# Serdica

## Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

## Българско математическо списание

# ИЗБЕЖАНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Н. САТИМОВ, А. З. ФАЗЫЛОВ

Рассмотрена задача избежания столкновений с подпространства в линейных управляемых системах с интегральными ограничениями на управляющий параметр. Получено необходимое и достаточное условие для возможности избежания столкновений из всех точек, не принадлежащих целевому множеству. В качества примера рассмотрена задача избежания столкновений двух инерционных объектов.

**1.** Пусть движение точки $y$ $d$-мерного евклидова пространства $\mathrm{R}^d$ описывается уравнением

$$\dot{y} = By + Dv + a, \tag{1.1}$$

где $B$ — линейное отображение $\mathrm{R}^d$ в себя, $v \in \mathrm{R}^q$ — параметр управления, $D$ — линейное отображение $\mathrm{R}^q$ в $\mathrm{R}^d$, $a$ — заданная точка $\mathrm{R}^d$. Далее в $\mathrm{R}^d$ задано целевое множество $M$, которое будет предполагаться линейным подпространством. Управление $v(\cdot)$: $[0, +\infty) \to \mathrm{R}^q$ выбирается в классе измеримых функций, удовлетворяющих ограничению

$$\| v(\cdot) \|^2 = \int_0^\infty |v(s)|^2 ds \leqq \sigma^2, \ \sigma > 0 \text{ — фиксировано.} \tag{1.2}$$

В настоящей работе рассматривается в некотором смысле двойственная задача к задаче перевода фазовой точки из заданного начального состояния на $M$ ([1, 2]) — а именно, предотвращение попадания фазовой точки на $M$.

Типичными примерами задачи такого типа являются управления с целью избежания столкновений морских судов, летательных аппаратов, обход неподвижных препятствий, предотвращение аварийных состояний управляемых объектов и т. д.

По определению, из точки $y_0 \overline{\in} M$ возможно избежание столкновений (с множеством $M$), если существует допустимое управление $v(\cdot)$ такое, что соответствующая траектория системы (1.1) не попадает на М, т. е.

$$y(t) = y(t, y_0, v(\cdot)) = e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{B(t-s)} [Dv(s) + a]\, ds \overline{\in} M \tag{1.3}$$

при всех $t \geqq 0$. Если возможно избежание столкновений из любой точки $y_0 \overline{\in} M$, то система (1.1) называется системой, допускающей избежания столкновений (с множеством $M$).

Задача избежания столкновений упомянута Р. Айзексом в его книге [3] и рассмотрена в ряде работ, в частности [4–8].

Цель настоящей работы — описать все линейные системы допускающие избежания столкновений с подпространством.

**2.** Ортогональное дополнение $M$ в $\mathrm{R}^d$ обозначается $L$, $\Pi$ — операция ортогонального проектирования из $\mathrm{R}^d$ на $L$, $I_*$ — минимальное подпространство $\mathrm{R}^d$, содержащее каждое из подпространств $D\mathrm{R}^q$, $BD\mathrm{R}^q, \ldots, B^{d-1}D\mathrm{R}^q$, $W_1 = \Pi I_*$. Ясно, что $BI_* \subset I_*$.

Теорема 1. *Если* $\dim W_1 \geqq 2$, *то система* (1.1) *допускает избежания столкновений.*

Доказательство. В дальнейшем положительные числа, зависящие лишь от системы (1.1), но независящие ни от начальной точки $y_0$, ни от времени $t$ и только их будем называть константами.

Легко убедиться, что условие теоремы 1 эквивалентно так называемому условию вращаемости ([9]): существует двухмерное подпространство $W$ пространства $L$ такое, что не существует в $W$ фиксированного одномерного подпространства $W^1$ для которого имеет место включение $g_\tau \mathrm{R}^q \subset W^1$ при всех достаточно малых положительных значениях $\tau$, где $g_\tau$ — линейное отображение $\pi e^{\tau B} D$: $\mathrm{R}^q \to W$, $\pi$ — операция ортогонального проектирования из $\mathrm{R}^d$ на $W$.

Для ненулевого отображения $A_k$ в разложении

$$g_\tau = \tau^k A_k + \tau^{k+1} A_{k+1} + \cdots \tag{2.1}$$

возможны два случая:

1) его ранг равен 2 или
2) его ранг равен 1.

А. Рассмотрение начнем со случая 1). В этом случае в пространствах $\mathrm{R}^q$ и $W$ системы координат можно выбрать так, что отображение $A_k$ будет определяться матрицей, имея $q$-столбцов

$$\begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & k+1 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

Матрицу (2.2) также обозначим через $A_k$; координаты точки $w \in W$ относительно введенной выше системы координат будем обозначать через $w^1$, $w^2$; функцию

$$\pi e^{Bt} y_0 + \int_0^t \pi e^{Bs} a ds, \quad 0 \leq t \geqq \delta, \quad \delta > 0,$$

обозначим через $\varphi(t)$. Ясно, что каждой точке $y_0 \in \mathrm{R}^d$ соответствует единственная функция $\varphi(t)$.

