Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЛИЕВАЯ НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ И ИДЕАЛЫ СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

А. А. БОВДИ, К. Х. КОЛИКОВ

Пусть $K_\rho^\sigma G$ — скрещенное произведение группы G и ассоциативного коммутативного кольца K при системе факторов ρ и отображении σ. В работе изучаются идеалы скрещенных произведений $K_\rho^\sigma G$, связанные с некоторой подгруппой группы G, и выясняется возможность представления факторкольца в виде скрещенного произведения. На основании этих результатов получены необходимые условия для того, чтобы каждый идеал кольца $K_\rho^\sigma G$ являлся двусторонним.

Кроме того, в работе предложен новый подход к изучению лиевых скрещенных произведений, что дает более простое доказательство и в случае групповых алгебр.

1. Введение. Пусть G — произвольная группа, а K — произвольное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Пусть заданы однозначное отображение σ группы G в группу автоморфизмов кольца K и семейство

$$\rho=\{\rho_{g,h}/g,\ h\in G\}$$

обратимых элементов кольца K, причем удовлетворяется следующее соотношение:

$$\rho_{g_1,g_2}\rho_{g_1g_2,g_3}=\rho_{g_2,g_3}^{\sigma g_1}\rho_{g_1,g_2g_3}, \tag{1}$$

для всех $\alpha\in K$ и $g_1,\ g_2,\ g_3\in G$. Семейство ρ называется системой факторов группы G над кольцом K.

Поставим в соответствие каждому элементу $g\in G$ символ t_g и рассмотрим множество $K_\rho^\sigma G$ всевозможных формальных сумм вида

$$\sum_{g\in G}\alpha_g t_g(\alpha_g\in K),$$

в которых лишь конечное число коэффициентов α_g отлично от нуля.

По определению

$$\sum_{g\in G}\alpha_g t_g=\sum_{g\in G}\beta_g t_g$$

тогда и только тогда, когда $\alpha_g=\beta_g$ для всех $g\in G$. Множество $K_\rho^\sigma G$ превращается в ассоциативное кольцо, если операции сложения и умножения определены следующим образом:

1) $\sum_{g\in G}\alpha_g t_g+\sum_{g\in G}\beta_g t_g=\sum_{g\in G}(\alpha_g+\beta_g)t_g,$

2) $t_g t_h=\rho_{g,h}t_{gh},$

3) $t_g\alpha=\alpha^{\sigma g}t_g\quad(\alpha\in K),$

а для произвольных элементов x и y из $K_\rho^\sigma G$ произведение определяется на основании закона дистрибутивности. Кольцо $K_\rho^\sigma G$ будем называть скрещенным произведением группы G и кольца K при системе факторов ρ и отображении σ.

Если σ отображает группу G на единичный автоморфизм кольца K (в этом случае будем говорить, что σ — тривиальное отображение), то скрещенное произведение называется скрещенным групповым кольцом. Если кроме того, система факторов ρ единична, т. е. $\rho_{g,h}=1$ для всех $g, h \in G$, то скрещенное произведение называется групповым кольцом, и его будем обозначать через KG.

В § 2 изучаются идеалы скрещенных произведений $K_\rho^\sigma G$, связанные с некоторой подгрупой группы G, и выясняется возможность представления факторкольца в виде скрещенного произведения. Приведенные утверждения обобщают хорошо известные факты из теории групповых колец [1]. На основании этих результатов получены необходимые условия для того, чтобы каждый идеал кольца $K_\rho^\sigma G$ являлся двусторонним. Отметим, что групповые кольца, обладающие этим свойством, описаны Миналом [2].

§ 3 посвящен вопросу о лиевой нильпотентности скрещенных произведений. Пасси, Пассман и Сегал [3] на основании результатов о строении групповых алгебр с полиномиальным тождеством описали строение лиево нильпотентных групповых алгебр. Однако их метод доказательства не применим к скрещенным произведениям. Используя результат Дженнингса [4], в работе предложен новый подход к изучению лиевых скрещенных произведений, что дает более простое доказательство и в случае групповых алгебр.

2. Идеалы скрещенных произведений. Пусть $K_\rho^\sigma G$ — скрещенное произведение группы G и кольца K. Тогда $\rho_{1,1}^{-1}t_1$ — единичный элемент кольца $K_\rho^\sigma G$, и, переходя к эквивалентной системе факторов, можно считать, что $\rho_{1,1}=1$.

Для каждого скрещенного произведения $K_\rho^\sigma G$ обозначим

$$W(G)=\{w \in G / t_w t_g = t_{wg} \text{ и } t_g t_w = t_{gw} \text{ для всех } g \in G\}$$
$$=\{w \in G / \rho_{w,g}=\rho_{g,w}=1 \text{ для всех } g \in G\}.$$

Так как $\rho_{1,g}=\rho_{1,1}=1$ и $\rho_{g,1}=\rho_{1,1}^{\sigma g}=1$, то множество $W(G)$ содержит единицу группы G.

