Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГРУППЫ ГРИГОРЧУКА И ЕЕ ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВА

ГЕОРГИ К. ГЕНОВ, ПЛАМЕН Н. СИДЕРОВ

Вопрос о существовании периодических конечнопорожденных бесконечных групп (групп бернсайдовского типа), известный как общая или неограниченная проблема Бернсайда, оставался долгое время открытым. Первые примеры таких групп были построены Е. С. Голодом в 1964 году в его работе [1]. Другая конструкция групп бернсайдовского типа была найдена С. В. Алёшиным в 1972 году [3]. В эту конструкцию вписывается (см., например, [9, § 23]) и отдельный пример 3-порожденной бесконечной 2-группы, построенной Р. И. Григорчуком в работе [5]. Эта группа (обозначаемая всюду далее через G) и ее групповая алгебра над полем характеристики 2 являются объектами изучения настоящей статьи.

В работах [6] и [7] Р. И. Григорчук обобщил свою конструкцию и получил обширное семейство групп бернсайдовского типа с интересными свойствами. Повышенный интерес к группам бернсайдовского типа приводит уже к быстрому наращиванию числа разных конструкций таких групп ([2, 4, 8, 10, 11]). Но на наш взгляд, до сих пор группа Григорчука с ее первоначальным определением является наиболее простым и изящным решением общей проблемы Бернсайда.

Для полноты изложения в § 1 приводится определение группы G. Для ее изучения мы стремились использовать только элементарные методы. Основным инструментом изучения, как и в [5], является возможность „проектировать", т. е. возможность рассматривать ограничения преобразований из G на некоторые подинтервалы интервала, где G определена. Теорема 1.20 есть основной результат § 1. В ней указываются два мономорфизма ψ_1 и ψ_2 группы G в ее собственную подгруппу H, составленную из всех четных элементов группы G. При этом мономорфизмы ψ_1 и ψ_2 такие, что $\varphi_1\psi_1=\mathrm{id}_G$ и $\varphi_2\psi_2=\mathrm{id}_G$, где id_G — тождественное преобразование группы G, а φ_1 и φ_2 — гомоморфизмы проектирования подгруппы H на группу G. Интерес представляют и полученные в § 1 критерии принадлежности элемента h из H коммутантам G' и H' (следствие 1.9, предложение 1.10), которые применяются для изучения некоторых подгрупп группы G.

В § 2 изучается действие элементов группы G на подинтервал $\Delta(n, i)$, который есть одна из $(1/2n)$-ных равных частей интервала Δ, на котором группа G определена. Точнее рассматривается подгруппа $M(n, i)$ из всех элементов группы G, относительно которых $\Delta(n, i)$ инвариантен. Устанавливается, что существует естественный эпиморфизм $\pi(n, i)$ подгруппы $M(n, i)$ на группу G, т. е. группа G „восстанавливается" над каждым подинтервалом $\Delta(n, i)$ подобно тому, как она восстанавливается над левой и правой половинами интервала Δ. Этот факт получен тоже в [6]. Существование мономорфизмов ψ_1 и ψ_2 из § 1 влечет существование (теорема 2.14) мономорфизмов $\psi(n, i)\colon G\to M(n, i)$ со свойствами $\pi(n, i)\psi(n, i)=\mathrm{id}_G$, $n\geq 0$, $1\leq i\leq 2^n$. В предложении 2.11 устанавливается, что индекс подгруппы $M(n, i)$ в G равняется 2^n.

В§ 3 изучаются элементы группы G, которые совпадают с идентитетом вне данного подинтервала $\Delta(n, i)$. Они образуют подгруппу $A(n, i)$ группы G. При фиксированном n

подгруппы $A(n, 1), A(n, 2), \ldots, A(n, 2^n)$ перемножаются прямым образом и образуют полный класс сопряженных подгрупп в G. При $n \geqq 2$ подгруппы $A(n, i)$ изоморфны нормальному делителю E группы G, порожденному коммутатором (t, w). Более точно, $A(0, 1) = G$, $A(1, 1)$ и $A(1, 2)$ — нормальные делители подгруппы H, порожденные соответственно элементами u и tut, а при $n \geqq 2$ $A(n, i) = \psi(n, i)(E)$. Из теоремы 3.5 легко получается, что каждое сплетение $(\cdots((E \operatorname{wr} B_1) \operatorname{wr} B_2) \cdots) \operatorname{wr} B_n$ группы E с группами второго порядка $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n \geqq 0$, вкладывается изоморфно в G. Ясно, что из этого следует, что каждое расширение группы E с помощью произвольной конечной 2-группы вкладывается изоморфно в группу G. Заметим, что в [11] Гуптой была построена конечнопорожденная бесконечная p-группа (p — нечетное простое число) такая, что в нее вкладывается изоморфно каждая конечная p-группа.

На базе полученных результатов в § 4 приводится новое доказательство теоремы Григорчука ([5], теорема 8.1) о том, что каждый неединичный нормальный делитель группы G имеет конечный индекс в G. В идейном отношении наше доказательство не отличается сильно от доказательства Григорчука, но на наш взгляд, важность этой теоремы оправдывает публикацию еще одного ее доказательства.

В § 5 доказывается, что фундаментальный идеал групповой алгебры группы Григорчука G над любым полем характеристики 2 не является ниль-идеалом.

1. О некоторых подгруппах группы Григорчука. Для полноты изложения мы начинаем с определения группы Григорчука ([5] или [9, с. 226—232]).

Пусть $\Delta_1 = [a, b]$ и $\Delta_2 = [c, d]$ — два интервала с одинаковыми длинами $b - a = d - c$. Отображение $x \to x + c - a$ интервала Δ_1 на Δ_2 будем называть сдвигом Δ_1 на Δ_2.

