1.3 et la relation $(1/\sqrt{2\pi}x)e^{-x^2/2}\sim 1-\varnothing(x)$ lorsque $x\to+\infty$ on a

$$(25)\qquad \prod_{r=1}^{K}P(\sigma_{nr}^{-1}\sum_i\tilde{Y}'_{ri}<z_n)=[1-(1/\sqrt{2\pi}K)e^{-y/2}(1+o(1))]^K$$

lorsque $n\to+\infty$.
Des égalités (23) et (24) et (25) on a, pour $n\to+\infty$,

$$(26)\quad P\{\sup_{x\in\Delta}v(x)^{-1/2}((n/K)f(x))^{1/2}(\tilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x))<(2\,\mathrm{Log}\,K-\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,K+y)^{1/2}/\{(x_{ri})_i\cap\tilde{H}_n,$$
$$r=1,\ldots,K\}\}=[1-(1/2\sqrt{\pi}K)e^{-y/2}(1+o(1))]^K.$$

Intégrons les deux membres de l'égalité (26), sur $\tilde{H}_n$ on obtient:

$$(27)\quad P(\sup_{x\in\Delta}v(x)^{-1/2}((n/K)f(x))^{1/2}(\tilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x))<(2\,\mathrm{Log}\,\mathrm{K}-\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,K+y)^{1/2},\ \tilde{H}_n)$$
$$=[1-(1/2\sqrt{\pi}K)e^{-y/2}\,(1+o(1))\,]^K P(\tilde{H}_n).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le résultat désiré.

Preuve du théorème 1.3. Ecrivons:

$$(28)\qquad (\forall\, x\in\Delta_{K,r})\;\psi^{\bullet}_{n,K}(x)-\psi(x)=\nu_{n,r}^{-1}\sum_{i\in\zeta_n-\tilde{\zeta}_n}Y_i^{(n)}+((\tilde{N}_{n,r}/\nu_{n,r}-1)\psi(x)$$
$$+(\tilde{N}_{n,r}/\nu_{n,r})\;(\tilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x)).$$

D'après les lemmes 2 et 3. III on a $\lim_{n\to+\infty}(\tilde{N}_{n,r}/\nu_{n,r})=1$ p. s. Comme $\forall\, r\in\{1,\ldots,K\}$ $(\tilde{N}_{n,r}/\nu_{n,r})\leq 1$, il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty}\ \sup_{r=1,\ldots,K}(\tilde{N}_{n,r}/\nu_{n,r})=1$$ p. s. L'égalité (28) s'écrit:

$$(29) \qquad (\forall x \in \Delta_{K,r})\, \psi_{n,K}(x)-\psi(x)=(\nu_{n,r}^{-1} \sum_{i\in\zeta_{n,r}-\widetilde{\zeta}_{n,r}} Y_i^{(n)}+(\widetilde{N}_{n,r}/\nu_{n,r})-1)\psi(x)$$

$$+o_s(1)\,(\widetilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x))+(\widetilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x)).$$

Le théorème 1.2 nous permet d'écrite:

$$(30) \qquad \sup_{r=1,\dots,K}\ \sup_{x\in\Delta_{K,r}} |\nu_{n,r}^{-1} \sum_{i\in\zeta_{n,r}-\widetilde{\zeta}_{n,r}} Y_i^{(n)}+((\widetilde{N}_{n,r}/\nu_{n,r})-1)\psi(x)$$

$$+o_s(1)(\widetilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x))|=o_s(\chi(n)^{-1}).$$

Comme $K_1\leqq f(x)/v(x)\leqq K_2$ sur $[0, 1]$, K_1 et K_2 étant des constantes positives, on peut donc écrire:

$$\sup_{x\in\Delta}((v(x))^{-1/2}((n/K)f(x))^{1/2}(\psi_{n,K}(x)-\psi(x)))=o_s((\mathrm{Log}\,n)^{\theta}/\mathrm{Min}\,((n/K)^{1/2},K))$$

$$(n/K)^{1/2}+\sup_{x\in\Delta}((v(x))^{-1/2}((n/K)f(x))^{1/2}(\widetilde{\psi}_{n,K}(x)-\psi(x))).$$

L'hypothèse (3) entraîne que $\mathrm{Min}\,((n/K)^{1/2}, K)=(n/K)^{1/2}$ dès que n est suffisamment grand. D'où le résultat désiré d'après le théorème 2.3.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Dia. Etude d'un estimateur de la fonction de régression pour un processus ponctuel à valeurs dans $R_+^s\times R(s\geqq 1)$. *Serdica Bulg. Math. publ.*, **13**, 1987, 383-395.
2. P. Major. On a nonparametric estimation of the regression function. *Studia Sci. Math. Hung.*, **8**, 1973, 347-361.
3. V. V. Petrov. Asymptotic behaviour of probabilities of large deviations. *Theory Prob. Appl.*, **23**, 1968, 408-420.
4. J. W. Tukey. Curves as parameters and touch estimation. — In: Proc. 4-th. Symp. Math. Statist. Prob., Berkeley. 1961, 681-694.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences,
Université Cheikh Anta DIOP
Dakar Sénégal

Reçue le 31.10.1988