Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ (φ, ψ)-ПРОБЛЕМЫ А. МАРКОВА — М. КРЕЙНА

В. Л. ЧАКАЛОВ

В настоящей работе рассматривается одно обобщение так называемой (φ, ψ)-проблемы. Первые задачи этого круга рассматривались А. А. Марковым в [1] и [2]. В своей работе [3] и в монографии [4] М. Крейн расширяет и обобщает исследования Маркова. Полное изложение его результатов можно найти в [5] и [6, гл. VII]. Другой вариант этой проблемы содержится в монографии [7, гл. VIII]. Проблеме Маркова — Крейна можно дать следующую формулировку.

Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_n$ — действительная Чебышевская система функций на интервале $[a, b]$, а φ и ψ — непрерывные функции ограниченной вариации на том же интервале, разница $\psi-\varphi$ которых является неубывающей функцией. Описать тело K, состоящееся из точек $(\int_a^b u_0(t)d\sigma(t), \ldots, \int_a^b u_n(t)d\sigma(t))$, где σ пробегает множество всех функций ограниченной вариации для которых $\psi-\sigma$ и $\sigma-\varphi$ — неубывающие функции. Пусть дальше Ω — действительная функция на $[a, b]$, образующая вместе с функциями $u_0, u_1 \ldots, u_n$ Чебышевскую систему на $[a, b]$, и пусть $(C_0', C_1', \ldots, C_n')$ фиксированная внутренняя точка тела K. Среди всех функций σ со свойством $\int_a^b u_i(t)d\sigma(t)=C_i'$ $(i=0, \ldots, n)$ найти такие, для которых интеграл $\int_a^b \Omega(t)d\sigma(t)$ принимает наименьшее (наибольшее) значение.

В этой работе рассматриваются те же самые задачи в случае когда u_i $(i=0, \ldots, n+1)$ линейно независимые непрерывные функции на компактном отделимом пространстве. Даются интегральные представления точек тела K.

1. Здесь мы рассмотрим позитивный случай нашей проблемы из которого следует общий случай (этот способ изложения воспринят в [7, гл. VIII]). Сначала введем некоторые обозначения и определения.

Пусть T — компактное отделимое топологическое пространство. Через $C_R(T)$ обозначим пространство всех действительных непрерывных на T функций, наделенное равномерной нормой, а через $C_R^*(T)$ — сопряженное пространство. Пусть μ_0 — ненулевая позитивная мера на T (т. е. $\mu_0 \in C_R^*(T)$). Рассмотрим множество M всех позитивных мер μ для которых мера $\mu_0-\mu$ является тоже позитивной мерой. Притом будем говорить, что мера μ'' мажорирует меру μ' $(\mu'' \succ \mu')$ если мера $\mu''-\mu'$ позитивна. Позитивность меры μ будем обозначать следующим образом: $\mu \succ 0$. При тех обозначениях M состоит из всех мер μ для которых $0 \prec \mu \prec \mu_0$.

Пусть X — n-мерное подпространство $C_R(T)$, а $x_1, \ldots, x_n$ — фиксированный базис X. Пусть дальше K_n — множество всех точек пространства R^n вида $(\mu(x_1), \ldots, \mu(x_n))$, где μ пробегает M. Ясно, что K_n — выпуклое множество. Действительно, если $0<\alpha<1$ и $l_i'=\mu'(x_i)$, $l_i''=\mu''(x_i)$, $i=1, \ldots, n$, μ', $\mu'' \in M$, то очевидно $\alpha(l_1', \ldots, l_n') + (1-\alpha)(l_1'', \ldots, l_n'') = (\alpha\mu'(x_1) + (1-\alpha)\mu''(x_1), \ldots, \alpha\mu'(x_n) + (1-\alpha)\mu''(x_n))$. Но $0 \prec \mu' \prec \mu_0$ и $0 \prec \mu'' \prec \mu_0$, откуда следует, что $0 \prec \alpha\mu'+(1-\alpha)\mu'' \prec \mu_0$, так что $\alpha\mu'+(1-\alpha)\mu'' \in M$, т. е. $(\alpha l_1'+(1-\alpha)l_1'', \ldots, \alpha l_n'+(1-\alpha)l_n'') \in K_n$. Так же легко доказывается компактность K_n. Ограниченность K_n следует из неравенств $|\mu(x_i)| \leq \mu(|x_i|) \leq \mu_0(|x_i|)$,

СЕРДИКА, Българско математическо списание, Т. 15, 1989, с. 239—251.

$i=1, \ldots, n$, выполняющиеся для любой меры $\mu \in M$. Покажем что K_n замкнуто. Пусть $(l_1', \ldots, l_n')$, $(l_1^2, \ldots, l_n^2), \ldots, (l_1^s, \ldots, l_n^s), \ldots$ последовательность точек из K_n, сходящаяся к точке $(l_1, \ldots, l_n)$. Рассмотрим последовательность мер $\{\mu_s\}_{s=1}^{\infty}$ из M для которых $\mu(x_i)=l_i^s$, $i=1, \ldots, n$, $s=1, 2, \ldots$. Для любой функции $f \in C_R(T)$ последовательность $\{\mu_s(f)\}_{s=1}^{\infty}$ ограничена, как следует из неравенств $|\mu_s(f)| \leq \mu_s(|f|) \leq \mu_0(|f|)$ так, что применяя диагональный принцип (в этом частном случае он является следствием теоремы Тихонова) из $\{\mu_s\}_{s=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность (в общем случае обобщенную) сходящуюся для каждого $f \in C_R(T)$. Обозначим эту подпоследовательность через $\{\mu_{s_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ (здесь A — направленная система индексов). Положим $\mu(f)=\lim_\alpha \mu_{s_\alpha}(f)$. Ясно, что $\mu \in C_R^*(T)$, $\mu \succ 0$ и $\mu \prec \mu_0$. Это сразу следует из соотношения $\mu(f)=\lim_\alpha \mu_{s_\alpha}(f)$ и из свойств μ_{s_α}. Из равенств $\lim_\alpha \mu_{s_\alpha}(x_i)=l_i$ и $\lim_\alpha \mu_{s_\alpha}(x_i)=\mu(x_i)$ следует, что $l_i=\mu(x_i)$, $i=1, \ldots, n$, т. е. что $(l_1, \ldots, l_n) \in K_n$, чем заканчивается доказательство компактности K_n.

Замечание. Множество M очевидно выпукло. Доказательство компактности M проводится как доказательство компактности K_n. Действительно, если $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — последовательность мер $\mu_\alpha \in M$ (в общем случае обобщенная), то числовая последовательность $\{\mu_\alpha(f)\}_{\alpha \in A}$, где $f \in C_R(T)$ ограничена, так как $|\mu_\alpha(f)| \leq \mu_0(|f|)$. Тогда, согласно диагональному принципу существует подпоследовательность $\{\mu_{\alpha_\beta}\}_{\beta \in B}$, для которой сходится каждая из числовых последовательностей $\{\mu_{\alpha_\beta}(f)\}_{\beta \in B}$, где $f \in C_R(T)$ Полагая $\mu(f)=\lim_\beta \mu_{\alpha_\beta}(f)$, убеждаемся как и выше, что $\mu \in M$, т. е. что M компактно

Так как K_n и M — выпуклые и слабо компактные множества, то согласно теореме Крейна — Мильмана, каждое из них содержит неразложимые элементы. Прежде чем найти их, сделаем некоторые замечания.