Обозначим через Δ подмножество интервала $[0, 1]$, которое получается отстранением точек вида $m/2^n$, $n \geqq 0$, $0 \leqq m \leqq 2^n$. Множество Δ также будем называть интервалом, а подмножества

$$\Delta(n, i) = \Delta \cap \left[\frac{i-1}{2^n}, \quad \frac{i}{2^n}\right], \; n \geqq 0, \; 1 \leqq i \leqq 2^n,$$

— интервалами в Δ. Под интервалом в Δ будем подразумевать только некоторый из интервалов $\Delta(n, i)$. Таким образом, $\Delta(0, 1) = \Delta$, а $\Delta(n+1, 2i-1)$ и $\Delta(n+1, 2i)$ — левая и правая половины интервала $\Delta(n, i)$. Представление $\Delta = \Delta(n, 1) \cup \Delta(n, 2) \cup \ldots \cup \Delta(n, 2^n)$ будем называть n-ным делением интервала Δ. Ясно, что если X интервал n-ного деления Δ и $m \leqq n$, то существует однозначно определенный интервал Y m-ного деления Δ такой, что X содержится в Y.

Если X — произвольный интервал в Δ, то обозначим через П преобразование, которое является сдвигом левой половины X на его правую половину и обратно, а через T — тождественное преобразование интервала X. С помощью преобразований T и П определяются три взаимно однозначные преобразования t, u и v интервала X. Преобразование t — это преобразование П на X, а для определения u и v мы рассматриваем разложение X на непересекающиеся подинтервалы $X = X(1, 1) \cup X(2, 3) \cup \ldots \cup X(n, 2^n - 1) \cup \ldots$, где $X(1, 1)$ — левая половина интервала X, $X(2, 3)$ — левая половина интервала $X(1, 2)$ и т. д. Для определения преобразования u на эти подинтервалы располагаем последовательно преобразования ТППТППТ..., где тройка ТПП повторяется бесконечно. Это означает, что u действует тождественно на левую половину $X(1,1)$ интервала X, на левую половину $X(2, 3)$ интервала $X(1, 2)$ u действует как преобразование П, на $X(3, 7)$ u действует как П, на $X(4,15)$ — как Т, и т. д. Взаимно однозначное преобразование v интервала X определяется таким же образом, как и u, но при помощи последовательности ПТППТПП..., где тройка ПТП повторяется бесконечно. Из определений преобразований t, u и v следует, что $t^2 = u^2 = v^2 = \mathrm{id}_X = 1$. Кроме того, $uv = vu$ и преобразование $w = uv$

соответствует последовательности ППТППТП... с бесконечным повторением тройки ППТ.

Определение 1.1. *Группой Григорчука* G_X *интервала* X *называется подгруппа симметрической группы* $S(X)$ *интервала* X, *которая порождается тремя преобразованиями* t, u, v, *т. е.* $G_X = \langle t, u, v \rangle$.

Ясно, что если Y — другой интервал в Δ, то существует естественный изоморфизм σ: $G_X \to G_Y$: элементу $g \in G_X$ соответствует элемент $\sigma(g) \in G_Y$, который действует „геометрически" таким же образом, как g действует на X. Группу G_Δ будем обозначать через G и наше изучение будет связано с этим конкретным экземпляром группы Григорчука, а когда это будет необходимо, мы применим естественный изоморфизм σ: $G_X \to G$. Группа G порождается элементами t, u, v второго порядка и поэтому каждый ее элемент записывается в виде $*t*t*\ldots*t*$ (вообще говоря неоднозначно), где места, обозначенные $*$, занимаются элементами u, v и $w = uv = vu$, причем в начале и конце $*$ может обозначать пустое слово 1. Через H обозначается подгруппа группы G, составленная из всех элементов, допускающих запись с четным числом участий элемента t. Ясно, что индекс $[G\colon H] = 2$. Известны (см. [5, 9]) следующие характеризации подгруппы H:

1. H есть подгруппа всех элементов группы G, которые отображают каждую половину интервала Δ в нее саму.

2. H — это нормальный делитель группы G, порожденный любой парой разных элементов множества $\{u, v, w\}$, т. е.

$$H = \langle u, v \rangle^G = \langle v, w \rangle^G = \langle u, w \rangle^G.$$

3. H есть подгруппа группы G, порожденная четырьмя элементами x, y, txt, tyt, где $x \neq y$ и $x, y \in \{u, v, w\}$.

Будем говорить, что интервал X в Δ инвариантен относительно преобразования $g \in G$, если $g(X) \subseteq X$. Далее мы увидим, что преобразования из G такие, что для интервалов в Δ включение $g(X) \subseteq X$ равносильно равенству $g(X) = X$.

Ясно, что $G = H\langle t \rangle$ и это произведение полупрямое. Элементы подгруппы H называются четными, а остальные элементы группы G — нечетными. Эти понятия естественно переносятся на группу G_X интервала X в Δ.

Если $h \in H$, то мы можем рассматривать ограничения h' и h'' отображения h на левую и правую половину интервала Δ. Легко заметить, что h' и h'' содержатся соответственно в группах Григорчука $G_{\Delta(1,1)}$ и $G_{\Delta(1,2)}$. Композиция φ_i взятия ограничения на $\Delta(1, i)$ и естественного изоморфизма группы $G_{\Delta(1,i)}$ на G является групповым гомоморфизмом подгруппы H на группу G, $i = 1, 2$. Существование этих гомоморфизмов доказывает бесконечность группы G. С их помощью, но более сложно, доказывается и периодичность группы G (см. [5] или [9, § 23]). Гомоморфизмы φ_1, φ_2 действуют на образующие подгруппы H следующим образом:

Таблица 1

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
u	1	w
v	t	u
w	t	v
tut	w	1
tvt	u	t
twt	v	t

Положим $U_i = \operatorname{Ker} \varphi_i$, $i = 1, 2$. Ясно, что подгруппа U_i состоит из всех элементов группы G, которые на $\Delta(1, i)$ совпадают с идентитетом интервала $\Delta(1, i)$, $i = 1, 2$. Поэтому $U_1 \cap U_2 = \langle 1 \rangle$ и произведение $U = U_1 U_2$ является прямым, т. е. $U = U_1 \times U_2$.