Лемма 1. *Если $K_\rho^\sigma G$ скрещенное произведение, то подмножество $W=W(G)$ — является подгруппой группы G.*

Доказательство. Пусть $w, v \in W$ и $g \in G$. Тогда

$$t_{wv}t_g = t_w t_v t_g = t_w t_{vg} = t_{wvg}.$$

Аналогично устанавливается, что $t_g t_{wv} = t_{gwv}$, и поэтому $wv \in W$.

Остается доказать, что $w^{-1} \in W$ для любого $w \in W$.

Пусть $w \in W$ и $g \in G$. Так как $t_g^{-1} = t_{g^{-1}} \rho_{g,g^{-1}}^{-1}$ и $\rho_{w^{-1},w}^{-1}=1$, то

$$t_{w^{-1}} t_g = (t_g^{-1} t_w)^{-1} = [(\rho_{g,g^{-1}}^{-1})^{\sigma g^{-1}} t_{g^{-1}} t_w]^{-1} = t_{g^{-1}w}^{-1} \rho_{g,g^{-1}}^{\sigma g^{-1}} = t_{w^{-1}g} \rho_{g^{-1}w,w^{-1}g}^{-1} \rho_{g,g^{-1}}^{\sigma g^{-1}}.$$

Но из (1) следует, что

$$\rho_{g^{-1}w,w^{-1}g}^{-1} = \rho_{g^{-1},g}^{-1} (\rho_{w,w^{-1}g}^{\sigma g^{-1}})^{-1} \rho_{g^{-1},w},$$

а так как $\rho_{g,g^{-1}}^{\sigma g^{-1}} = \rho_{g^{-1},g}$ и $\rho_{g^{-1},w} = \rho_{w,w^{-1}g} = 1$, то $\rho_{g^{-1}w,w^{-1}g}^{-1} \rho_{g,g^{-1}}^{\sigma g^{-1}} = 1$.

Следовательно, $t_{w^{-1}}t_g=t_{w^{-1}g}$. Аналогично доказывается, что $t_g t_{w^{-1}}=t_{gw^{-1}}$, и поэтому $w^{-1}\in W$. Лемма доказана.

Пусть S — подгруппа группы $W(G)$. Тогда подмножество

$$I_l(S)=\{\sum_{s\in S} x_s(t_s-t_1)/x_s\in K_\rho^\sigma G\}$$

является левым идеалом кольца $K_\rho^\sigma G$, порожденным элементами вида $t_s-t_1 (s\in S)$.

Если $\Pi(G/S)=\{u\}$ — полная система представителей левых смежных классов группы G по подгруппе S и g произвольный элемент из G, то $g=us'$ для некоторого $u\in\Pi(G/S)$ и $s'\in S$. Тогда из $S\subseteq W(G)$ следует, что

$$t_g(t_s-t_1)=t_u(t_{s's}-t_1)-t_u(t_{s'}-t_1)$$

для каждого $s\in S$, и поэтому элементы вида

$$t_u(t_s-t_1)\ (u\in\Pi(G/S),\ s\in S)$$

образуют базис K—модуля $I_l(S)$.

Аналогичным образом определяем правый идеал

$$I_r(S)=\langle t_s-t_1/s\in S\rangle.$$

Лемма 2. *Левый аннулятор L правого идеала $I_r(S)$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда S конечная подгруппа, и в этом случае*

$$L=K_\rho^\sigma G\sum_{s\in S} t_s.$$

Доказательство. Элемент y принадлежит L тогда и только тогда, когда $y(t_w-t_1)=0$ для всех $w\in S$. Пусть y ненулевой элемент из L. Тогда y можно представить в виде

$$y=\sum_{u\in\Pi(G/S)} x_u t_u (x_u\in K^\sigma S).$$

Если $x_u=\sum_{s\in S}\alpha_s^{(u)}t_s$, то из равенства $yt_w=y$ следует, что

$$\sum_{s\in S}\alpha_s^{(u)}t_{sw}=\sum_{s\in S}\alpha_s^{(u)}t_s$$

для всех $w\in S$. Однако это влечет за собой конечность подгруппы S, так как в левой части равенства встречаются все элементы группы S. Более того, мы можем подобрать w так, чтобы sw совпадал с наперед заданным элементом группы S. Поэтому в записи элемента x_u все коэффициенты $\alpha_s^{(u)}$ равны, и элемент y имеет вид

$$y=z(\sum_{s\in S} t_s),$$

где z — произвольный элемент из $K_\rho^\sigma G$.

Лемма 3. *Если S — конечная подгруппа группы G и $S\subseteq W$, то левый аннулятор элемента $\widehat{S}=\sum_{s\in S} t_s$ совпадает с $I_l(S)$.*

Доказательство. Очевидно, что левый идеал $I_l(S)$ содержится в аннуляторе L элемента $\widehat{S}$.