Если $\mu \in M$, то всякое μ_0 — пренебрежимое подмножество T является μ — пренебрежимым так как $\mu \prec \mu_0$. Но тогда, согласно теореме Радона — Никодима [8, стр. 321], существует такая неотрицательная μ_0-интегрируемая функция g, что для любой μ-интегрируемой функции f $(\mu \in M) gf$ есть μ_0-интегрируемая функция, а если gf — μ_0-интегрируемая, то f — μ-интегрируемая функция и $\mu(f)=\mu_0(fg)$, т. е. $\mu=g \circ \mu_0$.

Из определения множества M следует, что неотрицательная функция g удовлетворяет также неравенству $g \leq 1$ (здесь и дальше, если не уговорено противное, будем считать, что соотношения вида $f \leq g$, $f=g$ выполняются почти всюду относительно соответствующей меры). Действительно, если бы множество $T^0=\{t \in T: g(t)>1\}$ было μ_0-непренебрежимо, то для некоторого достаточно малого $\delta>0$ множество $T^\delta=\{t \in T: g(t)>1+\delta\}$ было бы также μ_0-непренебрежимо. Так как функция $\chi_{T^\delta} g$ (здесь χ_A означает характеристическую функцию множества A) μ_0-интегруема, то $\chi_{T^\delta}\mu$-интегрируема, следовательно $\mu(\chi_{T^\delta})=\mu_0(\chi_{T^\delta} g) \geq \mu_0(\chi_{T^\delta}[1+\delta])>\mu_0(\chi_{T^\delta})$, что невозможно так как из $\mu_0 \succ \mu$ следует $\mu_0(\chi_{T^\delta}) \geq \mu(\chi_{T^\delta})$. И так для любого $\mu \in M$, соответствующая функция g, для которой $\mu=g \circ \mu_0$, удовлетворяет неравенствам $0 \leq g \leq 1$.

Впредь мы условимся обозначать через l как точку $(l_1, \ldots, l_n)$, так и функционал, определенный для каждого $x=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ равенством $l(x)=a_1l_1+\ldots+a_nl_n$.

Здесь покажем, что любой неразложимый элемент множества K_n можно продолжить до неразложимого элемента M. Пусть $\bar{l}$ — неразложимый элемент K_n, т. е. пусть из равенства $\bar{l}=\alpha l'+(1-\alpha)l''$, где l', $l'' \in K_n$, $0<\alpha<1$, следует, что $l'=l''$. Обозначим через $M_{\bar{l}}$ множество всех мер $\mu \in M$, продолжающих $\bar{l}$ до $G_R(T)$. Легко видеть, что $M_{\bar{l}}$ — экстремальное подмножество M. Это означает, что $M_{\bar{l}}$ выпукло, слабо компактно и обладает следующим свойством. Если $\mu=\alpha\mu'+(1-\alpha)\mu''(\mu', \mu''\in M, 0<\alpha<1)$ и если $\mu\in M_{\bar{l}}$, то $\mu'\in M_{\bar{l}}$ и $\mu''\in M_{\bar{l}}$. Выпуклость $M_{\bar{l}}$ очевидна, а слабая компактность доказывается как слабая компактность M, так что не будем останавливаться на их доказательство. Пусть $\mu\in M_{\bar{l}}$ и пусть для некоторого $\alpha\,(0<\alpha<1)$ имеет место равенство $\mu=\alpha\mu'+(1-\alpha)\mu''$, где $\mu', \mu''\in M$. Обозначим через l' и l'' ограничения мер μ' и μ'' на K_n. Так как μ является продолжением $\bar{l}$, то для любого $x\in X$ будем иметь $\bar{l}(x)=\alpha l'(x)+(1-\alpha)l''(x)$. Из неразложимости $\bar{l}$ следует, что $l'=l''=\bar{l}$, а это означает, что μ' и μ'' являются продолжениями $\bar{l}$, т. е. $\mu', \mu''\in M_{\bar{l}}$, следовательно $M_{\bar{l}}$ — экстремальное подмножество M. Но тогда $M_{\bar{l}}$ содержит хотя бы один неразложимый элемент M, который является искомым продолжением $\bar{l}$.

Следующее предложение дает характеристику неразложимых элементов M.

Предложение 1. *Мера* $\bar{\mu}=\bar{g}\circ\mu_0\in M(0\leqq\bar{g}\leqq 1)$ *является неразложимым элементом множества* M *тогда и только тогда, когда множество* $T^0=\{t\in T: 0<\bar{g}(t)<1\}$ μ_0 — *пренебрежимо, т. е. когда* $\bar{g}$ *принимает* μ_0 — *почти всюду значения* 0 *или* 1.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\bar{\mu}=\bar{g}\circ\mu_0$ — неразложимый элемент M. Допустим, что T_0 — непренебрежимое множество (впред мы не всегда будем уточнять меру, относительно которой имеет место заданное свойство). Тогда, для некоторого достаточно малого $\varepsilon>0$, множество $T_\varepsilon=\{t\in T: \varepsilon<\bar{g}(t)<1-\varepsilon\}$ также не будет пренебрежимым. С другой стороны, как хорошо известно, для любой μ_0-интегрируемой функции f и любой ограниченной (в существенном) μ_0-интегрируемой функции p, функция fp является также μ_0-интегрируемой. Отсюда следует, что для любой такой функции f будем иметь

$$\bar{\mu}(f)=\int_T f\bar{g}\,d\mu_0=\int_{T\setminus T_\varepsilon} f\bar{g}\,d\mu_0+\int_{T_\varepsilon} f\bar{g}\,d\mu_0=\int_{T\setminus T_\varepsilon} f\bar{g}\,d\mu_0+\frac{1}{2}\int_{T_\varepsilon} f(1+\varepsilon)\,\bar{g}\,d\mu_0$$

$$+\frac{1}{2}\int_{T_\varepsilon} f(1-\varepsilon)\bar{g}\,d\mu_0=\frac{1}{2}\int_T fg_1d\mu_0+\frac{1}{2}\int_T fg_2d\mu_0,$$

где

$$g_1(t)=\begin{cases}\bar{g}(t) & \text{для } t\in T\setminus T_\varepsilon\\ (1+\varepsilon)\,\bar{g}(t) & \text{для } t\in T_\varepsilon,\end{cases}\qquad g_2(t)=\begin{cases}\bar{g}(t) & \text{для } t\in T\setminus T_\varepsilon\\ (1-\varepsilon)\,\bar{g}(t) & \text{для } t\in T_\varepsilon.\end{cases}$$

Так как g_1 и g_2 — интегрируемые функции, удовлетворяющие неравенствам $0\leqq g_1, g_2\leqq 1$, то $\mu_1=g_1\circ\mu_0$ и $\mu_2=g_2\circ\mu_0$ удовлетворяют соотношениям $0\prec\mu_1, \mu_2\prec\mu_0$, следовательно принадлежат M. Но $\bar{\mu}$ — неразложимый элемент М, так что для любого $f\in C_R(T)$ будем иметь $\mu_1(f)=\mu_2(f)$. Отсюда следует, что для любой μ_0 — интегрируемой функции f выполняется равенство $\int_T fg_1d\mu_0=\int_T fg_2d\mu_0$. Положив $f=g_2-g_1$ получим, что $\int_T[g_2-g_1]^2d\mu_0=0$, следовательно $g_1=g_2$. Но это невозможно потому что $g_1(t)\neq g_2(t)$ для почти всех t непренебрежимого множества T_ε. Полученное противоречие доказывает, что T_0 есть μ_0 — пренебрежимое множество.