Пусть $v^1(t) \equiv w^1$, $v^2(t) \equiv w^2$, $v^i(t) \equiv 0$, $i = \overline{3, q}$, $t \in [0, \delta]$. Тогда для соответствующей траектории (1.3) системы (1.1), ввиду (2.1) и (2.2) имеем

$$\pi y(t) = \varphi(t) + \int_0^t g_s v(t-s) ds = \varphi(t) + \int_0^t s^k (k+1) w ds + 0(t^{k+2}) = \varphi(t) + t^{k+1}[w + h(t)],$$

где $w = (w^1, w^2)$, $|h(t)| = 0(t)$.

В. Рассмотрим квадрат $\Gamma \subset W$, определенный неравенствами

$$|w^i| \leq \rho, \ i = 1, 2, \ \rho > 0.$$

Тогда существуют константы $r$, $\delta_1 (\leq \delta)$, что для любой функции $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq \delta$ найдется такой квадрат $\Gamma_1 \subset \Gamma$ со стороной $2r$, что при всех $t \in (0, \delta_1]$ имеет место неравенство

$$|\pi y(t)| = |\varphi(t) + t^{k+1}[w_1 + h(t)]| > r t^{k+1}, \tag{2.3}$$

где — $w_1$ — центр квадрата $\Gamma_1$.

Действительно ([9]), для любой функции $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq \delta$ существует такой квадрат $\Gamma_1 \subset \Gamma$ со стороной $2r$, что точка $\varphi(t) - \alpha t^{k+1}$ при всех $t \in (0, \delta]$, $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in \Gamma_1$ удовлетворяет условию

(2.4) $$|\varphi(t)-\alpha t^{k+1}|>rt^{k+1}.$$

Пусть $\delta_1=\min\{\delta, r/2c\}$, где $|h(t)|\leq ct$, $c$ — константа. Тогда, $|h(t)|\leq ct\leq c\delta_1\leq r/2$, $0\leq t\leq\delta_1$. Очевидно, точка $-[w_1+h(t)]$, где $-w_1$ — центр квадрата $\Gamma_1$, при всех $t\in[0, \delta_1]$ принадлежит квадрату $\Gamma_1$, ибо $|-[w_1^i+h^i(t)]+w_1^i|=|h^i(t)|\leq r/2$. Следовательно ((2.4)),

$$|\pi y(t)|=|\varphi(t)+t^{k+1}[w_1+h(t)]|=|\varphi(t)-t^{k+1}\{-[w_1+h(t)]\}|>rt^{k+1}$$

при всех $t\in(0, \delta_1]$.

Замечание 1. Константа $\delta_1$ пропорциональна константе $\rho$, так как ([10]) $r=\gamma_1\delta$, $\gamma_1$ — константа. Значит, $\delta_1=\gamma_2\rho$, $\gamma_2=\gamma_1/2c$, ибо всегда можно считать, что $r/2c\leq\delta$ (в противном случае уменьшим $t$). Далее, очевидно, можно считать, что $\delta_1\leq 1$.

C. Пусть $y_0$ — произвольная начальная точка, $y_0\bar{\in} M$, $\varphi(t)$, $0\leq t\leq\delta$ — соответствующая ей функция. Предположим, что $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — такая последовательность констант, что

$$\sigma_i>\sigma_{i+1},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2\leq\frac{\sigma^2}{2},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i=\infty.$$

Введем следующие обозначения.

$\Gamma^i$ — квадрат плоскости $W$ со стороной $2\sigma_i$ с центром в начале координат, $\Gamma_1^i$ — квадрат, существующий в силу пункта B, его сторона $2r_i$, $\delta_i=\gamma_2\sigma_i$, $\varepsilon_i=r_i\gamma_2^{k+1}\sigma_i^{k+1}$, $\xi$ — расстояние от точки $y$ до $M$.

В пространстве $R^d$ рассмотрим $(d-1)$-мерную цилиндрическую поверхность $\Sigma_i$, определяемую уравнением $\xi=\varepsilon_i$. Поверхность $\Sigma_i$ делит пространство $R^d$ на две области: внутреннюю $\Sigma_i^-$, содержащую подпространство $M$, и внешнюю $\Sigma_i^+$.

Пусть начальная точка $y_0$ принадлежит множеству $\Sigma_1\cup\Sigma_1^-$. Согласно пунктам $A$, $B$ существуют вектор $-w_{1,1}\in\Gamma_1^1$ и управление $v=v(t)$: $v^1(t)\equiv w_{1,1}^1$, $v^2(t)\equiv w_{1,1}^2$ $v^i(t)\equiv 0$, $i=\overline{3, q}$, $0\leq t\leq\delta_1$, такие, что для решения $y(t)$, $0\leq t\leq\delta_1$, будет иметь место неравенство (2.3), а при $t=\delta_1$ точка $y(t)$ окажется в области $\Sigma_1^+$, ибо $|\xi(\delta_1)|\geq|\pi y(\delta_1)|>r\delta_1^{k+1}=\varepsilon_1$. Начиная с этого момента времени выбираем $v(t)\equiv 0$ до тех пор, пока фазовая точка $y(t)$ не окажется впервые на $\Sigma_2$. Дальше повторяется описанная выше процедура (напомним, что $\varepsilon_i>\varepsilon_{i+1}$).