Пусть y ненулевой элемент из L. Тогда y можно представить в виде

$$y=\sum_{u\in\Pi(G/S)} t_u z_u\quad (z_u\in K^\sigma S),$$

и в силу равенства

$$0=y\widehat{S}=\sum_{u\in\Pi(G/S)} t_u z_u \widehat{S}$$

имеем, что $z_u\widehat{S}=0$ для всех u. Кроме того, если

$$z=\sum_{s\in S}\alpha_s^{(u)}t_s,$$

то

$$z_u\widehat{S}=(\sum_{s\in S}\alpha_s^{(u)})\widehat{S}.$$

Отсюда $\sum\limits_{s\in S}\alpha_s^{(u)}=0$ и

$$z_u=\sum_{s\in S}\alpha_s^{(u)}(t_s-t_1)\in I_l(S).$$

Следовательно, $y\in I_l(S)$.

Если $x=\sum\limits_{g\in g}\alpha_g t_g\in K_\rho^\sigma G$, то подмножество

$$\operatorname{Supp} x=\{g\in G/\alpha_g\neq 0\}$$

называется носителем элемента x, а число элементов $\operatorname{Supp} x$ — длина x.

Пусть $\operatorname{Ker}\sigma=\{g\in G/\sigma g=1\}$ — ядро отображений σ.

Лемма 4. *Левый идеал $I_l(S)$ является двусторонним тогда и только тогда, когда S нормальная подгруппа группы G, которая принадлежит ядру отображения σ.*

Доказательство. Пусть $I_l(S)$ двусторонний идеал скрещенного произведения $K_\rho^\sigma G$. Если $\alpha\in K$ и $s\in S$, то

$$(t_s-t_1)\alpha\in I_l(S),$$

и тогда

$$(t_s-t_1)\alpha-\alpha^{\sigma s}(t_s-t_1)=(\alpha^{\sigma s}-\alpha)t_1\in I_l(S).$$

Но из существования вышеуказанного K—базиса идеала $I_l(S)$ следует, что элемент $(\alpha^{\sigma s}-\alpha)t_1$ принадлежит $I_l(S)$ только в том случае, когда $\alpha^{\sigma s}=\alpha$, и поэтому $S\subseteq\operatorname{Ker}\delta$. Элемент $(t_s-t_1)t_g$ принадлежит $I_l(S)$ для всех $g\in G$, и его можно представить в виде

$$(t_s-t_1)t_g=t_{u_1}x_1+t_{u_2}x_2+\ \dots\ +t_{u_k}x_k,$$

где $u_i\in\Pi(G/S)$ и $x_i\in KS$. Тогда длина элемента x_i не менее 2, и при $i\neq j$ $\operatorname{Supp} t_{u_i}x_i$ и $\operatorname{Supp} tu_jx_j$ (2) лежат в различных левых смежных классах по подгруппе S. Поэтому правая часть (2) может иметь длину 2 лишь при условии, что $k=1$ и $x_1=\alpha_1 t_{s_1}+\alpha_2 t_{s_2}$. Сравнивая элементы в (2), получим $g^{-1}sg\in S$. Следовательно, $S\triangle G$.

Обратно, пусть $S\triangleleft G$ и $S\subseteq\operatorname{Ker}\sigma$. Если $g\in G$, $s\in S$ и $\alpha\in K$, то

$$\alpha t_g(t_s-t_1)=\alpha(\rho_{gs,g^{-1}}\rho^{-1}_{g,g^{-1}}t_{gsg^{-1}}-t_1)t_g.$$

Так как $S\triangleleft G$, то $gs=s'g$ для некоторого $s'\in S$ и $\rho_{s',g}=1$ для всех $g\in G$. Тогда в силу соотношения (1)

$$\rho_{s'g,g^{-1}}\rho^{-1}_{g,g^{-1}}=\rho_{s'1}=1.$$

Следовательно,

$$\alpha t_g(t_s-t_1)=(t_{gsg^{-1}}-t_1)\alpha t_g.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 5. *Пусть* $S \subseteqq W(G)$ *и* $S \lhd G$. *Если* $g_i, g_j \in G$ *и* $g_i = u_i s_i$, $g_j = u_j s_j$ $(u_i, u_j \in \Pi(G/S))$, *то* $\rho_{g_i, g_j} = \rho_{u_i, u_j}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению подгруппы W, $\rho_{g,s} = \rho_{s,g} = 1$ для всех $g \in S$ и $s(-S)$. Поэтому на основании (1) получим, что

$$\rho_{u_i s_i, u_j s_j} = \rho^{-1}_{u_i, s_i} \rho^{\sigma u_i}_{s_i, u_j s_j} \rho_{u_i, s_i u_j s_j} = \rho_{u_i\, s_i u_j s_j}.$$

Так как существует такой элемент $s \in S$, что $s_i u_j s_j = u_j s$, то

$$\rho_{u_i, s_i u_j s_j} = \rho_{u_i, u_j s} = (\rho^{\sigma u_i}_{u_j, s})^{-1} \rho_{u_i, u_j} \rho_{u_i u_j, s} = \rho_{u_i, u_j}.$$

Следовательно, $\rho_{g_i, g_j} = \rho_{u_i, u_j}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* S *нормальная подгруппа группы* G *и* $S \subseteqq W(G) \cap \operatorname{Ker} \sigma$, *Тогда* $I_l(S)$ *двусторонний идеал и*

$$K^{\sigma}_{\rho} G / I_l(S) \cong K^{\overline{\rho}}_{\overline{\sigma}}(G/S),$$