Лемма 1.2. *Если $h \in H$ и $h_1 = \varphi_1(h)$, $h_2 = \varphi_2(h)$, то $\varphi_1(tht) = h_2$ и $\varphi_2(tht) = h_1$.*

Таблица 1 показывает, что лемма верна для образующих группы G. Далее доказательство леммы проводится очевидным образом индукцией по длине записи элемента h через образующие группы H.

Следствие 1.3. *Подгрупа $U = U_1 \times U_2$ является нормальным делителем группы G и $U_2 = tU_1 t$, $U_1 = tU_2 t$.*

Действительно, последние два равенства вытекают из леммы 1.2. Так как элемент t нормализирует U и она нормальна в H, то подгруппа U нормальна в G.

Предложение 1.4. *Порядки элементов tu, tv, tw равны соответственно* 4, 8, 16.

Доказательство. Из таблица 1 видно, что $\varphi_1((tu)^2) = \varphi_2((tu)^2) = w$, а порядок элемента w равен 2. Следовательно, порядок элементов tu, $(tu)^{-1} = ut$ равен 4. Теперь $\varphi_1((tv)^2) = ut$, $\varphi_2((tv)^2) = tu$ и, следовательно, элемент tv имеет порядок 8. Аналогично, $\varphi_1((tw)^2) = vt$, $\varphi_2((tw)^2) = tv$, и значит элемент tw имеет порядок 16.

Следствие 1.5. *Подгруппы $\langle t, u \rangle$, $\langle t, v \rangle$, $\langle t, w \rangle$ группы G конечны и имеют соответственно порядки* 8, 16, 32.

Элементы t, u, v, w имеют порядок 2, и поэтому следствие вытекает непосредственно из предшествующего предложения.

Предложение 1.6. *Коммутант G' группы G содержится в подгруппе H, и, если $g \in G'$, $\varphi_1(g) = g_1$, $\varphi_2(g) = g_2$, то произведение $g_1 g_2$ также содержится в коммутанте G'.*

Доказательство. 1. Если $g = fh$, где f, $h \in G'$ и предложение верно для f и h, то оно верно и для g. Действительно, по предположению произведения $f_1 f_2$ и $h_1 h_2$ содержатся в коммутанте G', $f_i = \varphi_i(f)$, $h_i = \varphi_i(h)$, $i = 1, 2$. Тогда $g_1 = f_1 h_1$, $g_2 = f_2 h_2$ и $g_1 g_2 = f_1 h_1 f_2 h_2 = f_1 f_2 (f_2^{-1} h_1 f_2 h_1^{-1}) h_1 h_2 \in G'$.

2. Так как G — периодическая группа, то из 1 следует, что если предложение верно для элемента $h \in G'$, то оно верно и для h^{-1}.

3. Из 1 и 2 следует, что достаточно доказать предложение для простых коммутаторов от образующих t, u, v группы G. Коммутаторы $(t, u) = tutu$, $(t, v) = tvtv$ и их обратные являются единственными коммутаторами длины 2. Но для них мы имеем $\varphi_1((t, u)) = \varphi_2((t, u)) = w$, $\varphi_1((t, v)) = ut$, $\varphi_2((t, v)) = tu$. Так как $ww = 1 \in G'$ и $(ut)(tu) = 1 \in G'$, то предложение верно для простых коммутаторов длины 2.

Допустим, что предложение верно для всех простых коммутаторов длины $n \geq 2$. Пусть g простой коммутатор длины $n + 1$. Тогда $g = (a, x)$, где a — простой коммутатор длины n, а $x \in \{t, u, v\}$.

Если $x = t$, то $g = a^{-1} tat$, и, по лемме 1.2, мы имеем $g_1 = a_1^{-1} a_2$, $g_2 = a_2^{-1} a_1$, где $a_i = \varphi_i(a)$, $i = 1, 2$. Следовательно, $g_1 g_2 = 1 \in G'$.

Если $x = u$, то $g_1 = 1$, $g_1 g_2 = g_2 = (a_2, w) \in G'$. При $x = v$, $g_1 = (a_1, t) \in G'$, $g_2 = (a_2, u) \in G'$ и, поэтому $g_1 g_2 \in G'$. Следовательно, предложение верно и для простых коммутаторов длины $n + 1$. Это завершает доказательство.

Следствие 1.7. *Элементы u, v, w не содержатся в коммутанте G' группы G, а подгруппа H есть полупрямое произведение коммутанта G' на подгруппу $\langle u, v \rangle$ порядка* 4.

Доказательство. Так как $\varphi_1(v) = t$, $\varphi_2(v) = u$ и tu — нечетный элемент, то tu не содержится в $G' \subset H$, и, следовательно, по предложению 1.6 элемент v не содержится в G'. Аналогично, $\varphi_1(w)\varphi_2(w) = tv$, $\varphi_1(u)\varphi_2(u) = w$, и значит элементы w, u также не содержатся в коммутанте G'.

Из доказанного следует равенство $G' \cap \langle u, v\rangle = \langle 1\rangle$, т. е. произведение $P = G' \cdot \langle u, v\rangle$ — полупрямое. Поскольку $P \subseteq H$ и подгруппа H порождается элементами u, v, $tut = (t, u)u$, $tvt = (t, v)v$ из P, то $H = P$. Следствие доказано.