Достаточность. Пусть $\bar{\mu}=\bar{g}\circ\mu_0\in M$ и $T_0=\{t\in T: 0<g(t)<1\}$ — пренебрежимое множество. Покажем, что $\bar{\mu}$ — неразложимый элемент M. Пусть для всякого $f\in C_R(T)$

$$\bar{\mu}(f)=\alpha\mu_1(f)+(1-\alpha)\mu_2(f),\quad (\mu_1=g_1\circ\mu_0\in M,\ \mu_2=g_2\circ\mu_0\in M,\ 0<\alpha<1).$$

Отметим что любая μ_0-интегрируемая функция φ является $\bar{\mu}$ — интегрируемой, а также μ_i-интегрируемой ($i=1, 2$) так как $\mu_0 \succ \bar{\mu}$, $\mu_0 \succ \mu_i$ ($i=1, 2$). Но тогда будем иметь $\bar{\mu}(\varphi)=\alpha\mu_1(\varphi)+(1-\alpha)\mu_2(\varphi)$, т. е. $\mu_0(\varphi[\bar{g}-\alpha g_1-(1-\alpha)g_2])=0$. Положив $\varphi=\bar{g}-\alpha g_1-(1-\alpha)g_2$, получим, что $\bar{g}=\alpha g_1+(1-\alpha)g_2$. Отсюда сразу следует, что μ_0 — почти всюду где $\bar{g}(t)=1$ ($\bar{g}(t)=0$) имеют место равенства $g_1(t)=g_2(t)=1$, $g_1(t)=g_2(t)=0$ (а это означает, что $g_1=g_2=\bar{g}$). И так, $\bar{\mu}=\mu_1=\mu_2$, т. е. $\bar{\mu}$ является неразложимым элементом M.

Из только что доказанного предложения и одной известной теоремы К. Каратеодори [9] сразу следует, что всякий функционал $l\in\partial K_n$ ($l\neq 0$) (здесь ∂K_n — граница K_n) можно представить как выпуклая комбинация не более чем n неразложимых элементов K, т. е. что для любого $x\in X$ имеет место равенство

$$l(x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\mu_0(xg_i)=\mu_0\Big(x\Big[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i g_i\Big]\Big),$$

где $1\leq r\leq n$, α_i — подходящие положительные числа, удовлетворяющие условию $\Sigma_{i=1}^{r}\alpha_i=1$, а g_i — μ_0-интегрируемые функции принимающие μ_0 — почти всюду на T значения 0 или 1. Ввиду того, что нулевой функционал $l^0=0$ принадлежит K_n, то если $l(l\neq 0)$ — внутренняя точка K_n, то для некоторого $p>1$ точка $pl\in\partial K_n$, следовательно имеет представление указанного вида. Таким образом мы доказали следующее предложение,

Предложение 2. *Пусть $l\in K_n$ и $l\neq 0$. Тогда существует натуральное число $r(1\leq r\leq n)$, числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ($0<\alpha_i<1$, $i=1, \ldots, r$, $\Sigma_{i=1}^{r}\alpha_i\leq 1$) и μ_0-интегрируемые функции $g_1, \ldots g_r$, каждая из которых принимает μ_0-почти всюду только значения 0 или 1 так, что для всякого $x\in X$ имеем*

$$l(x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\mu_0(xg_i)=\mu_0\Big(x\Big[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i g_i\Big]\Big).$$

Если $l\in\partial K_n$, то $\Sigma_{i=1}^{r}\alpha_i=1$.

Замечание. Мы не утверждаем что из $\Sigma_{i=1}^{r}\alpha_i=1$ следует соотношение $l\in\partial K_n$.

Следующее предложение содержит одну характеристику тела K_n, принадлежащую М. Крейну и применимую без изменений в нашем случае.

Предложение 3 (М. Крейн). Для того чтобы точка $l(l_1, \ldots, l_n)$ принадлежала телу K_n необходимо и достаточно чтобы для любого $x\in X$ выполнялось неравенство $l(x)\leq\mu_0(x^+)$, где $x^+=\max(x, 0)$. При этом $l\in\partial K_n$ тогда и только тогда, когда существует $x'\in X$ ($x'\neq 0$) так, что $l(x')=\mu_0(x'^+)$.

Доказательство. Очевидно всякий функционал l от K_n удовлетворяет для $x\in X$ неравенству $l(x)\leq\mu_0(x^+)$.

Пусть функционал l (определенный на X) удовлетворяет неравенству $l(x)\leq\mu_0(x^+)$ для всякого $x\in X$. Заметим, что функционал, определенный на $C_R(T)$ равенством $P(f)=\mu_0(f^+)$, является полунормой. Посредством теоремы Хана — Банаха продолжим l до меры $\mu\in C_R^*(T)$. Продолжение удовлетворяет условию $\mu(f)\leq P(f)=\mu_0(f^+)$ для любого $f\in C_R(T)$. Если $f\geq 0$, то $\mu(f)\leq\mu_0(f^+)=\mu_0(f)$, т. е. $\mu_0\succ\mu$. С другой стороны, $\mu(-f)\leq\mu_0([-f]^+)=\mu_0(0)=0$, что доказывает соотношение $\mu\succ 0$. Так как для $x\in X$ имеем $l(x)=\mu(x)$, а $\mu\in M$, то $l\in K_n$.

Пусть $l\in\partial K_n$. С одной стороны, для $x\in X$ имеем $l(x)=a_1l_1+\ldots+a_nl_n\leq\mu_0(x^+)$, а, с другой — существует последовательность точек $\{(l_1^s, \ldots, l_n^s)\}_{s=1}^{\infty}$, непринадлежащих K_n, сходящаяся к точке $l(l_1, \ldots, l_n)$. Так как $(l_1^s, \ldots, l_n^s)\notin K_n$, то существует функция $x^s=a_1^sx_1+\ldots+a_n^sx_n$, для которой $l^s(x^s)=a_1^s l_1^s+\ldots+a_n^s l_n^s>\mu_0(x^{s+})$

(из этого неравенства видно, что $x^s \neq 0$). Без ограничения общности можно предполагать, что $\Sigma_{i=1}^n (a_i^s)^2 = 1$ и что каждая из последовательностей $a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^s, \ldots$ ($i = 1, \ldots, n$) сходится к некоторому числу a_i' (очевидно $\Sigma_{i=1}^n (a_i')^2 = 1$). Отсюда при помощи предельного перехода получаем соотношение $\lim_{s\to\infty} l^s(x^s) = a_i' l_1 + \ldots + a_n' l_n = l(x') \geq \mu_0(x'^+)$, что вместе с неравенством $l(x') \leq \mu_0(x'^+)$ дает $l(x') = \mu_0(x'^+)$ ($x' \neq 0$).

Предположим сейчас, что для некоторого $x' \in X (x' \neq 0)$ имеем $l(x') = \mu_0(x'^+)$ и что $l \in K_n$. Из неравенства $x' \neq 0$ следует, что хотя бы один из коэффициентов a_i', например a_n', не равняется нулю. Но тогда, ввиду того что $l(x') = a_1' l_1 + \ldots + a_n' l_n = \mu_0(x'^+)$, можно подобрать знак числа δ таким образом, что $l_\delta(x') = a_1' l_1 + \ldots + a_n' (l_n + \delta) > \mu_0(x'^+)$, откуда следует $l_\delta \bar{\in} K_n$. С другой стороны, $|\delta|$ можно выбрать произвольно малое, а это означает, что любая окрестность точки $l(l_1, \ldots, l_n)$ $(l \in K_n)$ содержит точки, непринадлежащие K_n, т. е. $l \in \partial K_n$.

Следствие. Для того чтобы нулевой функционал $l^0 = 0$ был граничной точкой тела K_n, необходимо и достаточно чтобы существовал элемент $x' \in X$ ($x' \neq 0$), для которого $\mu_0(x'^+) = 0$.