где $\overline{\sigma}(u_i, S) = \sigma u_i$ и $\overline{\rho}_{u_i S, u_j S} = \rho_{u_i, u_j}$ $(u_i, u_j \in \Pi(G/S))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $S \subseteqq \operatorname{Ker} \sigma$, то σ индуцирует гомоморфизм $\overline{\sigma}$ фактор-группы G/S в группу автоморфизмов кольца K. Кроме того, в силу леммы 5, однозначно определяется элемент

$${}_{\overline{u}_i, \overline{u}_j} = \rho_{u_i, u_j},$$

где $\overline{u}_i = u_i S$, $\overline{u}_j = u_j S (u_i, u_j \in \Pi(G/S))$. Тогда

$$\overline{\rho} = \{\rho_{\overline{u}_i, \overline{u}_j} / \overline{u}_i, \overline{u}_j \in G/S\}$$

система факторов группы G/S над кольцом K. Поэтому можно образовать скрещенное произведение $K^{\overline{\sigma}}_{\overline{\rho}}(G/S)$.

Если φ естественный гомоморфизм группы G на факторгруппу G/S, то отображение

$$\widetilde{\varphi}(\sum_{g \in G} \alpha_g t_g) = \sum_{g \in G} \alpha_g t_{\varphi(g)}$$

является кольцевым гомоморфизмом кольца $K^{\sigma}_{\rho} G$ на кольцо $K^{\overline{\sigma}}_{\overline{\rho}}(G/S)$, ядро которого совпадает с $I_l(S)$. Последнее утверждение доказывается так же, как в теории групповых колец.

Множество всех внутренних автоморфизмов кольца $K^{\sigma}_{\rho} G$ вида

$$T(g): x \to t_g^{-1} x t_g \quad (g \in G,\ x \in K^{\sigma}_{\rho} G),$$

обозначается через $T(G)$.

Очевидно, что каждый двусторонний идеал кольца $K^{\sigma}_{\rho} G$ является $T(G)$—инвариантным.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $K^{\sigma}_{\rho} G$ — *скрещенное произведение группы* G *и поля* K *и ядро* H *отображения* σ *содержится в подгруппе* W. *Если в кольце* $K^{\sigma}_{\rho} G$ *каждый идеал является двусторонним, то*:

1) *$H=W$ и каждая подгруппа подгруппы H нормальна в G;*

2) *Факторкольцо $K_\rho^\sigma G/I_l(H)$ — тело;*

3) *Каждый идеал групповой алгебры KH является двусторонним и инвариантным относительно автоморфизмов из подмножества $T(G)$.*

Доказательство. Пусть каждый идеал кольца $K_\rho^\sigma G$ является двусторонним и S — произвольная подгруппа группы W. Тогда левый идеал $I_l(S)$ кольца $K_\rho^\sigma G$ есть двусторонний идеал и, в силу леммы 4, подгруппа S нормальна и содержится в ядре H отображения σ. В частности, $W\subseteq H$ и из $H\subseteq W$ следует, что $H=W$. Условие 1) доказано.

Дальше, из теоремы 1 имеем, что

$$K_\rho^\sigma G/I(H)\cong K_{\bar\rho}^{\bar\sigma}(G/H).$$

Известно [5], что кольцо $K_{\bar\rho}^{\bar\sigma}(G/H)$ простое. Так как в кольце $K_{\bar\rho}^{\bar\sigma}(G/H)$ каждый идеал является двусторонним, то $K_\rho^\sigma G/I(H)$ — тело с которым мы доказали условие 2).

Наконец, пусть L левый идеал кольца KH. Тогда

$$J=\{\sum_{u\in\Pi(G/H)} t_u x_u / x_u\in L\}$$

есть левый идеал кольца $K_\rho^\sigma G$, и поэтому в силу предположения, идеал J двусторонний. Так как

$$J\cap KH=L$$

и H нормальная подгруппа в группе G, то L двусторонний идеал кольца KH и инвариантен относительно автоморфизмов из $T(G)$.

3. Лиевая нильпотентность скрещенных произведений. Каждое ассоциативное кольцо R можно превратить в лиево кольцо $\mathfrak{R}$, если в качестве умножения взять операцию коммутирования

$$[x,\ y]=xy-yx\ (x,\ y\in R),$$

а операцию сложения оставить прежней. Полученное кольцо $\mathfrak{R}$ называется присоединенным лиевым кольцом.

Лиево кольцо $\mathfrak{R}$ называется нильпотентным класса γ, если

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\supset\mathfrak{R}_2\supset\ \dots\ \supset\mathfrak{R}_\gamma\supset\mathfrak{R}_{\gamma+1}=0, \tag{3}$$

где $\mathfrak{R}_k=[\mathfrak{R},\ \mathfrak{R}_{k-1}]$ взаимный лиевый коммутант, который порождается элементами вида $[x,\ y]$, $x\in\mathfrak{R}$, $y\in\mathfrak{R}_{k-1}$.

Кольцо R называется лиево нильпотентным класса γ, если его присоединенное лиево кольцо $\mathfrak{R}$ нильпотентно класса γ.