Если же начальная точка $y_0$ находится в области $\Sigma_1^+$, то выбирается $v(t)\equiv 0$ до тех пор, пока впервые точка $y(t)$ не окажется на $\Sigma_1$ и. т. д. Покажем, что при таком способе управления системы (1.1) условие (1.2) будет выполнено. Действительно, так как

$$|v(s)|^2=(w_{1,i}^1)^2+(w_{1,i}^2)^2\leq 2\sigma_i^2,$$

то

$$\|v(\cdot)\|^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}2\sigma_i^2\delta_i\leq\sum_{i=1}^{\infty}2\sigma_i^2\leq\sigma^2.$$

С другой стороны, $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i=\infty$. Поэтому из любой точки $y_0\bar{\in} M$ возможно избежание столкновений.

D. В случае 2), как показано в [9], в пространствах $R^q$ и $W$ можно выбрать системы координат так, чтобы элементы $g_j^i(\tau)$, $i=1, 2$, $j=\overline{1, q}$, матрицы отображения $g_\tau$ представимы в виде

$$g_1^1(\tau)=\tau^k+\bar{g}_1^1(\tau),\quad \bar{g}_1^1(\tau)=0(\tau^{k+1}),\quad g_j^1(\tau)=0(\tau^{k+1}),$$

$$g_1^2(\tau)=\tau^l+\bar{g}_1^2(\tau),\quad \bar{g}_1^2(\tau)=0(\tau^{l+1}),\ g_j^2(\tau)=0(\tau^l),\ j=\overline{2,q},\ l>k.$$

Пусть, далее $v^1(t)=\alpha_0^1+\alpha_0^2 t$, $v^i(t)\equiv 0$, $i=\overline{2,q}$. Легко увидеть, что тогда

$$\int\limits_0^t \pi e^{(t-s)B} D v(s) ds = w_t \alpha_0,$$

где $w_t$ — матрица с элементами

$$w_1^i(t)=\int\limits_0^t g_1^i(s)ds,\quad w_2^i(t)=\int\limits_0^t (t-s) g_1^i(s)ds,\quad i=1,\ 2$$

аналитически зависящая от $t$ при малых значениях $t\geq 0$, $\alpha_0=(\alpha_0^1,\ \alpha_0^2)$.

Пусть $\Delta\subset W$ — квадрат, определяемый неравенствами $|w^i|\leq p$, $i=1, 2$. Тогда существуют константы $\gamma$, $\theta$ такие, что для любой функции $\varphi(t)$, $0\leq t\leq\theta$, найдется такой квадрат $\Delta_1\subset\Delta$ со стороной $2\gamma$, что при всех $t\in[0,\theta]$ имеет место неравенство

$$|\pi y(t)|=|\varphi(t)+w_t\alpha_0|>\gamma t^{k_1}$$

где $\alpha_0$ — центр квадрата $\Delta_1$, $k_1$ — целое число, зависящее лишь от матрицы $w_t$. Доказательство следует из предложения С § 4 работы [9].

Е. Пусть $y_0$ — произвольная начальная точка, $y_0\bar{\in} M$, $\varphi(t)$, $t\in[0,\ $ , соответствующая ей функция, последовательность констант $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ такая, что

$$\sigma_i>\sigma_{i+1},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2\leq\frac{\sigma^2}{3},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i=\infty.$$

Пусть, далее $\Delta^i$ — квадрат плоскости $W$ со стороной $2\sigma_i$ с центром в начале координат, $\Delta_1^i$ — квадрат, существующий в силу пункта D, его сторона $2\gamma_i$, константы $\theta_i$, в отличии от случая 1), можно выбрать не зависящими от $i$, и его обозначим через $\theta$, $\varepsilon_i=\gamma_i\theta^{k_1}$. Можно считать, что $\theta\leq 1$.

Аналогично, как в пункте С, определяются $\Sigma_i$, $\Sigma_i^-$, $\Sigma_i^+$. Если начальная точка $y_0$ принадлежит множеству $\Sigma_1\cup\Sigma_1^-$, то управление $v(t)$ выбирается в виде $v^1(t)=\alpha_1^1+\alpha_1^2 t$, $v^i(t)\equiv 0$, $i=\overline{2,q}$, $t\in[0,\theta]$, где $\alpha_1=(\alpha_1^1,\ \alpha_1^2)$ — центр квадрата $\Delta_1^1$. Дальше повторяются рассуждения пункта С.