Действительно, если такой элемент существует, то $0 = l^0(x') = \mu_0(x'^+)$, следовательно $l_0 \in \partial K_n$. Если $l^0 \in K_n$, то для некоторой функции $x' \in X$, где $x' \neq 0$ имеем $0 = l^0(x') = \mu_0(x'^+)$. Такая функция наверное существует, если X имеет хотя бы одну ненулевую неотрицательную функцию.

Комбинируя предложения 2 и 3, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого функционала $l (l \neq 0)$ тела K_n существуют r положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $(1 \leq r \leq n)$ такие, что $\Sigma_{i=1}^r \alpha_i \leq 1$ и r μ_0-интегрируемые функции $g_1, \ldots, g_r$, каждая из которых принимает только значения 0 или 1 так, что для всякого $x \in X$ имеет место представление*

$$l(x) = \mu_0(x[\sum_{i=1}^r \alpha_i g_i]). \tag{1}$$

При этом, если $l \in \partial K_n$, то $\Sigma_{i=1}^r \alpha_i = 1$. Существует такая функция $x_l \in X$, что $g_i(t) = 1$ когда $x_l(t) > 0$ и $g_i(t) = 0$, когда $x_l(t) < 0$ ($i = 1, \ldots, r$).

Доказательство. Остается доказать только утверждение о существовании функции x_l с указанными свойствами. Остальные утверждения содержатся в предложении 2.

Выберем число $p \geq 1$ так, чтобы имело место соотношение $l' = pl \in \partial K_n$. Тогда в представлении (1) для l', а именно $l'(x) = \mu_0(x[\Sigma_{i=1}^r \alpha_i g_i])$, имеем $\Sigma_{i=1}^r \alpha_i = 1$. Согласно предложению 3 существует функция x_l, для которой $l'(x_l) = \mu^0(x_l^+)$. Отсюда и от представления (1) получаем, что

$$\mu_0(x_l^+) = l'(x_l) = \mu_0(x_l[\sum_{i=1}^r \alpha_i g_i]) = \mu_0(x_l^+[\sum_{i=1}^r \alpha_i g_i]) - \mu_0(x_l^-[\sum_{i=1}^r \alpha_i g_i])$$

или

$$\mu_0(x_l^+[\sum_{i=1}^r \alpha_i(1-g_i)]) + \mu_0(x_l^-[\sum_{i=1}^r \alpha_i g_i]) = 0,$$

откуда сразу следует

$$\mu_0(x_l^+[\sum_{i=1}^r \alpha_i(1-g_i)]) = \mu_0(x_l^-[\sum_{i=1}^r \alpha_i g_i]) = 0,$$

т. е.

$$x_l^+ [\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(1-g_i)] = x_l^- [\sum_{i=1}^{r} \alpha_i g_i] = 0,$$

а это означает, что μ_0 — почти всюду где $x_l(t)>0$ имеем $g_i(t)=1$ и почти всюду, где $x_l(t)<0$, имеем $g_i(t)=0$ $(i=1, \ldots, r)$. Изменяя значения $g_i(t)$ $(i=1, \ldots, r)$ на μ_0-пренебрежимом множестве, получим r новые функции (обозначим их опять через g_i), принимающие только значения 0 или 1 и имеющие значение 1 всюду где $x_l(t)>0$ и 0 — всюду, где $x_l(t)<0$. Теорема полностью доказана.

Пусть Ω — действительная функция, непрерывна на T и образующая вместе с $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимую систему. Рассмотрим $n+1$ мерное действительное пространство Y, составленное функциями $y=a_1x_1+\ldots+a_nx_n+a_{n+1}\Omega$, где $a_1, \ldots, a_{n+1}$ — действительные числа, и обозначим через K_{n+1} $n+1$-мерное тело точек $(\mu(x_1), \ldots, \mu(x_n), \mu(\Omega))$, где μ пробегает M. Пусть $(l_1', \ldots, l_n')$ — фиксированная точка K_n (т. е. $l_i'=\mu'(x_i)$, для некоторой меры $\mu' \in M$). Будем заниматься со следующей задачей.

Из всех значений γ, для которых точка $(l_1', \ldots, l_n', \gamma)$ принадлежит телу K_{n+1} дать характеристику наибольшему и наименьшему значению.

Из компактности и выпуклости K_{n+1} следует, что γ пробегает компактный интервал $[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]$ (случай когда $\underline{\gamma}=\overline{\gamma}$ не исключается). Мы рассмотрим формулированную только что задачу при дополнительном предположении, что K_n содержит внутренние точки и что $(l_1', \ldots, l_n')$ — внутренняя точка K_n. Будем обозначать через l_γ как точку $(l_1', \ldots, l_n', \gamma)$, так и функционал, определенный для всякой функции $y=a_1x_1+\ldots+a_nx_n+a_{n+1}\Omega$ равенством $l_\gamma(y)=a_1l_1'+\ldots+a_nl_{1n}'+a_{n+1}\gamma$. Точки $l_{\underline{\gamma}}$ и $l_{\overline{\gamma}}$ очевидно принадлежат ∂K_{n+1}, а $l_{\underline{\gamma}-\varepsilon}=(l_1', \ldots, l_n', \underline{\gamma}-\varepsilon)$ и $l_{\overline{\gamma}+\varepsilon}=(l_1', \ldots, l_n', \overline{\gamma}+\varepsilon)$ не принадлежать K_{n+1} для любого выбора положительного числа ε. Рассмотрим функционал $l_{\underline{\gamma}-\varepsilon}$ и обозначим через y^ε функцию, $a_1^\varepsilon x_1+\ldots+a_n^\varepsilon x_n+a_{n+1}^\varepsilon\Omega$, для которой выполняется неравенство

$$l_{\underline{\gamma}-\varepsilon}(y^\varepsilon)=a_1^\varepsilon l_1'+\ldots+a_n^\varepsilon l_n'+a_{n+1}^\varepsilon(\underline{\gamma}-\varepsilon)>\mu_0(y^{\varepsilon+}). \tag{2}$$

Из (2) следует, что $y^\varepsilon \neq 0$. Кроме того $a_{n+1}^\varepsilon<0$, так как $l_{\underline{\gamma}}(y^\varepsilon)-\varepsilon a_{n+1}^\varepsilon>\mu_0(y^{\varepsilon+})$ и $l_{\underline{\gamma}}(y^\varepsilon)\leq\mu_0(y^{\varepsilon+})$. Без ограничения общности можно предположить, что $\Sigma_{i=1}^{n+1}(a_i^\varepsilon)^2=1$ и что для некоторой сходящейся к нулю последовательности $\{\varepsilon_s\}_{s=1}^\infty$ выполняются соотношения $\lim_{s\to\infty}a_i^s=a_i^*$ $(i=1, \ldots, n+1)$. В результате предельного перехода $\varepsilon_s\to 0$ получим из (2) неравенство $l_{\underline{\gamma}}(y^*)\geq\mu_0(y^{*+})(y^*=a_1^*x_1+\ldots+a_n^*x_n+a_{n+1}^*\Omega)$, что вместе с неравенством $l_{\underline{\gamma}}(y^*)\leq\mu_0(y^{*+})$ дает $l_{\underline{\gamma}}(y^*)=\mu_0(y^{*+})$. Из неравенства $a_{n+1}^\varepsilon<0$ следует, что $a_{n+1}^*\leq 0$. Если $a_{n+1}^\varepsilon=0$, то $y^*\in X$ и $l'(y^*)=l_{\underline{\gamma}}(y^*)=\mu_0(y^{*+})$, т. е. $l'\in\partial K_n$. Но это невозможно, так как точка $(l_1', \ldots, l_n')$ — внутренняя для K_n. И так $a_{n+1}^*<0$. Положив $\tilde{y}=y^*/|a_{n+1}^*|=a_1^*/|a_{n+1}^*|x_1+\cdots+a_n^*/|a_{n+1}^*|x_n-\Omega$, получим, что $l_{\underline{\gamma}}(\tilde{x}-\Omega)=\mu_0([\tilde{x}-\Omega]^+)$.