Обозначим через R_k — идеал в R, порожденный элементами k-ого члена $\mathfrak{R}_k$ из (3).

При изучении лиевой нильпотентности скрещенных произведений важную роль играет следующая

Теорема Дженнингса [4]. Если R лиево нильпотентное кольцо, то коммутаторы $[x,\ y]$ $(x,\ y\in R)$ порождают ниль-идеал R_2, а элементы вида $[[x,\ y],\ z]$ порождают нильпотентный идеал R_3 кольца R.

Лемма 6. *Если скрещенное произведение $K_\rho^\sigma G$ группы G и коммутативного кольца K без нильпотентных элементов лиево нильпотентно, то σ — тривиальное отображение.*

Доказательство. Если $\alpha\in K$ и $g\in G$, то

$$[\alpha t_1,\ t_g] = \alpha t_g - t_g\alpha = (\alpha - \alpha^{\sigma g}) t_g \in R_2.$$

Так как R_2 — идеал, то $(\alpha - \alpha^{\sigma g}) \in R_2$, и в силу теоремы Дженнингса элемент $\alpha - \alpha^{\sigma g}$, нильпотентен. В кольце K без нильпотентных элементов это возможно только в случае, когда $\alpha^{\sigma g} = \alpha$ для всех $g \in G$ и $\alpha \in K$. Следовательно, σ тривиальное отображение.

Лемма 7. *Пусть K — кольцо характеристики $p>0$ и $p \neq 2$. Если скрещенное произведение $K_\rho^\sigma G$ лиево нильпотентно, то коммутант G' группы G является конечно порожденной FC-группой.*

Доказательство. Если $R = K_\rho^\sigma G$, то в силу теоремы Дженнингса идеал R_3 нильпотентен и обладает ненулевым аннулятором. Очевидно, элемент

$$[[t_g,\ t_h],\ t_h^{-1}] \in R_3,$$

и существует такой фиксированный элемент x из аннулятора R_3, что

$$[[t_g,\ t_h],\ t_h^{-1}]x = 0$$

для всех $g, h \in G$. Тогда

$$((t_g t_h - t_h t_g)t_h^{-1} - t_h^{-1}(t_g t_h - t_h t_g))x = 0$$

и поэтому

$$(2t_g - t_h t_g t_h^{-1} - t_h^{-1} t_g t_h)x = 0.$$

Умножив это равенство слева на t_g^{-1}, получим

(4) $$(t_{g^{-1}} t_h t_g t_h^{-1} + t_g^{-1} t_h^{-1} t_g t_h)x = 2x.$$

Так как $t_g^{-1} = t_{g^{-1}} \rho_{g,g^{-1}}^{-1} \rho_{1,1}^{-1}$, то из (4) следует, что

(5) $$(\varepsilon_1 t_{g^{-1}hgh^{-1}} + \varepsilon_2 t_{g^{-1}h^{-1}gh}),\ x = 2x,$$

где ε_1 и ε_2 обратимые элементы кольца K.

Пусть

$$x = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i t_{u_i}\ (\alpha_i \in K).$$

Тогда, в силу (5), существуют такие t_{u_i}, t_{u_j}, что

(6) $$\beta_1 t_{g^{-1}hgh^{-1}} \alpha_i t_{u_l} = 2\alpha_j t_u$$

для некоторого $\beta_1 \in K$ или

(7) $$\beta_2 t_{g^{-1}h^{-1}gh} \alpha_i t_{u_l} = 2\alpha_j t_u$$

для которого $\beta_2 \in K$.

Действительно, если такие t_{u_i} и t_{u_j} не существуют, то из (5) вытекает $2x = 0$, что невозможно.

Сравнивая элементы группы G в равенствах (6) и (7), мы получаем

$$g^{-1}hgh^{-1} = u_j u_i^{-1}$$

или

$$g^{-1}h^{-1}gh = u_j u_i^{-1}.$$

Следовательно, число коммутаторов группы G конечно и коммутант G' — конечно порожденная группа.

Аналогично доказывается, что для каждого $s \in G$

$$s^{-1}(g^{-1}hgh^{-1})s = u_j u_i^{-1}$$

или

$$s^{-1}(g^{-1}h^{-1}gh)s = u_j u_i^{-1}$$

и, следовательно, G' является FC-подгруппой.

Пусть $K_\rho G$ — скрещенное групповое кольцо группы G над полем K. Система факторов $\bar{\rho}$ группы G над полем K называется эквивалентной системой факторов ρ, если существует множество элементов

$$\{\delta_g \in K \setminus \{0\} / g \in G\},$$

которые удовлетворяют условию

$$\bar{\rho}_{g_1,g_2} = \delta_{g_1}\delta_{g_2}\delta_{g_1,g_2}^{-1}\ \rho_{g_1,g_2}.$$

Система факторов ρ группы G над полем K называется нормированной, если $\rho_{g,1} = \rho_{1,g} = 1$ для всех $g \in G$. Очевидно, что любая система факторов группы G над K эквивалентна некоторой нормированной системе факторов группы G. В дальнейшем будем предполагать, что система факторов группы G над K нормирована.