Покажем выполнение условия (1.2):

$$\|v(\cdot)\|^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_0^{\theta}|\alpha_i^1+\alpha_i^2 t|\,dt\leq\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\infty}\max\{|\alpha_i^1|^2,\ |\alpha_i^2|^2\}[(\theta+1)^3-1]\leq\sum_{i=1}^{\infty}3\sigma_i^2\leq\sigma^2,$$

здесь $\alpha_i=(\alpha_i^1,\ \alpha_i^2)$ — центр квадрата $\Delta_1^i$.

Теорема доказана полностью.

**3.** В этом разделе разбираются оставшиеся случаи. Сперва рассмотрим одномерный случай. В этом случае система (1.1) примет вид

$$\dot{x}=\lambda x+(\bar{m},\ v)+\beta,\quad x\in\mathrm{R},\quad v\in\mathrm{R}^q, \tag{2.1}$$

где $\lambda$, $\beta$ — заданные числа, $\bar{m}$ — заданный вектор $\mathrm{R}^q$. Целевое множество $M=\{0\}$.

Лемма 1. *Уравнение* (3.1) *допускает избежание столкновений тогда и только тогда, когда* $\beta=0$ *или* $\lambda|\bar{m}|^2\sigma^2\geq 2\beta^2$.

Доказательство. *Достаточность*. В случае $\beta=0$, полагая $v(t)\equiv 0$, убеждаемся возможности избежания столкновений из всех точек $x_0\neq 0$. Пусть $\beta\neq 0$ и $\lambda|\bar{m}|^2\sigma^2\geqq 2\beta^2$. Без потери общности можно считать, что $\beta>0$. Из формулы Коши

$$x(t)=e^{\lambda t}x_0+\int_0^t \beta e^{\lambda s}ds+\int_0^t e^{\lambda(t-s)}(\bar{m},\ v(s))ds=e^{\lambda t}(\chi_0+\frac{\beta}{\lambda}) - \frac{\beta}{\lambda}+\int_0^t e^{\lambda(t-s)}(\bar{m},\ v(s))ds \tag{3.2}$$

вытекает, что, если $x_0>0$ или $x_0\leqq-\beta/\lambda$, то траектория $x(t)$ соответствующей управлению $v(t)\equiv 0$ удовлетворяет условию $x(t)\neq 0$ при всех $t\geqq 0$, т. е. из точки $x_0\in R\diagdown(-\beta/\lambda,\ 0]$ возможно избежание столкновений. Вычисления показывают, что из точки $x_0\in(-\beta/\lambda,\ 0)$ управление

$$v(s)=\begin{cases}-\dfrac{\lambda\sigma^2e^{\lambda s}}{\lambda x_0+\beta}\bar{m}, & \text{если}\quad 0\leqq s\leqq T(x_0)\\ 0, & \text{если}\quad T(x_0)<s<\infty\end{cases}$$

осуществляет избежание столкновений, где

$$T(x_0)=-\frac{1}{2\lambda}\ln\left[1-\frac{2(\lambda x_0+\beta)^2}{\lambda|\bar{m}|^2\sigma^2}\right].$$

*Необходимость*. Пусть $\beta>0$. В случае $\lambda=0$, пользуясь неравенством Коши — Буняковского, из (3.2) для произвольной траектории $x(t)$ уравнения (3.1) имеем

$$x(t)\geqq\beta t-|\bar{m}|\sqrt{t}\,\sigma+x_0. \tag{3.3}$$

Из (3.3) вытекает, что из точки $x_0<0$ избежание столкновений невозможно. А в случае $\lambda\neq 0$ имеет место следующее неравенство;

$$x(t)\geqq e^{\lambda t}(x_0+\frac{\beta}{\lambda})-\frac{\beta}{\lambda}-\sigma|\bar{m}|(\int_0^t e^{2\lambda s}ds)^{1/2}.$$

Отсюда, с помощью несложных вычислений, получим: а) если $\bar{m}=0$ или $|\lambda||m|^2\sigma^2<2\beta^2$, то из точки $x_0\in(-\beta/|\lambda|,\ 0)$ избежание столкновений невозможно (в случае $\lambda>0$ из любой точки $x_0<0$).

Пуст $\lambda<0$, $\bar{m}\neq 0$, $|\lambda||\bar{m}|^2\sigma^2\geqq 2\beta^2$. Предположим, что из точки $x_0<0$ возможно избежание столкновений, т. е. существует допустимое управление $\hat{v}(\cdot)$ такое, что соответствующая траектория $\hat{x}(\cdot)=x(\cdot,\ x_0,\ \hat{v}(\cdot))$ удовлетворяет условию $\hat{x}(t)\neq 0$ при всех $t\geqq 0$. Ясно, что $\|\hat{v}(\cdot)\|\neq 0$.