Следствие 1.8. *Индекс коммутанта G' в G равняется 8, а группа G/G' является прямым произведением образов подгрупп второго порядка $\langle t\rangle$, $\langle u\rangle$, $\langle v\rangle$ при естественном гомоморфизме группы G на фактор-группу G/G'.*

Действительно, элементы t, u, v порядка 2 порождают группу G. Поэтому для доказательства достаточно проверить, что они независимы по модулю коммутанта G'. Если $g = t^\alpha u^\beta v^\gamma \in G'$, то $\alpha = 0$, так как g — четный элемент. Тогда $g = u^\beta v^\gamma \in G' \cap \langle u, v\rangle = \langle 1\rangle$, и, следовательно, $\beta = \gamma = 0$, что доказывает независимость t, u, v по модулю коммутанта G'.

Следствие 1.9. *Элемент h подгруппы H содержится в коммутанте G' группы G тогда и только тогда, когда произведение $\varphi_1(h)\varphi_2(h)$ содержится в коммутанте G'.*

Доказательство. Ясно, что одна сторона предложения совпадает с предложением 1.6.

Допустим, что для h выполняется $\varphi_1(h)\varphi_2(h) \in G'$. Из следствия 1.8 следует, что элемент h записывается в виде $h = h'u^\alpha v^\beta$, где $h' \in G'$, $\alpha, \beta = 0,1$. Тогда $\varphi_1(h)\varphi_2(h) = \varphi_1(h')t^\beta\varphi_2(h')w^\alpha u^\beta \in G' \subset H$, и поэтому элемент $\varphi_1(h')t^\beta\varphi_2(h')$ является четным элементом. Но из предложения 1.6 следует, что произведение $\varphi_1(h')\varphi_2(h') \in G'$ есть тоже четный элемент. Следовательно, $\beta = 0$, а $\varphi_1(h')\varphi_2(h')w^\alpha \in G'$. Тогда $w^\alpha \in G'$, что по следствию 1.7, возможно только, когда $\alpha = 0$. Следовательно, $h = h' \in G'$.

Предложение 1.10. *Элемент h подгруппы H принадлежит коммутанту H' тогда и только тогда, когда его проекции $h_1 = \varphi_1(h)$ и $h_2 = \varphi_2(h)$ содержатся в коммутанте G' группы G.*

Доказательство. Если $h \in H'$, то $h_1, h_2 \in G'$, так как для групповых гомоморфизмов φ_1 и φ_2 выполняются равенства $\varphi_i(H') = G'$, $i = 1,2$.

Допустим теперь, что элементы h_1 и h_2 содержатся в G'. Элементы второго порядка u, v, tut, tvt порождают H, и поэтому $h = u^\alpha v^\beta (tut)^\gamma (tvt)^\delta h'$, где $h' \in H'$, α, β, γ, $\delta \in \{0,1\}$. Тогда $h_1 = \varphi_1(h) = t^\beta w^\gamma u^\delta \varphi_1(h') \in G'$ и $\varphi_1(h') \in G'$. Следовательно, $t^\beta w^\gamma u^\delta \in G'$, что, по следствию 1.8, влечет $\beta = \gamma = \delta = 0$. Теперь, $h = u^\alpha h'$, $h_2 = \varphi_2(h) = w^\alpha \varphi_2(h') \in G'$, $\varphi_2(h') \in G'$, и значит $w^\alpha \in G'$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $h = h' \in H'$. Предложение доказано.

Следствие 1.11. *Индекс коммутанта H' в H равняется 16 и фактор-группа H/H' есть прямое произведение образов подгрупп второго порядка $\langle u\rangle$, $\langle v\rangle$, $\langle tut\rangle$, $\langle tvt\rangle$ при естественном гомоморфизме H на H/H'.*

Действительно, образы элементов u, v, tut, tvt в H/H' ее порождают, а независимость u, v, tut, tvt по модулю коммутанта H' доказывается тем же методом, каким было проведено доказательство предшествующего предложения.

Следствие 1.12. *Пусть $W = \langle w\rangle^G$ — нормальный делитель группы G, порожденный элементом w. Тогда группа G является полупрямым произведением нормального делителя W и подгруппы $\langle t, u\rangle$, порожденной элементами t, u. Индекс W в G равняется 8 и подгруппа W порождается элементами w, twt, $utwtu$, $tutwtut$.*

Доказательство. Очевидно, группа G совпадает с произведением $W\langle t, u\rangle$. Так как $W \subset H$, то, используя модулярный закон, мы получаем $H = H \cap G = H \cap (W \cdot \langle t, u\rangle) = W(H \cap \langle t, u\rangle) = W\langle u, tut\rangle = W(\langle u\rangle \times \langle tut\rangle)$. Из полученного равенства и из коммутативности подгруппы $\langle u, tut\rangle$ следует включение $H' \subseteq W$. Пусть теперь x — элемент сечения $W \cap \langle t, u\rangle = W \cap \langle u, tut\rangle$. Тогда $x = u^\alpha (tut)^\beta$. Из следствия 1.11 мы знаем, что $G/H' \supset H/H' = \langle\bar{u}\rangle \times \langle\overline{tut}\rangle \times \langle\bar{w}\rangle \times \langle\overline{twt}\rangle$, где через $\bar{h}$ обозначаем соседний класс hH'.

Нетрудно заметить, что $W/H'=\langle\overline{w}\rangle\times\langle\overline{twt}\rangle$, и значит $\overline{x}=\overline{u}^{\alpha}(\overline{tut})^{\beta}=\overline{1}$, т. е. $\alpha=\beta=0$ и $x=1$. Следовательно, $W\cap\langle t, u\rangle=\langle 1\rangle$ и произведение $G=W\langle t, u\rangle$ — полупрямое.

Индекс $[G: W]$ в соответствии с доказанным равняется порядку подгруппы $\langle t, u\rangle$, а он, по следствию 1.5, равняется 8.

Остается доказать, что подгруппа B, порожденная элементами w, twt, $utwtu$ и $tutwtut$, совпадает с W. Ясно, что $B\subseteq W$. Так как $w\in B$ и множество образующих подгруппы B замкнуто относительно сопряжения элементами t и u, то B — нормальна в G, что доказывает равенство $B=W$.