Т е о р е м а 3. *Пусть K — поле характеристики $p \geqq 0$ и G — такая группа, что ее максимальная FC-подгруппа $\Delta(G)$ не содержит элементов второго порядка, когда $p=2$. Тогда скрещенное произведение $K_\rho^\sigma G$ — лиево нильпотентное кольцо тогда и только тогда, когда σ — тривиальное отображение и выполняется одно из следующих условий:*

1) *Если p не делит порядок ни одного элемента из группы $\Delta(G)$, то группа G — абелева и система факторов симметрическая.*

2) *Если p делит порядок некоторого элемента из $\Delta(G)$, то группа G нильпотентна и ее коммутант является конечной p-группой, а система факторов ρ удовлетворяет соотношению*

$$(\rho_{g,h}\rho^{-1}_{h,h^{-1}gh}\ \rho^{-1}_{g,g^{-1}\ h^{-1}gh})^{p^t}\prod_{k=1}^{p^t-1}\rho_{(g^{-1}\ h^{-1}gh)^k,g^{-1}\ h^{-1}gh} = 1 \tag{8}$$

для всех g, $h \in G$, где p^t — порядок элемента $g^{-1}h^{-1}gh$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть кольцо $K_\rho^\sigma G$ лиево нильпотентно. Тогда, по лемме 6, σ — тривиальное отображение и $K_\rho G$ — скрещенное групповое кольцо.

Сначала рассмотрим случай, когда характеристика поля K не делит порядок ни одного элемента группы $\Delta(G)$. Тогда, согласно теореме 3.5. из [6], кольцо $K_\rho G$ не содержит нильпотентных идеалов, По теореме Дженнингса, идеал R_3 кольца $R = K_\rho G$ нильпотентен, а R_2 — ниль-идеал. Таким образом $R_3 = 0$ и, следовательно, ниль-идеал R_2 содержится в центре кольца $K_\rho G$, и представим в виде объединения нильпотентных идеалов. Поэтому $R_2 = 0$ и

$$t_g t_h - t_h t_g = 0$$

для всех $g, h \in G$. Следовательно, $K_\rho G$ коммутативное кольцо и система факторов симметрическая.

Пусть сейчас характеристика p поля K делит порядок некоторого элемента из $\Delta(G)$ и $p \neq 2$. Так как $[t_g, t_h] \in R_2$, то элемент $t_g^{-1}t_h^{-1}t_g t_h - t_1$ есть нильпотентный. Если его индекс нлиьпотентности m и

$$t_g^{-1}\,t_h^{-1}t_g t_h = \alpha t_{g^{-1}h^{-1}gh},$$

то для каждого $p^l \geqq m$ выполняется равенство

$$(\alpha t_{g^{-1}h^{-1}gh} - t_1)^{p^l} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(\alpha t_{g^{-1}h^{-1}gh})^{p^l} = t_1.$$

Следовательно, $g^{-1}h^{-1}gh$ является p-элементом. Если p^t — его порядок, то

$$(\alpha t_{g^{-1}h^{-1}gh} - t_1)^{p^t} = (\alpha^{p^t}\beta - 1)t_1,$$

и элемент $\alpha^{p^t}\beta - 1$ нильпотентен. Это возможно только, когда $\alpha^{p^t}\beta = 1$. Но

$$\alpha = \rho^{-1}_{g,g^{-1}}\,\rho^{-1}_{h,h^{-1}}\,\rho_{g^{-1},h^{-1}}\,\rho_{g^{-1}h^{-1},g}\,\rho_{g^{-1}h^{-1}g,h} = \rho_{g,h}\rho^{-1}_{h,h^{-1}gh}\,\rho^{-1}_{g,g^{-1}h^{-1}gh},$$

а

$$\beta = \prod_{k=1}^{p^t-1} \rho_{(g^{-1}h^{-1}gh)^k,\,h^{-1}g^{-1}gh}.$$

Так мы установили условие (8). Кроме того, мы получили, что каждый коммутатор группы G является p-элементом и, в силу леммы 7 и леммы Дитцмана коммутант группы G — конечная p-группа.

Дальше, мы покажем, что группа G нильпотентна, чем будет завершено доказательство условия 2), а с ним и необходимость теоремы.

Для этой цели мы будем использовать равенство

$$[\ldots[[t_g,\ t_h],\ t_h],\ldots,\ t_h]$$
$$= t_g t_h^n - \binom{n}{1} t_h t_g\, t_h^{n-1} + \binom{n}{2} t_h^2 t_g t_h^{n-2} - \ldots + (-1)^n\, t_h^n\, t_g,$$

которое доказывается индукцией по числу n.