Если для некоторого $t>0$ имеем $\|\hat{v}(\cdot)\|^2_{[t,\ +\infty)}=\sigma^2-\|\hat{v}(\cdot)\|^2_{[0,\ t]}<\gamma=-2\beta^2/\lambda|\bar{m}|^2$, $x(s)<0$ при всех $s\in[0,\ t]$, то в силу а) из позиции $\hat{x}(t)$ с помощью управления $v(\cdot)$, удовлетворяющего ограничению $\|v(\cdot)\|^2\leqq\sigma^2-\|\hat{v}(\cdot)\|^2_{[0,\ t]}$, нельзя избежать столкновений. В частности, $\hat{x}(\tau)=0$ при некотором $\tau>t$.

Значит, $\|\hat{v}(\cdot)\|^2\leqq\sigma^2-\gamma$. Рассуждая аналогично получим $\|\hat{v}(\cdot)\|^2\leqq\sigma^2-2\gamma$, и. т. д. В конце концов приходим к противоречию $\|\hat{v}(\cdot)\|=0$.

Лемма 2. *Пусть* $\dim M=d-1$, $d\geqq 2$, $m$ — *нормальный вектор* $M$. *Система (1.1) допускает избежания столкновений тогда и только тогда, когда* $M$ *инвариантно относительно* $B$ *и* $\beta=(m,a)=0$ *или* $\lambda|D^*m|^2\sigma^2\geqq 2\beta^2$, *где* $\lambda$ — *собственное значение* $B^*$ *соответствующего собственному вектору* $m$.

Доказательство. Положим $F=\{y\in\mathrm{R}^d \mid (y,m)\leqq 0\}$, $\psi(\tau)=e^{B^*\tau}m$. По формуле Коши при $\tau\geqq 0$ имеем

$$W(\tau)=\{y\in\mathrm{R}^d \mid \forall v(\cdot),\ \|v(\cdot)\|_{[0,\tau]}\leqq\sigma,\ y(\tau,y_0,v(\cdot))\in F\}$$

$$=\{y \mid (y,\psi(\tau))\leqq -\max\{\int_0^\tau (Dv(s),\psi(s))ds \mid \|v(\cdot)\|_{[0,\tau]}\leqq\sigma\}.$$

Если подпространство $M$ не является инвариантным относительно $B$, то при малых $\tau>0$ векторы $\psi(\tau)$ и $m$ не будут колленеарными и $W(\tau)\setminus F\neq\emptyset$. Из определения $W(\tau)$ вытекает, что из точек множества $W(\tau)\setminus F$ избежание столкновений невозможно.

Случай, когда $M$ инвариантно относительно $B$, исследуется аналогично как в лемме 1. Для этого достаточно вести обозначения $x=(y,m)$, $\bar{m}=D^*m$.

Теорема 2. *Пусть* $\dim W_1=0$, *т. е.* $I_*\subset M$. *Система* (1.1) *допускает избежания столкновений тогда и только тогда, когда* $M$ *инвариантно относительно* $B$ *и* $a\in M$.

Доказательство. Допустим, что $M$ инвариантно относительно $B$ и $a\in M$. Тогда для любой точки $y_0\bar{\in}M$ при $v(t)\equiv 0$ имеем

$$\pi y(t,y_0,v(\cdot))=e^{Bt}y_0+\int_0^t \pi e^{B(t-s)}ads=\pi e^{Bt}y_0\neq 0$$

при всех $t\geqq 0$, т. е. из точки $y_0$ возможно избежание столкновений.

Теперь докажем необходимость. 1. Пусть $a\bar{\in}M$. Из произвольной точки $x_0\in I_*$ выпустим траекторию $x(\cdot)$ системы $\dot{x}=-Bx-a$. Так как $\dot{x}(0)=-Bx_0-a\bar{\in}M$, то существует момент времени $t_1>0$, такое, что $x(t_1)\bar{\in}M$. Легко видеть, что из точки $y_0=x(t_1)$ избежание столкновений невозможно: для произвольного управления $v(\cdot)$ имеем

$$y(t_1,y_0,v(\cdot))-y(t_1,y_0,0)=y(t_1,y_0,v(\cdot))-x_0=\int_0^{t_1} e^{(Bt_1-s)}Dv(s)ds\in I_*,$$

т. е. $y(t_1,y_0,v(\cdot))\in x_0+I_*\subset M$.

2. Пусть теперь $M$ не является инвариантным подпространством $B$ и $a\in M$. Тогда существует точка $x_0\in M$, такая, что $Bx_0\bar{\in}M$. Из точки $x_0$ выпустим траекторию $x(\cdot)$ системы $\dot{x}=-Bx-a$. Так как $\dot{x}(0)=-Bx_0-a\bar{\in}M$, то $x(t_1)\bar{\in}M$ при некотором $t_1>0$. Далее, аналогично как в случае 1, доказывается, что из точки $y_0=x(t_1)$ избежание столкновений невозможно.