Аналогично доказывается существование функции $\tilde{\tilde{x}}\in X$ для которой $l_{\overline{\gamma}}(\tilde{\tilde{x}}+\Omega)=\mu_0([\tilde{\tilde{x}}+\Omega]^+)$. Имея ввиду теорему 1 и сказанное, можно сформулировать такое следствие.

Следствие. Пусть $(l_1', \ldots, l_n')$ — фиксированная ненулевая внутренняя точка K_n (предполагается, что K_n содержит такие точки), а $\underline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}$ — наименьшее и наибольшее среди значений γ для которых $(l_1', \ldots, l_n', \gamma)$ принадлежит K_{n+1}. Тогда существуют такие функции $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ $(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in X)$, что в представлении $l_{\underline{\gamma}}$ и $l_{\overline{\gamma}}$ вида (1), а именно

$$l_{\underline{\gamma}}(y) = \mu_0(y[\sum_{i=1}^{r} \alpha_i' g_i']), \quad (1 \leq r \leq n+1,\ \alpha_i' > 0,\ i = 1, \ldots, r,\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i' = 1),$$

$$l_{\overline{\gamma}}(y) = \mu_0(y[\sum_{j=1}^{s} \alpha_j'' g_j'']), \quad (1 \leq s \leq n+1,\ \alpha_j'' > 0,\ j = 1, \ldots, s\ \sum_{j=1}^{s} \alpha_j' = 1),$$

функции g_i' $(i = 1, \ldots, r)$ и g_j'' $(j = 1, \ldots, s)$, принимающие только значения 0 или 1 удовлетворяют соотношениям

$$g_i'(t) = \begin{cases} 1 \text{ для } t \in \{t \in T : \tilde{x}(t) - \Omega(t) > 0\} \\ 0 \text{ для } t \in \{t \in T : \tilde{x}(t) - \Omega(t) < 0\} \end{cases}, \quad (i = 1, \ldots, r),$$

$$g_j''(t) = \begin{cases} 1 \text{ для } t \in \{t \in T : \tilde{\tilde{x}}(t) + \Omega(t) > 0\} \\ 0 \text{ для } t \in \{t \in T : \tilde{\tilde{x}}(t) + \Omega(t) < 0\}, \end{cases} \quad (j = 1, \ldots, s).$$

В частности $\underline{\gamma} = \mu_0(\Omega[\Sigma_{i=1}^r \alpha_i' g_i'])$, $\overline{\gamma} = \mu_0(\Omega[\Sigma_{j=1}^s \alpha_j'' g_j''])$.

Теорема 1 и ее следствие переносятся без труда (с соответствующими изменениями) и для непозитивных мер.

Пусть μ' и μ'' — две меры на $C_R(T)$ (в общем случае непозитивные), удовлетворяющие соотношению $\mu' \prec \mu''$. Рассмотрим множество M всех мер μ, для которых $\mu' \prec \mu \prec \mu''$. Как и выше $x_i, \ldots, x_n$ — фиксированный базис X. Положим $\mu(x_i) = l_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и рассмотрим тело K_n всех точек $l(l_1, \ldots, l_n) = (\mu(x_1), \ldots, \mu(x_n))$, где μ пробегает M. И здесь через l будем обозначать как точку $(l_1, \ldots, l_n)$, так и функционал, сопоставляющий каждому $x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ число $l(x) = a_1l_1 + \ldots + a_nl_n$. Рассмотрим дальше перемещенное тело $\tilde{K}_n$, состоящееся из точек $\tilde{l} = (\mu(x_1) - \mu'(x_1), \ldots, \mu(x_n) - \mu'(x_n))$, и функционал $\tilde{l}(x) = l(x) - \mu'(x)$. Положим $\tilde{\mu} = \mu - \mu'$ и $\mu_0 = \mu'' - \mu'$. Очевидно, что $0 \prec \tilde{\mu} \prec \mu_0$. Это показывает, что для $\tilde{K}_n$ выполняются условия теоремы 1. Но тогда для любого $\tilde{l} \in \tilde{K}_n$ $(\tilde{l} \neq 0)$ существуют r μ_0-интегрируемые функции $g_1, \ldots, g_r$ $(1 \leq r \leq n)$, принимающие только значения 0 или 1 и положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $(\Sigma_{i=1}^r \alpha_i \leq 1)$ так, что для любого $x \in X$ выполняется равенство $\tilde{l}(x) = l(x) - \mu'(x)$ $= \mu_0(x[\Sigma_{i=1}^r \alpha_i g_i])$. Отсюда следует, что $l(x) = \mu_0(x[\Sigma_{i=1}^r \alpha_i g_i]) + \mu'(x)$. И так, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\mu', \mu'' \in C_R^*(T)$, $\mu' \prec \mu''$. *Пусть дальше* K_n *— тело, состоящее из точек* $l(l_1, \ldots, l_n) = \mu(x_1), \ldots, \mu(x_n))$, $\mu \in M$, *где* $M = \{\mu \in C_R^*(T) : \mu' \prec \mu \prec \mu''\}$. *Тогда для любого порожденного мерой* μ $l \in K_n(\mu > \mu',\ \mu \neq \mu')$ *существуют* r *положительные числа* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $(1 \leq r \leq n)$ *со свойством* $\Sigma_{i=1}^r \alpha_i \leq 1$ *и* r μ_0*-интегрируемые функции* $g_1, \ldots, g_r$ $(\mu_0 = \mu'' - \mu')$, *принимающие только значения* 0 *или* 1 *так, что для всякого* $x \in X$ *имеет место представление*

$$l(x) = \mu_0(x[\sum_{i=1}^{r} \alpha_i g_i]) + \mu'(x). \tag{3}$$

Если $\Sigma_{i=1}^r \alpha_i g_i$ *— интегрируемая функция относительно одной из мер* μ' *и* μ'' *(следовательно интегрируемая и относительно другой), то* (3) *принимает следующий вид:*

$$l(x)=\mu''(x[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i g_i])+\mu'(x[1-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i g_i]). \tag{4}$$

Если $l\in\partial K_n$, *то* $\Sigma_{i=1}^r\alpha_i=1$. *Кроме того, для некоторой функции* $x_l\in X$ *имеем* $g_i(t)=1$ $(i=1,\ldots,r)$ *для всех значений* t, *для которых* $x_l(t)>0$, *и* $g_i(t)=0$ $(i=1\ldots,r)$ *для всех значений* t, *для которых* $x_l(t)<0$.

Ниже мы сформулируем одно следствие, аналогично следствию теоремы 1.