Пусть γ — степень лиевой нильпотентности кольца $K_\rho G$ и $p^r \geqq \gamma$. Тогда

$$[\ldots[[t_g,\ \underbrace{t_h],\ t_h],\ldots,\ t_h}_{r}] = 0,$$

что влечет

$$t_g\, t_h^{p^r} - t_h^{p^r} t_g = 0.$$

Поэтому

$$\omega t_{gh^{p^r}} - t_{h^{p^r}g} = 0$$

для некоторых ненулевых элементов w и v кольца K. Следовательно, $gh^{p^r} = h^{p^r}g$ для всех $g,\ h \in G$ и элемент h^{p^r} принадлежит центру $Z(G)$ группы G. Так как p^r — фиксированное число и $h^{p^r} \in Z(G)$ для всех $h \in G$, то фактор-группа $G/Z(G)$ является p-группой. Тогда известно [3], что группа G нильпотентна.

Таким образом, получены необходимые условия лиевой нильпотентности скрещенных произведений. Докажем, что эти условия достаточны.

Пусть $\bar{K}$ — алгебраическое замыкание поля K. Тогда $K_\rho G$ — подкольцо $\bar{K}_\rho G$, и, очевидно, достаточно доказать лиевую нильпотентность кольца $\bar{K}_\rho G$. Доказательство проведем методом индукции по порядку коммутанта G' группы G.

Если $|G'|=1$, то из условий (8) следует, что $\rho_{g,h}=\rho_{h,g}$, и поэтому коммутативное кольцо $\bar{K}_\rho G$ лиево нильпотентно.

Пусть $|G'|>1$. Так как G — нильпотентная группа, коммутант которой является конечной p-группой, то подгруппа $G'\cap Z(G)$ обладает элементом z порядка p.

Ясно, что

$$t_z^p=\delta t_1,$$

где $\delta=\rho_{z,z}\rho_{z^2,z}\ldots\rho_{z^{p-1},z}$.

Пусть $S=\langle z\rangle$ — циклическая подгруппа группы G, порожденная элементом z, образуем новый базис $\{\tilde{t}_g\}$ скрещенного группового кольца $\bar{K}_\rho G$ следующим образом:

$$\tilde{t}_g=\begin{cases} t_g, & \text{если } g\in G\setminus S;\\ (\sqrt[p]{\sigma^{-1}t_z})^n, & \text{если } g=z^n\in S.\end{cases}$$

Тогда

$$\tilde{t}_{z^l}\tilde{t}_{z^n}=(\sqrt[p]{\sigma^{-1}}t_z)^{l+n}=\tilde{t}_{z^{l+n}}$$

и, кроме того,

$$\tilde{t}_{z^p}=t_{z^p}=t_1.$$

Таким образом, система факторов ρ эквивалентна системе факторов $\tilde{\rho}$, для которой

$$\tilde{\rho}_{z^l,z^n}=1,$$

где l и n — произвольные целые числа.

Пусть $\Pi(G/S)=\{u\}$ — полная система представителей смежных классов группы G по подгруппе S. Определим новый базис $\{\bar{t}_g\}$ кольца $\bar{K}_{\tilde{\rho}}G$ по формуле

$$\bar{t}_g=\tilde{\rho}_{s',u}\tilde{t}_g,$$

где $g=s'u$ $(u\in\Pi(G/S))$. Тогда $\bar{t}_{s'}=\tilde{t}_{s'}$ для всех $s'\in S$ и, если $s\in S$, то

$$\bar{\rho}_{s,g}\bar{t}_{sg}=\bar{t}_s\bar{t}_{s'u}=\tilde{t}_s\tilde{t}_{s'}\tilde{t}_u=\tilde{\rho}_{ss',u}\tilde{t}_{sg}=\bar{t}_{sg}. \tag{9}$$

Докажем, что для всех $s\in S$ элемент $\bar{t}_s$ принадлежит центру кольца $\bar{K}_{\bar{\rho}}G$. Действительно, так как $s\in Z(G)$, то, в силу условия (8),

$$\rho_{g,s}=\rho_{s,g}$$

для всех $g\in G$. Поэтому, если $s=z^n$ и $g=z^lu$ $(u\in\Pi(G/S))$, то из $t_st_g=t_gt_s$ получаем, что

$$\bar{t}_s\bar{t}_g=\tilde{t}_{z^n}t_{z^l}\tilde{t}_u=(\sqrt[p]{\delta^{-1}}\,t_z)^n\,(\sqrt[p]{\delta^{-1}}\,t_z)^l\,t_u$$

$$=(\sqrt[p]{\delta^{-1}}\,t_z)^l t_u(\sqrt[p]{\delta^{-1}}\,t_z)^n=\bar{t}_g\bar{t}_s.$$

Следовательно, $\overline{t}_s \in Z(\overline{K_{\rho}}G)$ и, в силу (9)

$$\overline{\rho}_{g,s}=\overline{\rho}_{s,g}=1$$

для всех $g \in G$. Поэтому из теоремы 1 следует, что

$$\overline{K_{\rho}}G/I(S)\cong \overline{K_{\rho}}(G/S).$$

Дальше мы покажем, что система факторов $\overline{\rho}$ удовлетворяет условию (8). Очевидно, это верно, если $g \in S$ или $h \in S$, так как $z \in Z(G)$.