Определение. Подмножество $S\subset\mathrm{R}^d$ называется положительно инвариантным для системы (1.1), если оно вместо с каждой своей точкой $y_0$ содержит любую траекторию $y(\cdot)=y(\cdot,y_0,v(\cdot))$ т. е. $y(t)\in S$ при всех $t\geqq 0$ (11).

Пусть $\dim W_1=1$, $H=W_1+M$, $S^*$ обозначает максимальное в $H$ положительно инвариантное множество системы (1.1), а $I^*$ — максимальное подпространство $H$, инвариантное относительно $B$.

Лемма 3. *Справедлива формула*

$$S^*=H\cap B^{-1}(I^*\overset{*}{-}D\,\mathrm{R}^q-a). \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $y_0\in S^*$. Из определения инвариантного множества следует, что для любого постоянного управления $v(t)\equiv v_0$, $v_0\in\mathrm{R}^q$ имеем $y(t,y_0,v(\cdot))\in S^*$ при всех достаточно малых $t\geqq 0$. Следовательно, $\dot{y}(0)=By_0+Dv_0+a\in H$ и $\ddot{y}(0)=B(By_0+Dv_0+a)\in H$. Отсюда, в силу максимальности $I^*$, получим $By_0+Dv_0+a\in I^*$.

Так как последнее включение выполняется при всех $v_0 \in \mathbb{R}^q$, то $By_0+D\mathbb{R}^q+a\subset I^*$, т. е. $y_0 \in H\cap B^{-1}(I^* \overset{*}{-} D\mathbb{R}^q-a)$.

Теперь из правой части (3.4) возьмем произвольную точку $y_0$. Пусть $v(\cdot)$ произвольное допустимое управление. Тогда $By_0+D\mathbb{R}^q+a\subset I^*$ и для траектории $y(\cdot)=y(\cdot, y_0, v(\cdot))$ имеем

$$y(t)-y_0 = e^{Bt}y_0 - y_0 + \int_0^t e^{B(t-s)}[Dv(s)+a]\,ds = \int_0^t e^{B(t-s)}[By_0+Dv(s)+a]\,ds \in I^*$$

при всех $t\geqq 0$. Следовательно, $y(t)\in H$ при $t\geqq 0$. Далее, для любых $v\in\mathbb{R}^q$ и $t\geqq 0$ получим

$$By(t)+Dv+a = By(t)-By_0+By_0+Dv+a = B(y(t)-y_0)+By_0+Dv+a\in I^*.$$

Таким образом, $y(t) \in H\cap B^{-1}(I^* \overset{*}{-} D\mathbb{R}^q-a)$ при всех $t\geqq 0$. Так как $S^*$ максимальное инвариантное множество, то $y_0\in S^*$.

Лемма 4. *Если $S^*\neq\varnothing$, то имеет место представление $S^*=I^*+z$, где $z$ — произвольная точка $S^*$.*

Доказательство. Пусть $y_0\in S^*$. Тогда $y_0-z\in H$ и в силу (3.4), для любого $v\in\mathbb{R}^q$ имеем

$$B(y_0-z) = By_0+Dv+a-(Bz+Dv+a)\in I^*.$$

Значит, $y_0-z\in I^*$.

Пусть теперь $y_0\in I^*+z$. Тогда $y_0=y_1+z$ для некоторого $y_1\in I^*$ и в силу (3.4),

$$By_0+D\mathbb{R}^q+a = By_1+Bz+D\mathbb{R}^q+a\subset I^*.$$

Следовательно, $y_0\in B^{-1}(I^* \overset{*}{-} D\mathbb{R}^q-a)$ и согласно лемме 3, $y_0\in S^*$.

Теорема 3. *Пусть* $\dim W_1=1$.

1. *Если $S^*=\varnothing$, то система* (1.1) *допускает избежания столкновений.*

2. *Пусть $S^*\neq\varnothing$. Положим $M_1=M\cap I^*$, $M_2=M\cap S^*$ и через $m$ обозначим нормальный вектор к $M_1$ в $I^*$. Система* (1.1) *допускает избежания столкновений тогда и только тогда, когда $M_1$ инвариантно относительно $B$ и $\beta=(m, a+By_*)=0$ или $\lambda|D^*m|^2\sigma^2\geqq 2\beta^2$ для некоторой точки $y_*\in M_2$, где $\lambda$ — собственное значение $B_*$ соответствующего собственному вектору $m$.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что для точки $y_0\,\bar{\in}\,S^*\cup M$ выполнены все условия теоремы 2 [12]. Поэтому как частный случай имеет место свойство: из точки $y_0\,\bar{\in}\,S^*\cup M$ возможно избежание столкновений. В частности, если $S^*=\varnothing$, то система (1.1) допускает избежания столкновений.

Пусть $S^*\neq\varnothing$. В силу инвариантности, роль целевого множества в $S^*$ играет $M_2$. Так как $\dim W_1=1$ и $I_*\subset I^*$, то $I^*=W_1+M_1$ и $\dim I^*=1+\dim M_1$.