З а м е ч а н и е 1. Если V — нормальный делитель группы G, порожденный элементом v, то совершенно аналогично получается, что $[G : V]=8$, произведение $G=V\langle t, u\rangle$ — полупрямое, а подгруппа V порождается четырьмя элементами v, tvt, $utvtu$, $tutvtut$.

С л е д с т в и е 1.13. *Индекс коммутанта W' в группе G не больше, чем 2^7, и W' порождается как нормальный делитель группы G двумя коммутаторами $f_1=(w, twt)$ и $f_2=(w, tutwtut)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствия 1.12 мы знаем, что $[G: W]=2^3$ и что W порождается четырьмя элементами порядка 2. Поэтому $[G: W']\leqq 2^7$.

Коммутант W' подгруппы W порождается как нормальный делитель группы G шестью коммутаторами образующих подгруппы W. Но четыре коммутатора выражаются через f_1 и f_2 следующим образом: $(w, utwtu)=uf_1u$, $(twt, utwtu)=tf_2t$, $(twt, tutwtut)=tut\ f_1^{-1}\ tut$, $(utwtu, tutwtut)=utu\ f_1\ utu$. Следовательно, коммутаторы f_1 и f_2 порождают нормальный делитель W' группы G.

С л е д с т в и е 1.14. *Нормальный делитель WG' группы G совпадает с произведением нормального делителя W и центра $\langle tutu\rangle$ подгруппы $\langle t, u\rangle$.*

Действительно. $G=W\langle t, u\rangle$, и поэтому $WG'=W\langle t, u\rangle'=W\langle tutu\rangle$.

С л е д с т в и е 1.15. *Если $g\in\langle t, u\rangle$ и $h\in G'$, то коммутатор (g, h) содержится в подгруппе W.*

Действительно, по следствию 1.14, мы имеем $h=f(tutu)^{\alpha}$, где $f\in W$ и $\alpha=0{,}1$. Поэтому $(g, h)=(g, f\,(tutu)^{\alpha})=(g, (tutu)^{\alpha})\ (tutu)^{\alpha}\ (g, f)\ (tutu)^{\alpha}=(tutu)^{\alpha}\ (g, f)\ (tutu)^{\alpha}\in W$, где $(g, (tutu)^{\alpha})=1$, $(g, h)\in W$ и $(tutu)^{\alpha}$ — элемент порядка 2 или единичный элемент.

Л е м м а 1.16. *Если h — элемент коммутанта H' подгруппы H и $h_1=\varphi_1(h)$, $h_2=\varphi_2(h)$, то произведение h_1h_2 содержится в W.*

Доказательство леммы использует следствие 1.15 и проводится по той же схеме, как и доказательство предложения 1.6.

Л е м м а 1.17. *Если одна из проекций элемента h подгруппы H равняется 1, то другая проекция содержится в подгруппе W.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $h_1=\varphi_1(h)=1$. Подгруппа H порождается элементами u, v, tut, tvt и, поэтому $h=u^{\alpha}v^{\beta}\ (tut)^{\gamma}\ (tvt)^{\delta}\ h'$, где $h'\in H'$ и α, β, γ, $\delta\in\{0, 1\}$. Следовательно, мы имеем $1=h_1=t^{\beta}w^{\gamma}u^{\delta}\ \varphi_1(h')$, где $\varphi_1(h')\in G'$. Но тогда $t^{\beta}w^{\gamma}u^{\delta}\in G'$, что, по следствию 1.8, влечет $\beta=\gamma=\delta=0$, и значит $h=u^{\alpha}h'$, $1=\varphi_1(h')$, $h_2=w^{\alpha}\varphi_2(h')$. Но по лемме 1.16, элемент $\varphi_2(h')=\varphi_1(h')\ \varphi_2(h')$ содержится в W. Следовательно, элемент $h_2=w^{\alpha}\varphi_2(h')$ тоже содержится в W. Лемма доказана.

П р е д л о ж е н и е 1.18. *Подгруппы $U_1=\operatorname{Ker}\varphi_1$ и $U_2=\operatorname{Ker}\varphi_2$ группы G порождаются как нормальные делители подгруппы H соответственно элементами u и tut.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствия 1.3 мы знаем, что $U_2=tU_1t$. Поэтому достаточно доказать предложение только для U_1. Обозначим через B нормальный делитель подгруппы H, порожденный элементом u. Так как $u\in U_1$, то $B\subseteq U_1$. Пусть $h\in U_1$. Тогда $\varphi_1(h)=1$ и, по лемме 1.17, $\varphi_2(h)$ содержится в W. Следовательно, $\varphi_2(U_1)\subseteq W$. Легко видеть, используя таблицу 1, что $\varphi_2(B)=\langle\varphi_2(u)\rangle^{\varphi_2(H)}=\langle w\rangle^{G}=W$. Следовательно, $\varphi_2(B)=\varphi_2(U_1)$. Но гомоморфизм φ_2 на подгруппу U_1 является мономорфизмом, а $B\subseteq U_1$. Следовательно, полученное равенство $\varphi_2(B)=\varphi_2(U_1)$ влечет $B=U_1$. Предложение доказано.

Предложение 1.19. *Подгруппа $U=U_1\times U_2$ порождается как нормальный делитель группы G элементом u. Группа G есть полупрямое произведение нормального делителя U и подгруппы $\langle t, v\rangle$ порядка* 16.

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из следствия 1.3 и из предшествующего предложения.

Равенство $G=U\langle t, v\rangle$ очевидно. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi_2\colon H\to G$. Так как $U=U_1\times U_2$ и $U_2=\operatorname{Ker}\varphi_2$, то $\varphi_2(U)=\varphi_2(U_1)=W$, и поэтому фактор-группа H/U изоморфна фактор-группе G/W. По следствию 1.12, $[G\colon W]=8$ и, следовательно, $[G\colon U]=16=|\langle t, v\rangle|$. Это показывает, что произведение $G=U\langle t, v\rangle$ — полупрямое.