Пусть $g, h \in G \setminus S$. Тогда $g=s_1u_1$, $h=s_2u_2$, а $gh=s_3u_3$, где $u_1, u_2, u_3 \in \Pi(G/S)$, и

$$\overline{\rho}_{g,h}\overline{t}_{gh}=\overline{t}_g\overline{t}_h=\widetilde{\rho}_{s_1,u_1}\widetilde{\rho}_{s_2,u_2}\widetilde{t}_g\widetilde{t}_h=\widetilde{\rho}_{s_1,u_1}\widetilde{\rho}_{s_2,u_2}\widetilde{\rho}_{g,h}\widetilde{\rho}^{-1}_{s_3,u_3}\overline{t}_{gh}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\rho}_{g,h}=\widetilde{\rho}_{g,h}\widetilde{\rho}_{s_1,u_1}\widetilde{\rho}_{s_2u_2}\widetilde{\rho}^{-1}_{s_3,u_3}.$$

Поэтому, если $g^{-1}h^{-1}gh=su$, то

$$\overline{\rho}_{g,h}\overline{\rho}^{-1}_{h,h^{-1}gh}\overline{\rho}^{-1}_{g,g^{-1}h^{-1}gh}=\widetilde{\rho}_{g,h}\widetilde{\rho}_{h,h^{-1}gh}\widetilde{\rho}_{g,g^{-1}h^{-1}gh}\widetilde{\rho}^{-1}_{s,u}.$$

Кроме того, если $(g^{-1}h^{-1}gh)^k=s^{(k)}u^{(k)}$ $(u^{(k)}\in \Pi(G/S))$, то легко устанавливается равенство

$$\prod_{k=1}^{p^t-1}\overline{\rho}_{(g^{-1}h^{-1}gh)^k,g^{-1}h^{-1}gh}=\prod_{k=1}^{p^t-1}\rho_{(g^{-1}h^{-1}gh)^k,g^{-1}h^{-1}gh}(\widetilde{\rho}_{s,u})^{p^t}.$$

Следовательно,

$$(\overline{\rho}_{g,h}\overline{\rho}^{-1}_{h,h^{-1}gh}\overline{\rho}^{-1}_{g,g^{-1}h^{-1}gh})^{p^t}\prod_{k=1}^{p^t-1}\overline{\rho}_{(g^{-1}h^{-1}gh)^k,g^{-1}h^{-1}gh}$$

$$=(\widetilde{\rho}_{g,h}\widetilde{\rho}^{-1}_{h,h^{-1}gh}\widetilde{\rho}^{-1}_{g,g^{-1}h^{-1}gh}\widetilde{\rho}^{-1}_{s,u})^{p^t}\widetilde{\rho}^{p^t}_{s,u}\prod_{k=1}^{p^t-1}\widetilde{\rho}_{(g^{-1}h^{-1}gh)^k,g^{-1}h^{-1}gh},$$

и так как из $z \in Z(G)$ следует, что система факторов $\widetilde{\rho}$ удовлетворяет (8), то и система факторов $\overline{\rho}$ удовлетворяет условию (8).

Тогда, так как порядок коммутанта фактор-группы G/S меньше, чем порядок коммутанта G', то, в силу индуктивного предположения, кольцо $\overline{K_{\rho}}(G/S)$ лиево нильпотентно. Поэтому для некоторого γ идеал R_{γ} кольца $R=\overline{K_{\rho}}G$ содержится в $I(S)$. Так как $\overline{t}_z-\overline{t}_1 (z \in S)$ — центральный элемент и $(\overline{t}_z-\overline{t}_1)^p=0$, то

$$R_{\gamma p}\subseteq (I(S))^p=\overline{K_{\rho}}G(\overline{t}_z-\overline{t}_1)^p=0.$$

Это означает, что $R_{\gamma p}=0$ и, следовательно, кольцо $\overline{K_{\rho}}G$ лиево нильпотентно.

Следствие. Если K — поле характеристики $p\geq 0$ и G — абелева группа, которая не содержит элементы второго порядка при $p=2$, то скрещенное произведение $K^{\sigma}_{\rho}G$ — лиево нильпотентно тогда и только тогда, когда σ — тривиальное отображение, а система факторов симметрическая.

Действительно, если G не содержит p-элементов, то утверждение следует из условий 1) теоремы 3. А если G содержит p-элементы, то симметричность системы факторов следует из условий (8), так как $\rho_{g,1}=1$ для всех $g \in G$, и в этом случае $p^t=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Бовди. Групповые кольца. Ужгород (изд. УжГУ), 1974.
2. P. Menal. Group rings in which every left ideal is a right ideal. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **76**, 1979, 204-208.
3. S. K. Sehgal. Topics in Group Rings, New York, 1978.
4. S. A. Jennings. On rings whose associated Lie rings are nilpotent. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**, 1947, 593-597.
5. А. А. Бовди. Скрещенные произведения полугруппы и кольца. *Сиб. Мат. ж.*, **4**, 1963, 481—499.
6. S. Montgomery, D. S. Passman. Prime ideals in crossed products of finite groups. *Israel J. Math.*, **31**, 1978, 224-256.

СССР, г. Ужгород
Ужгородский гос. у-т
Мат. факультет
Пловдив
ПУ „П. Хилендарски“
Мат. факультет

Поступила 14. 05. 1985 г.