Следствие. При означениях и предположениях теоремы 2 пусть K_n содержит внутренние точки и пусть $(l_1',\ldots,l_n')$ — внутренняя точка K_n, а Ω — действительная непрерывная на T функция, линейно независимая с $x_1,\ldots,x_n$. Пусть дальше $\underline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}$ — наименьшее и наибольшее среди значений γ, для которых точка $l_\gamma=(l_1,\ldots,l_n,\gamma)$ принадлежит телу $K_{n+1}=\{(\mu(x_1),\ldots,\mu(x_n),\mu(\Omega)):\mu'\prec\mu\prec\mu''\}$. Тогда, если $l_{\overline{\gamma}}(y)\neq\mu'(y)$ и $l_{\underline{\gamma}}(y)\neq\mu'(y)$ $(y=a_1x_1+\ldots+a_nx_n+a_{n+1}\Omega)$, то существуют такие функции $\tilde{x}$, $\tilde{\tilde{x}}\in X$, что в представлении (3) для $l_{\underline{\gamma}}$ и $l_{\overline{\gamma}}$:

$$\begin{aligned} &l_{\underline{\gamma}}(y)=\mu_0(y)[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i' g_i'])+\mu'(y), \quad (0\leq r\leq n+1,\ \alpha_i'>0,\ i=1,\ldots,r,\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i'=1),\\ &l_{\overline{\gamma}}(y)=\mu_0(y[\sum_{i=1}^{s}\alpha_j'' g_j''])+\mu'(y), \quad (0\leq s\leq n+1,\ \alpha_j''>0,\ j=1,\ldots,s,\ \sum_{j=1}^{s}\alpha_j''=1)\end{aligned} \tag{5}$$

функции g_i' $(i=1,\ldots,r)$ и g_i'' $(j=1,\ldots,s)$ могут принимать только значения 0 или 1 и удовлетворяют соотношениям

$$g_i'(t)=\begin{cases}1 & \text{для } t\in\{t\in T:\tilde{x}(t)-\Omega(t)>0\}\\ 0 & \text{для } t\in\{t\in T:\tilde{x}(t)-\Omega(t)<0\}\end{cases},\quad (i=1,\ldots,r),$$

$$g_j''(t)=\begin{cases}1 & \text{для } t\in\{t\in T:\tilde{\tilde{x}}(t)+\Omega(t)>0\}\\ 0 & \text{для } t\in\{t\in T:\tilde{\tilde{x}}(t)+\Omega(t)<0\}\end{cases},\quad (j=1,\ldots,s).$$

В частности, $\underline{\gamma}=\mu_0(\Omega[\Sigma_{i=1}^r\alpha_i' g_i'])+\mu'(\Omega)$, $\overline{\gamma}=\mu_0(\Omega[\Sigma_{j=1}^s\alpha_j'' g_j''])+\mu'(\Omega)$. Если функция $\Sigma_{i=1}^r\alpha_i' g_i'$ или $\Sigma_{j=1}^s\alpha_j'' g_j''$ интегрируема относительно некоторой из мер μ' и μ'' (следовательно, интегрируема и относительно другой), то представление (5) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &l_{\overline{\gamma}}(y)=\mu''(y[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i' g_i'])+\mu'(y[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i'(1-g_i')]),\\ &l_{\underline{\gamma}}(y)=\mu''(y[\sum_{j=1}^{s}\alpha_j'' y_j''])+\mu'(y[\sum_{j=1}^{s}\alpha_j''(1-g_j'')]).\end{aligned} \tag{6}$$

Если в (6) положим $y=\Omega$, получим соответствующие представления для $\underline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}$.

2. В этом пункте мы наложим пространству X одно дополнительное условие, что даст нам возможность упростить утверждения теорем 1 и 2 и их следствия. Предположим, что выполняется следующее условие.

А. Нули любой функции $x\in X$ $(x\neq 0)$ образуют μ_0-пренебрежимое множество. Следуя М. Крейну, такие функции будем называть нормальными.

Пример. Пусть компактное множество T состоит из точек $t=(u, v)\in R^2$ и содержит внутренние точки и пусть X — пространство всех многочленов $x(u, v)$ двух переменных данной степени k, рассматриваемых на T. Положим $n=(k+1)(k+2)/2$ (т. е. n — размерность X). Пусть мера μ_0 — обычная Лебеговская мера $\mu_0(f)=\int\int_T f(u, v)dudv$. Очевидно, всякий многочлен $x(x\neq 0)$ — нормальная функция относительно выбранной меры так как множество всех точек $(u, v)\in T$, для которых $x(u, v)=0$ имеет Лебеговскую меру, равную нулю.

Пусть X удовлетворяет условию A и пусть $l(l\neq 0)$ — точка K_n. Тогда функция x_l, фигурирующая в теореме 1, равна нулю на μ_0-пренебрежимом множестве, откуда следует, что функции $g_1, \ldots, g_l$ в представлении (1) имеют равные значения для всех t, для которых $x_l(t)\neq 0$, т. е. μ_0 — почти всюду. Но тогда, обозначив через g функцию

$$g(t)=\begin{cases} 1 \text{ для } t\in\{t\in T: x_l(t)>0\} \\ 0 \text{ для } t\in\{t\in T: x_l(t)\leqq 0\}, \end{cases} \tag{7}$$

получим, что g μ_0 — эквивалентна каждой из функций $g_1, \ldots, g_r$. Отметим еще, что g — универсально интегрируемая функция, т. е. интегрируемая относительно любой меры, так как является характеристической функцией открытого подмножества компактного множества. И так, представление (1) принимает вид

$$l(x)=\mu_0(x[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i g])=\mu_0(xcg), \quad (0<c=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\leqq 1). \tag{8}$$

Мы покажем, что при выполнении условия A любая граничная точка K_n является неразложимым элементом K_n. Пусть $l\in K_n$ и $l=\alpha l'+(1-\alpha)l''$, где $0<\alpha<1$ и $l', l''\in K_n$. Для любого $x\in X$ имеем $l(x)=\mu_0(xg)$, $l'(x)=\mu_0(xg')$, $l''(x)=\mu_0(xg'')$, где g задается посредством (7), а g' и g'' задаются аналогичным образом. Ввиду того, что $l(x_l)=\mu_0(x_l^+)$ и $l=\alpha l'+(1-\alpha)l''$, будем иметь

$$l(x_l)=\mu_0(x_l^+)=\alpha\mu_0(x_l g')+(1-\alpha)\mu_0(x_l g''),$$

откуда

$$\mu_0(x_l^+)=\mu_0(x_l[\alpha g'+(1-\alpha)g''])=\mu_0(x_l^+[\alpha g'+(1-\alpha)g''])-\mu_0(x_l^-[\alpha g'+(1-\alpha)g'']).$$

Так как $0\leqq\alpha g'+(1-\alpha)g''$, то

$$\mu_0(x_l^+)=\mu_0(x_l^+[\alpha g'+(1-\alpha)g'']), \quad \mu_0(x_l^-[\alpha g'+(1-\alpha)g''])=0.$$

Последние два равенства выполняются только тогда, когда $g'(t)=g''(t)=1$ для почти всех t, для которых $x_l(t)>0$, и $g'(t)=g''(t)=0$ для почти всех t, для которых $x_l(t)<0$. Но это означает, что $g'=g''=g$, т. е. $l=l'=l''$. Этим доказана неразложимость l.

Из только что доказанного видно, что если $l', l''\in K_n$ и $l'\neq l''$, точка $l=\alpha l'+(1-\alpha)l''$ $(0<\alpha<1)$ — внутренняя точка K_n. Действительно, если бы l была граничной точкой K_n, то она была бы неразложимой, что невозможно.

Если в (8) имеем $0<c<1$, то функционал $l(l\neq 0)$ есть внутренняя точка K_n, так как $l(x)=c\mu_0(xg)+(1-c).0$.