Теорема 1.20. *Существуют мономорфизмы ψ_1 и ψ_2 группы G в ее подгруппу H такие, что $\varphi_1\psi_1=\mathrm{id}_G$, $\varphi_2\psi_2=\mathrm{id}_G$, $H=\psi_1(G)\,\psi_2(G)$ и $\psi_1(G)\cap\psi_2(G)=\langle v, tvt\rangle$.*

Доказательство. По предшествующему предложению произведение $G=U\langle t, v\rangle$ — полупрямое, и поэтому H разлагается в полупрямое произведение $H=U\langle v, tvt\rangle$. Положим, $G_1=U_2\langle v, tvt\rangle$, $G_2=U_1\langle v, tvt\rangle$. Ясно, что $G_1\cap G_2=\langle v, tvt\rangle$, $U_1\cap G_1=\langle 1\rangle$, $U_2\cap G_2=\langle 1\rangle$. Таким образом, ограничение гомоморфизма φ_i на подгруппу G_i является мономорфизмом G_i в G. Но $H=U_iG_i$, $\varphi_i(H)=G$, $U_i=\operatorname{Ker}\varphi_i$, и это показывает, что φ_i отображает изоморфно подгруппу G_i на G. Положим, $\psi_i=(\varphi_i/G_i)^{-1}$. Тогда $\psi_i(G)=G_i$ и $\varphi_i\psi_i=\mathrm{id}_G$, $i=1,2$. Теорема доказана.

Заметим, что так определенные мономорфизмы отображают образующие группы G следующим образом:

Таблица 2

x	$\psi_1(x)$	$\psi_2(x)$
t	v	tvt
u	tvt	v
v	twt	w
w	tut	u

Предложение 1.21. *Нормальный делитель W группы G является полупрямым произведением своего сечения $W\cap G'$ с коммутантом группы G и подгруппы $\langle w\rangle$ второго порядка. Сечение $W\cap G'$ порождается как нормальный делитель группы G коммутатором (t, w).*

Доказательство. По следствиям 1.7 и 1.8 мы имеем $\langle w\rangle\cap(G'\cap W)=\langle 1\rangle$ и $\overline{G}=G/G'=\langle\overline{t}\rangle\times\langle\overline{u}\rangle\times\langle\overline{w}\rangle$. Поэтому фактор-группа $WG'/G'=\langle\overline{w}\rangle$ имеет порядок 2, т. е $|W/W\cap G'|=2$. Это показывает, что $W=(W\cap G')\,\langle w\rangle$ и что это—полупрямое разложение подгруппы W. Пусть $B=E\langle w\rangle$, где E — нормальный делитель группы G, порожденный коммутатором (t, w). Ясно, что $B\subseteq W$. Легко проверяется, что B нормализуется элементами t и u. Так как $w\in B$ и t, u, w порождают группу G, то B нормальна в G. Следовательно, $W=B$. Теперь, применяя модулярный закон, мы получаем $W\cap G'=(E\langle w\rangle)\cap G'=E(\langle w\rangle\cap G')=E$. Это завершает доказательство предложения.

Замечание 2. Совершенно аналогично получается, что сечение $V\cap G'$ порождается как нормальный делитель группы G коммутатором (t, v), а $V=(V\cap G')\,\langle v\rangle$ и это произведение — полупрямое. Заметим еще, что в группе G выполнены равенства

$vtutv = wtutw$ и $vtutw = wtutv$. Они являются следствиями того факта, что элементы u и tut коммутируют.

Предложение 1.22. *Имеют место следующие разложения в полупрямое произведение*

(1) $U_1 = (U_1 \cap W)\ \langle u\rangle$,

(2) $U_2 = (U_2 \cap W)\ \langle tut\rangle$,

(3) $U = (U \cap W)\ \langle u,\ tut\rangle$.

Кроме того, $U \cap W = (U_1 \cap W) \times (U_2 \cap W)$, $U_1 \cap W = \psi_2(E)$, $U_2 \cap W = \psi_1(E)$, где $E = W \cap G'$. *Подгруппы* $U_1 \cap W$, $U_2 \cap W$ *порождаются как нормальные делители подгруппы* H *соответственно коммутаторами* $(twt,\ u)$ *и* $(w,\ tut)$.

Доказательство. Мы уже знаем, что $H = W\langle u,\ tut\rangle$ и $H' \subset W$. Последнее включение показывает, что подгруппа $W\langle u\rangle$ нормальна в H. По предложению 1.19, $U_1 = \langle u\rangle^H$. Следовательно, $U_1 \subseteq W\langle u\rangle$. Применяя модулярный закон, мы получаем $U_1 = U_1 \cap (W\langle u\rangle) = (U_1 \cap W)\langle u\rangle$. Это произведение полупрямое, так как элемент u не содержится в W. Этим мы доказали первое утверждение. Второе утверждение следует из равенства $U_2 = tU_1t$, а утверждение три следует из включения $\langle u,\ tut\rangle \subset U$ и из разложения $H = W\langle u,\ tut\rangle$ в полупрямое произведение.

Равенство $U \cap W = (U_1 \cap W) \times (U_2 \cap W)$ вытекает очевидным образом из разложения $U = U_1 \times U_2$ и из (1), (2) и (3).