Пусть $y_*$ произвольная точка $M_2$. Согласно лемме 4, $M_1=M_2-y_*$, $S^*-y_*=I^*$ и система (1.1) после замены $y=z+y_*$ примет вид

$$\dot z = Bz+Dv+By_*+a. \tag{3.5}$$

Задача избежания столкновений для систем (1.1) и (3.5) с фазовыми пространствами $S^*$ и $I^*$ соответственно эквивалентны.

Так как $M_1$ является гиперподпространством $I^*$, то для задачи избежания столкновений из точек $I^*$ в системе (3.5) справедливы аналоги лемм 1 и 2. Применения которых завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Легко убедиться, что условия теоремы 3 не зависят от выбора точки $y_* \in M_2$, т. е., если $M_1$ инвариантно относительно $B$, то $(m, a+By_1)=(m, a+By_2)$ для любых $y_1, y_2 \in M_2$.

**4.** Рассмотрим задачу избежания столкновений двух инерционных объектов $x, z \in \mathrm{R}^n$, движения которых задаются уравнениями

$$\ddot{x} = a_2\dot{x} + a_1x + D_1v_1 + b_1, \tag{4.1}$$

$$\ddot{z} = c_2\dot{z} + c_1z + D_2v_2 + b_2, \tag{4.2}$$

где $v_1 \in \mathrm{R}^{q_1}$, $v_2 \in \mathrm{R}^{q_2}$ — параметры управления; $a_i$, $c_i$, $i=1, 2$ заданные числа; $b_1$, $b_2$ — заданные точки $\mathrm{R}^n$; $D_1$, $D_2$ — постоянные матрицы. Столкновение объектов выражается равенством $x=z$. Управления $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ — измеримые функций удовлетворяющих ограничениям

$$\int_0^\infty |v_i(s)|^2 ds \leqq \sigma_i^2, \quad \sigma_i>0, \quad i=1, 2.$$

С помощью замены переменных $y^1=x$, $y^2=\dot{x}$, $y^3=z$, $y^4=\dot{z}$ из уравнений (4.1) и (4.2) перейдем к системе

$$\dot{y} = By+Dv+b, \quad y \in \mathrm{R}^d, \quad v \in \mathrm{R}^q, \quad d=4n, \tag{4.3}$$

где $B$, $D$, $b$, $q$ легко выражаются через $a_i$, $c_i$, $b_i$, $q_i$, $D_i$, $i=1, 2$. Целевое множество имеет вид $M=\{y \mid y^1=y^3\}$. Управление $v(\cdot)$ выбирается в классе измеримых функций, удовлетворяющих ограничению

$$\int_0^\infty |v(s)|^2 ds \leqq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2.$$

Легко проверить, что $M$ неинвариантно относительно $B$. Поэтому, согласно лемме 2 имеет место утверждение

I. В случае $n=1$ система (4.3) не допускает избежания столкновений.

В дальнейшем предполагается $n>1$. Оператор проектирования задается формулой $\Pi y=2^{-1}(y^1-y^3, 0, y^3-y^1, 0)$ (здесь 0 — нуль — вектор пространства $\mathrm{R}^n$). Из теоремы 1 следует

II. Если подпространства $D_1\mathrm{R}^{q_1}$ и $D_2\mathrm{R}^{q_1}$ не лежат в одном одномерном подпространстве, то система (4.3) допускает избежания столкновений.

Пусть подпространства $D_1\mathrm{R}^{q_1}$ и $D_2\mathrm{R}^{q_2}$ содержатся в одномерном подпространстве $\Delta$ с направляющим вектором $e$. Из формулы для $\Pi Bv$ вытекает, что $I^* \subset M$ в том и только в том случае, когда $D_1$ и $D_2$ — нулевые матрицы. Из теоремы 2 получим

III. Если $D$ — нулевая матрица, то система (4.3) не допускает избежания столкновений.

Пусть $D$ — ненулевая матрица. В сделанных предположениях $\dim W_1=1$ и $W_1=\{sw \mid s \in \mathrm{R}\}$, $w=(e, 0, -e, 0) \in \mathrm{R}^d$.

Через $F$ обозначим линейную оболочку векторов $(e, 0, 0, 0)$, $(0, e, 0, 0)$, $(0, 0, e, 0)$, $(0, 0, 0, e)$.

Лемма 5. *а) Пусть $a_2=c_2$. Тогда $I^*=F$, если $a_1 \neq c_1$ и $I^*=\{h=(h^1, h^2, h^3, h^4) \mid h^3-h^1, h^4-h^2 \in \Lambda\}$ в противном случае.*

*б) Пусть $a_2 \neq c_2$. Тогда $I^*=F$, если число $\eta=(a_1-c_1)/(c_2-a_2)$ не являтся решением уравнения*

$$\lambda^2 = a_2\lambda + a_1 \tag{4.4}$$

и $I^* = \{ h \mid h^2 - \eta h^1,\ h^3 - h^1,\ h^4 - \eta h^1 \in \Lambda\}$ в противном случае.