Легко видеть, что, если $l\in\partial K_n$ $(l\neq 0)$ и x_l' — функция, для которой (как и для x_l) выполняется равенство $l(x_l')=\mu_0(x_l'^+)$, то имеем $\operatorname{sign} x_l'=\operatorname{sign} x_l$. Здесь $\operatorname{sign} f$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sign} f(t)=\begin{cases} 1 \text{ если } f(t)>0 \\ 0 \text{ если } f(t)=0 \\ -1 \text{ если } f(t)<0. \end{cases}$$

Действительно, из равенства $l(x_l') = \mu_0(x_l'^+)$ и из (8) следует, что $\mu_0(x_l'g) = \mu_0(x_l'^+)$ или $\mu_0(x_l'^+[1-g]) = -\mu_0(x_l'^- g) = 0$, т. е. $x_l'^+[1-g] = x_l'^+ g = 0$. Последные равенства означают, что множество $\{t \in T:\ x_l'(t) > 0\}$ совпадает (с точностью до пренебрежимого множества) с множеством $\{t \in T:\ g(t) = 1\}$, а множество $\{t \in T:\ x_l'(t) < 0\}$ совпадает с множеством $\{t \in T:\ g(t) = 0\}$. Отсюда следует, что $\operatorname{sign} x' = \operatorname{sign} x$ так как x_l и x_l' отличны от нуля почти всюду. Таким же образом доказывается, что представление (8) функционала l $(l \in \partial K_n)$ единственно в том смысле, что, если для некоторой функции g' $(0 \leq g' \leq 1)$ и любого $x \in X$ имеют место равенства

$$l(x) = \mu_0(xg) = \mu_0(xg'),$$

то $g = g'$. Чтобы убедиться в этом, положим $x = x_l$. Тогда $l(x_l) = \mu_0(x_l^+) = \mu_0(x_l g')$, откуда, как и выше, получим, что $x_l^+[1-g'] = x_l^- g' = 0$, т. е. множества $\{t \in T:\ g'(t) = 1\}$ и $\{t \in T:\ x_l(t) > 0\}$, а также множества $\{t \in T:\ x_l(t) < 0\}$ и $\{t \in T:\ g'(t) = 0\}$ совпадают почти всюду. Отсюда и из (7) видно, что $g = g'$.

Наконец, отметим, что в представлении (8) константа c и функция g определяются однозначно (g определяется с точностью до μ_0-пренебрежимого множества). Действительно, если

$$l(x) = c\mu_0(xg) = c'\mu_0(xg')$$

— два представления l, то функционал

$$l'(x) = c^{-1}l(x) = \mu_0(xg) = (c'/c)\mu_0(xg')$$

принадлежит ∂K_n. Однако, это возможно только в том случае, когда $c = c'$ так как функционал $(c'/c)\mu_0(xg')$ является внутренней точкой для K_n если $(c'/c) < 1$ и внешней — если $(c'/c) > 1$. Но, если $c' = c$, то $l'(x) = \mu_0(xg) = \mu_0(xg')$, что влечет (как мы уже показали) равенство $g = g'$. И так, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *При предположениях теоремы 1, если все отличные от нуля функции пространства X нормальны (удовлетворяют условию A), то для всякого функционала l из K_n $(l \neq 0)$ существуют такие функции $x_l \in X$ и g, где g задается равенством* (7), *что имеют место следующие утверждения.*

а) *Для любого $x \in X$ имеет место представление* (8).

б) *Если $l \in \partial K_n$, то $l(x_l) = \mu_0(x_l^+)$ и l является неразложимым элементом K_n. Если $x_l' \neq 0$ и $l(x_l') = \mu_0(x_l'^+)$, то $\operatorname{sing} x_l = \operatorname{sign} x_l'$ (здесь равенство выполняется почти всюду).*

в) *l является внутренной точкой тела K_n тогда и только тогда, когда в представлении* (8) $c < 1$.

г) *В представлении* (8) *c и g определяются однозначно (g определяется с точностью до пренебрежимого множества).*

Замечание. Если условие A не выполняется, нельзя утверждать, что функционал l имеет единственное представление вида (8). В этом можно убедиться на следующем примере. Рассмотрим случай, когда все функции $x \in X$ анулируются на множестве $T' \subset T$ μ_0 — положительной меры и определим функции g и g' равенствами

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \in T \setminus T' \\ 0 & \text{для } t \in T', \end{cases} \quad g'(t) = 1 \ \text{для } t \in T.$$

Тогда функционал $l(x) = \mu_0(xg) = \mu_0(xg'')$ очевидно имеет более чем одно представление вида (8).

Пусть как раньше Ω — действительная непрерывная функция на T, образующая линейно независимую систему вместе с функциями $x_1, \ldots, x_n$ и пусть пространство Y функций вида $y = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1}\Omega$ удовлетворяет условию A. Имеет место следующее следствие теоремы 3.

Следствие. Пусть $l' = (l'_1, \ldots, l'_n)$ фиксированная внутренняя точка тела K_n, а $\underline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}$ — наименьшее и неибольшее среди всех значений числа γ, для которых точка $l_\gamma = (l'_1, \ldots, l'_n, \gamma)$ принадлежит K_{n+1}. Тогда существуют функции $\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in X$ для которых $l_{\underline{\gamma}}(\tilde{x} - \Omega) = \mu_0([\tilde{x} - \Omega]^+)$, $l_{\overline{\gamma}}(\tilde{\tilde{x}} + \Omega) = \mu_0([\tilde{\tilde{x}} + \Omega]^+)$, а в представлении $l_{\underline{\gamma}}$ и $l_{\overline{\gamma}}$ вида (8)

$$l_{\underline{\gamma}}(y) = \mu_0(yg'), \quad l_{\overline{\gamma}}(y) = \mu_0(yg'')$$

функции g' и g'' задаются как следует

$$g'(t) = \begin{cases} 1 \text{ для } t \in \{t \in T : \tilde{x}(t) - \Omega(t) > 0\} \\ 0 \text{ для } t \in \{t \in T : \tilde{x}(t) - \Omega(t) \leqq 0\} \end{cases}, \quad g''(t) = \begin{cases} 1 \text{ для } t \in \{t \in T : \tilde{\tilde{x}}(t) + \Omega(t) > 0\} \\ 0 \text{ для } t \in \{t \in T : \tilde{\tilde{x}}(t) + \Omega(t) \leqq 0\}. \end{cases}$$

В частности, $\underline{\gamma} = \mu_0(\Omega g')$, $\overline{\gamma} = \mu_0(\Omega g'')$. Если $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in X$ и $l_{\underline{\gamma}}(\overline{x} - \Omega) = \mu_0([\overline{x} - \Omega]^+)$, $l_{\overline{\gamma}}(\overline{\overline{x}} + \Omega) = \mu_0([\overline{\overline{x}} + \Omega]^+)$, то $\operatorname{sign}(\overline{x} - \Omega) = \operatorname{sign}(\tilde{x} - \Omega)$ и $\operatorname{sign}(\overline{\overline{x}} + \Omega) = \operatorname{sign}(\overline{\overline{x}} + \Omega)$. Притом не существует $x \in X$, для которого имели бы место равенства $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign}(\tilde{x} - \Omega)$, $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign}(\tilde{\tilde{x}} + \Omega)$.

Замечание. Легко видет, что $\underline{\gamma} < \overline{\gamma}$. Действительно, так как l' — внутренняя точка K_n, то можно выбрать μ_1 и μ_2 ($\mu_1, \mu_2 \in M$) так, что $(\mu_1(x_1)), \ldots, \mu_1(x_n)) \neq (\mu_1(x_1), \ldots, \mu_2(x_n))$ и $l'_i = 2^{-1}\mu_1(x_i) + 2^{-1}\mu_2(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Но тогда точка $(l'_1, \ldots, l'_n 2^{-1}\mu_1(\Omega) + 2^{-1}\mu_2(\Omega))$ является очевидно внутренной точкой K_{n+1}. В частности $\underline{\gamma} < 2^{-1}\mu_1(\Omega) + 2^{-1}\mu_2(\Omega) < \overline{\gamma}$.