Рассмотрим подгруппу $\psi_1(E)$. Так как E — нормальный делитель группы G, порожденный коммутатором $(t,\ w)$, то $\psi_1(E)$ — нормальный делитель подгруппы $G_1 = \psi_1(G) = U_2\langle v,\ tvt\rangle$, порожденный коммутатором $(v,\ tut) = (w,\ tut)$ (см. замечание 2). Этот коммутатор содержится в $U_2 \cap W$, и значит $\psi_1(E) \subseteq U_2 \cap W$. Но $H = U_1G_1$ и элементы подгруппы U_1 коммутируют с элементами подгруппы U_2. Из этого следует, что $\psi_1(E)$ есть нормальный делитель подгруппы H, порожденный коммутатором $(w,\ tut)$. Из включений $\psi_1(E) \subseteq U_2 \cap W \subseteq U_2 = (U_2 \cap W)\ \langle tut\rangle$ следуют включения $E = \varphi_1(\psi_1(E)) \subseteq \varphi_1(U_2 \cap W) \subseteq \varphi_1(U_2) = W$. По предложению 1.21, подгруппа E имеет индекс 2 в W. Подгруппа $\varphi_1(U_2 \cap W)$ имеет тоже индекс 2 в W, так как $U_2 \cap W$ имеет индекс 2 в U_2, и φ_1 отображает изоморфно U_2 на W. Следовательно, $E = \varphi_1(U_2 \cap W)$ и $U_2 \cap W = \psi_1(E) = \langle (w,\ tut)\rangle^H$. Учитывая равенства $tU_2t = U_1$, $t\,\psi_1(E)t = \psi_2(E)$, $t(w,\ tut)t = (twt,\ u)$, мы получаем тогда $U_1 \cap W = \psi_2(E) = \langle (twt,\ u)\rangle^H$. Предложение доказано.

Замечание 3. Не трудно заметить, что имеют место равенства $V \cap U = W \cap U$, $V \cap U_1 = W \cap U_1$ и $V \cap U_2 = W \cap U_2$.

2. Действие группы Григорчука на интервалы в Δ. Напомним, что под интервалом в Δ мы понимаем только некоторый из интервалов $\Delta(n,\ i)$, $n \geqq 0$, $1 \leqq i \leqq 2^n$, определенных в § 1.

Лемма 2.1. *Пусть g — элемент группы G и X — интервал в G, инвариантный относительно g, т. е. $g(X) \subseteq X$. Если Y такой интервал в Δ, что $X \subseteq Y$, то Y и $Y \setminus X$ также инвариантны относительно элемента g. Кроме того, $g(X) = X$ и ограничение преобразования g на X является элементом группы Григорчука G_X интервала X.*

Доказательство. Пусть $X = \Delta(n,\ i)$. Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 0$ $X = \Delta$, и все утверждения леммы очевидны.

Пусть $n > 0$. Тогда X содержится в одной из половин интервала Δ. Без ограничения общности, мы можем считать, что $X \subseteq \Delta(1,1)$. В этом случае X является интервалом $(n-1)$-ого деления интервала $\Delta(1,\ 1)$. Так как $X \neq \Delta$ и $g(X) \subseteq X$, то g является четным элементом группы G, т. е. $g \in H$. Ограничение элемента g на $\Delta(1,1)$ является элементом группы Григорчука $G_{\Delta(1,1)}$ и $g(\Delta(1,1)) = \Delta(1,1)$. Далее индукционный шаг проводится очевидным образом.

Лемма 2.2. *Если g — неединичный элемент группы G, то существует интервал в Δ, который неинвариантен относительно элемента g.*

Действительно, $g\neq 1$, и поэтому существует $x\in\Delta$ такое, что $g(x)\neq x$. Если n такое натуральное число, что $|g(x)-x|>1/2^n$, а $\Delta(n, i)$ — тот интервал n-ого деления Δ, который содержит x, то $\Delta(n, i)$ неинвариантен относительно g.

Лемма 2.3. *Если g—неединичный элемент группы G, то существует натуральное число n и интервал $X=\Delta(n, i)$ такие, что все интервалы n-ого деления Δ инвариантны относительно g, а ограничение элемента g на X является нечетным элементом группы Григорчука G_X интервала X.*

Доказательство. Пусть n — максимальное натуральное число такое, что все интервалы n-ого деления Δ инвариантны относительно g. В силу леммы 2.2, такое n существует. Если Y — интервал $(n+1)$-ого деления Δ, который неинвариантен относительно g, то он содержится в некотором интервале X n-ого деления Δ в качестве одной из половин интервала X. Очевидно, ограничение преобразования g на X является нечетным элементом группы G_X.

Лемма 2.4. *Пусть $X=\Delta(n, i)$. Каждый из элементов t, u, v, w или отображает X на X, или является сдвигом интервала X на другой интервал n-ого деления Δ.*

Действительно, элемент t по своему определению является сдвигом каждого интервала в Δ на другой интервал того же деления Δ, т. е. для t лемма верна.

Для элементов u, v, w легко проводится индукция по числу n. Для $n=0$ лемма очевидна, а при $n>0$ интервал X содержится в одной из половин $\Delta(1,1)$, $\Delta(1,2)$ интервала Δ и является интервалом $(n-1)$-ого деления этой половины. Используя таблицу 1, мы видим, что u, v, w действуют на $\Delta(1,1)$ как 1, t, t, а на $\Delta(1,2)$ — как w, u, v соответственно, что с использованием предположения индукции завершает доказательство.

Следствие 2.5. *Если X — интервал n-ого деления, а g — произвольный элемент группы G, то $g(X)$ также является интервалом n-ого деления интервала Δ.*

Очевидно, следствие получается непосредственно из леммы 2.4 индукцией по длине записи элемента g через образующие t, u, v, w.

Предшествующее следствие показывает, что для каждого натурального n группа G действует на множество интервалов n-ого деления интервала Δ. Таким образом получается представление группы G в симметрическую группу S_{2^n}.

Определение 2.6. *Через $M(n)$ будем обозначать подгруппу группы G, состоящую из всех элементов g группы G со свойством $g(X)=X$ для каждого интервала X n-ого деления Δ.*

Следствие 2.7. *Подгруппа $M(n)$ является нормальным делителем конечного индекса группы G, и имеет место равенство*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} M(n)=\langle 1\rangle. \tag{1}$$

На самом деле, $M(n)$ есть ядро упомянутого выше представления G в S_{2^n}. Поэтому $M(n)$ нормальна в G, и ее индекс в G не превосходит $2^n!$ Равенство (1) вытекает непосредственно из леммы 2.2.