Доказательство. По определению $I^* = \{h \in H \mid Bh, \ldots, B^{l-1}h \in H\}$. Легко проверить, что подпространство $F$ инвариантно относительно $B$ и $F \subset I^*$.

а) Пусть $h = (h^1, h^2, h^3, h^4) \in I^*$. Тогда из условий $h$, $Bh \in H$ получим, что $h^3 - h^1$, $h^4 - h^2 \in \Lambda$. Если $a_1 \neq c_1$, то из включения $B^2h$, $B^3h \in H$ вытекает $h^1$, $h^2 \in \Lambda$. Следовательно, $h \in F$ и $I^* = F$. Если $a_1 = c_1$, то легко убедиться, что подпространство $G = \{h \mid h^3 - h^1,\ h^4 - h^2 \in \Lambda\}$ инвариантно относительно $B$. Так как оно содержит $I^*$, то $I^* = G$.

б) Пусть $h \in I^*$. Тогда из включений $h$, $Bh$, $B^2h \in H$ вытекает $h^2 - \eta h^1$, $h^3 - h^1$, $h^4 - \eta h^1 \in \Lambda$. Иными словами, $I^* \subset P$, $P = \{ h \mid h^2 - \eta h^1,\ h^3 - h^1,\ h^4 - \eta h^1 \in \Lambda\}$. Если $\eta$ не является решением уравнения (4.4), то из $B^3h \in H$ получим $h^1 \in \Lambda$. Следовательно, $I^* = F$.

Пусть $\eta$ является решением уравнения (4.4). Тогда оно удовлетворяет уравнению $\lambda^2 = c_2\lambda + c_1$ и $P$ будет инвариантным подпространством $B$. Таким образом, $I^* = P$.

Лемма доказана.

Отметим, что во всех случаях $I^* \cap M$ неинвариантно относительно $B$. Поэтому согласно теореме 3, если $S^* \neq \varnothing$, то система (4.3) не допускает избежания столкновений.

Из теоремы 3, лемм 3 и 5 с помощью несложных вычислений приходим к выводу.

IV. Пусть $a_2 = c_2$ и $a_1 = c_1$. Система (4.3) допускает избежания столкновений тогда и только тогда, когда $b_2 - b_1 \overline{\in} \Delta$.

V. Пусть выполнено одно из следующих условий: а) $a_2 = c_2$ и $a_1 \neq c_1$: б) $a_2 \neq c_2$ и $\eta$ не являтся решением уравнения (4.4): в) $a_2 \neq c_2$ и $\eta$ является нетривиальным решением уравнения (4.4). Система (4.3) допускает избежания столкновений тогда и только тогда, когда $c_1b_1 - a_1b_2 \overline{\in} \Lambda$.

VI. Пусть $a_2 \neq c_2$ и $a_1 = c_1 = 0$. Система (4.3) допускает избежания столкновений тогда и только тогда, когда $c_2b_1 - a_2b_2 \overline{\in} \Lambda$.

Легко видеть, что утверждения I—IV охватывают все случаи, связанные с системой (4.1), (4.2).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Л. С. Понтрягин, и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976.
2. Н. Н. Красовский. Теория управления движением. М., 1968.
3. Р. Айзекс. Дифференциальные игры. М., 1967.
4. Н. Сатимов. Задача избежания столкновений в линейных системах. *Кибернетика*, 1976, № 1, 117—121.
5. Н. Сатимов, А. Азамов. К задаче избежания столкновений в нелинейных системах. *Доклады АН УзССР*, 1974, № 6, 3—5.
6. Г. Ц. Чикрий. Нелинейная задача избежания столкновений. — В: Теория оптимальных решений 1977, Киев, 60—65.
7. G. I. Olsder, I. L. Walter. A differential game approach to collision avoidance of ships. — Optimization Techniques *(Lecture Notes Control Information Sci., Vol. 6) Berlin. 1978*, 264—271.
8. А. З. Фазылов. К задаче избежания столкновений. *Известия АН УзССР, мат., физ.*, 1987, № 3, 30—36.
9. Л. С. Понтрягин. Линейная дифференциальная игра убегания. *Труды мат. инст. АН СССР им. Б. А. Стеклова*, 112, 1971, 30—63.
10. Е. Ф. Мищенко, Н. Сатимов. Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх с нелинейными управлениями. *Дифф. уравнения*, 9, 1973, № 10, 1972—1797.
11. Н. С. Реттиев. Инвариантные множества систем управления. (Автореферат канд. дисс.) Л., 1979.
12. Е. Ф. Мищенко, Н. Сатимов. Об уклонении от встречи из заданной точки в дифференциальных играх с геометрическими и интегральными ограничениями. *Известия АН УзССР, мат., физ.*, 1983, № 5, 20—25.


*Математический факультет*
*Ташкентского университета.*
*Ташкент-95 СССР 700095.*

*Поступила 29. 11. 1988*