Утверждения нашего следствия получаются непосредствено из утверждений теоремы 3. Поэтому мы остановимся только на доказательстве последнего утверждения. Если бы для некоторого $x' \in X$ выполнялось равенство $\operatorname{sign} x' = \operatorname{sign}(\tilde{x} - \Omega)$, то ввиду того, что g' положительна для почти всех t, для которых $x'(t) > 0$ и имеет значение нуль для почти всех t, для которых $x'(t) \leqq 0$, мы имели бы равенства $l_{\underline{\gamma}}(x') = \mu_0(x'g') = \mu_0(x'^+) = l'(x')(l'(x') = a'_1 l'_1 + \ldots + a'_n l'_n)$, т. е. l' была бы граничная точка K_n, что невозможно.

Полученные результаты переносятся без всякого труда для непозитивных мер.

Пусть μ' и μ'' $(\mu' \prec \mu'')$ — меры на $C_R(T)$, а K_n — тело, состоящееся из точек $l(l_1, \ldots, l_n) \in R^n$, для которых $l_i = \mu(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, где μ описывает множество $M = \{\mu \in C^*_R(T) \colon \mu' \prec \mu \prec \mu''\}$. Как и прежде, через l будем обозначать как точку $(l_1, \ldots, l_n)$, так и функционал, сопоставляющий каждой функции $x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ число $l(x) = a_1 l_1 + \ldots + a_n l_n$. Дальше положим для любого $x \in X$ $\tilde{l}(x) = l(x) - \mu'(x)$ и обозначим через $\tilde{K}_n$ тело, состоящее из точек $(l_1 - \mu'(x_1), \ldots, l_n - \mu'(x_n))$. Если функции $x \in X$ удовлетворяют условию A относительно меры $\mu_0 = \mu'' - \mu'$, то для $\tilde{l}$ имеют место все утверждения теоремы 3. Это обстоятельство дает нам возможность перенести со соответствующими изменениями утверждения этой теоремы для функционала l. И так, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *При указанных выше означениях и предположениях, если функции $x \in X$ удовлетворяют условию A относительно меры $\mu_0 = \mu'' - \mu'$, то для любого порожденного мерой $\mu(\mu \succ \mu', \mu \neq \mu')$, l из K_n существуют такие функции $x_l \in X$ и g, где g задается формулой*

$$g(t)=\begin{cases}1 \text{ для } t\in\{t\in T: x_l(t)>0\}\\ 0 \text{ для } t\in\{t\in T: x_l(t)\leqq 0\},\end{cases}$$

что имеют место следующие утверждения.

а) *Существует константа* $c(0<c\leqq 1)$ *так, что для любого* $x\in X$

$$l(x)=\mu''(xcg)+\mu'(x[1-cg]). \tag{9}$$

б) *Если* $l\in\partial K_n$, *то* l — *неразложимый элемент тела* K_n *и* $l(x_l)=\mu''(x_l^+)-\mu'(x_l^-)$, *а если для некоторой функции* $x_l'\in X$ *имеем* $l(x_l')=\mu''(x_l'^+)-\mu'(x_l'^-)$, *то* μ_0 — *почти всюду будем иметь* $\operatorname{sign} x_l'=\operatorname{sign} x_l$.

в) l *является внутренней точкой тела* K_n *тогда и только тогда, когда в представлении* (9) $c<1$.

г) *Константа* c *и функция* g *в представлении* (9) *определяются однозначно* (g *определяется с точностью до* μ_0 — *пренебрежимого множества*).

Эта теорема следует непосредственно из теоремы 3 и мы не будем останавливаться на ее доказательстве. Вместо того, сформулируем без доказательства одно следствие, аналогичное следствию теоремы 3 (мы будем использовать означения этого следствия, причем $\mu_0=\mu''-\mu'$).

Следствие. Пусть $(l_1',\ldots,l_n')$ — фиксированная внутренняя точка тела K_n, а $\underline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}$ — наименьшее и наибольшее среди значений γ, для которых точка $l_\gamma=(l_1',\ldots,l_n',\gamma)$ принадлежит телу K_{n+1}. Тогда существуют такие функции $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ пространства X, для которых $l_{\underline{\gamma}}(\tilde{x}-\Omega)=\mu''([\tilde{x}-\Omega]^+)-\mu'([\tilde{x}-\Omega]^-)$ и $l_{\overline{\gamma}}(\tilde{\tilde{x}}+\Omega)=\mu''([\tilde{\tilde{x}}+\Omega]^+)-\mu'([\tilde{\tilde{x}}+\Omega]^-)$, а в представлении вида (9), именно

$$l_{\underline{\gamma}}(y)=\mu''(yg')+\mu'(y[1-g']),\quad l_{\overline{\gamma}}(y)=\mu''(yg'')+\mu'(y[1-g''])$$

функции g' и g'' задаются следующим образом

$$g'(t)=\begin{cases}1 \text{ для } t\in\{t\in T;\ \tilde{x}(t)-\Omega(t)>0\}\\ 0 \text{ для } t\in\{t\in T;\ \tilde{x}(t)-\Omega(t)\leqq 0\}\end{cases},\quad g''(t)=\begin{cases}1 \text{ для } t\in\{t\in T:\ \tilde{\tilde{x}}(t)+\Omega(t)>0\}\\ 0 \text{ для } t\in\{t\in T:\ \tilde{\tilde{x}}(t)+\Omega(t)\leqq 0\}.\end{cases}$$

В частности $\underline{\gamma}=\mu''(\Omega g')+\mu'(\Omega(1-g'])$, $\overline{\gamma}=\mu''(\Omega g'')+\mu'(\Omega[1-g''])$. Если $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ $(\bar{x},\bar{\bar{x}}\in X)$ — функции, для которых

$$l_{\underline{\gamma}}(\bar{x}-\Omega)=\mu''([\bar{x}-\Omega]^+)-\mu'([\bar{x}-\Omega]^-),\quad l_{\overline{\gamma}}(\bar{\bar{x}}+\Omega)=\mu''([\bar{\bar{x}}+\Omega]^+)-\mu'([\bar{\bar{x}}+\Omega]^-),$$

то μ_0 — почти всюду будем иметь

$$\operatorname{sign}(\bar{x}-\Omega)=\operatorname{sign}(\tilde{x}-\Omega),\quad \operatorname{sign}(\bar{\bar{x}}+\Omega)=\operatorname{sign}(\tilde{\tilde{x}}+\Omega).$$

Притом не существует $x\in X$ для которого имело бы место некоторое из равенств

$$\operatorname{sign} x=\operatorname{sign}(\tilde{x}-\Omega),\quad \operatorname{sign} x=\operatorname{sign}(\tilde{\tilde{x}}+\Omega).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Markoff. Nouvelles applications des fractions continues. *Math. Ann.*, **47**, 1896, 579-597.
2. А. Марков. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием. *Записки Акад. наук, сер. VIII*, VI, 1898, 5.
3. М Крейн. Об одном обобщении исследований акад. Маркова о предельных величинах интегралов. *Труды II Всесоюзного мат. съезда, II*. 1934, 152—154.
4. Н. Ахиезер, М. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, 1938.
5. М. Крейн. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. *Успехи мат. наук*, **6**, 1951, № 4, 3—120.
6. М. Крейн, А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.
7. S. Karlin, W. Studden. Tchebysheff Systems with Applications in Analysis and Statistics. New York, 1966.
8. Р. Едвардс. Функциональный анализ. М., 1969.
9. C. Caratheodory. Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Functionen. *Rend. Circolo Palermo*, **32**, 1911, 193—217.

Болгарская Академия Наук,
Институт математики
1090 София, п. я. 373 Болгария

Поступила 05. 01. 1989