Определение 2.8. *Если $n\geq 0$, $1\leq i\leq 2^n$, то через $M(n, i)$ будем обозначать подгруппу группы G, состоящую из всех таких элементов группы G, относительно которых интервал $\Delta(n, i)$ инвариантен, т. е.*

$$M(n, i)=\{g\mid g\in G,\ g(\Delta(n, i))=\Delta(n, i)\}.$$

Предложение 2.9. *а) Подгруппы $M(n, i)$ имеют конечный индекс в G и $M(n)=M(n, 1)\cap M(n, 2)\cap \ldots \cap M(n, 2^n)$,*

в) $M(n+1,2i-1)=M(n+1,2i)\subset M(n, i)$, *c) Множество подгрупп $\{M(n, i) \mid i=1, 2, \ldots, 2^n\}$ замкнуто относительно сопряжения элементами из G.*

На самом деле, утверждение *a*) вытекает из следствия 2.7, утверждение *в*) является прямым следствием леммы 2.1, а *c*) проверяется тривиальным образом с использованием следствия 2.5.

Из леммы 2.1. следует, что ограничение любого элемента $g \in M(n, i)$ на интервал $\Delta(n, i)$ является элементом группы Григорчука интервала $\Delta(n, i)$. Ясно, что взятие органичения на $\Delta(n, i)$ является гомоморфизмом группы $M(n, i)$ в группу $G_{\Delta(n, i)}$.

Определение 2.10. *Проектированием подгруппы $M(n, i)$ в группу G будем называть отображением $\pi(n, i)$, которое является композицией взятия ограничения на $X=\Delta(n, i)$ и естественного изоморфизма σ группы G_X на группу G.*

Ясно, что проектирование $\pi(n, i)$ есть гомоморфизм подгруппы $M(n, i)$ в группу G и что $\pi(0,1)=id_G$, $\pi(1,1)=\varphi_1$, $\pi(1,2)=\varphi_2$.

Предложение 2.11. *Если $n \geq 0$ и $1 \leq i \leq 2^n$, то*

a) $\pi(n, i)$ есть эпиморфизм подгруппы $M(n, i)$ на группу G, т. е. $\pi(n, i)(M(n, i)) = G$;

в) Эпиморфизм $\pi(n, i)$ отображает подгруппу $M(n+1, 2i-1)=M(n+1, 2i)$ на подгруппу H группы G, и на этой подгруппе имеют место равенства $\varphi_1\ \pi(n, i) =\pi(n+1, 2i-1)$, $\varphi_2\ \pi(n, i)=\pi(n+1, 2i)$;

c) Индекс подгруппы $M(n+1, 2i-1)=M(n+1, 2i)$ в подгруппе $M(n, i)$ равен 2, и поэтому она нормальна в $M(n, i)$;

d) Индекс подгруппы $M(n, i)$ в G равен 2^n.

Доказательство. Мы докажем утверждения *a*), *в*) одновременно индукцией по n. Если $n=0$, эти утверждения очевидны. Пусть $n>0$ и допустим, что утверждения *a*), *в*) верны для $n-1$, т. е. выполняются равенства $\pi(n-1, j)(M(n-1, j)=G$, $\pi(n-1, j)(M(n, 2j))=H$, и на $M(n, 2j)$ имеем $\pi(n, 2j-1)=\varphi_1\ \pi(n-1, j)$, $\pi(n, 2j) =\varphi_2\ \pi(n-1, j)$, $j=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. Рассмотрим интервал $X=\Delta(n, i)$. Он является одной из половин некоторого интервала $Y=\Delta(n-1, j)(n-1)$-ого деления Δ. Для определенности, пусть X правая половина Y, т. е. $2j=i$. Если $g \in G$, то существует $h \in H$ такой, что $\varphi_2(h)=g$. По предположению индукции существует $f \in M(n, i)$ со свойством $\pi(n-1, j)(f)=h$. Рассмотрим элемент $\pi(n, i)(f)$. По выбору элемента f его ограничение на Y соответствует элементу h, а по выбору h его ограничение на правую половину X интервала Y соответствует элементу g. Следовательно, $\pi(n, i)(f)=g$, и значит $\pi(n, i)(M(n, i))=G$. Далее, пусть Z одна из половин интервала $\Delta(n, i)$. Для определенности можем считать, что $Z=\Delta(n+1, 2i)$. Если g_1, g_2, g_3, g_4 такие элементы подгруппы $M(n, i)$, что $\pi(n, i)\ (g_1)=u$, $\pi(n, i)\ (g_2)=v$, $\pi(n, i)\ (g_3)=tut$, $\pi(n, i)\ (g_4) =tvt$, то Z инвариантен относительно g_1, g_2, g_3, g_4, т. е. эти элементы содержатся в $M(n+1, 2i)$. Поэтому выполняется включение $H \subseteq \pi(n, i)\ (M(n+1, 2i))$. Обратное включение вытекает из равенства $M(n+1, 2i)=M(n+1, 2i-1)$, так как из него следует, что каждый элемент из $M(n+1, 2i)$ имеет ограничение на $\Delta(n, i)$, являющееся четным элементом группы $G_{\Delta(n, i)}$. Следовательно, выполняется равенство $H=\pi(n, i)\ (M(n+1, 2i))$. Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично. Равенства $\varphi_1\ \pi(n, i)=\pi(n+1, 2i-1)$, $\pi(n+1, 2i)=\varphi_2\ \pi(n, i)$ на $M(n+1, 2i)=M(n+1, 2i-1)$ следуют непосредственно из определения проектирований. Этим *a*) и *в*) доказаны.

Поскольку имеет место включение $\operatorname{Ker} \pi(n, i) \subset M(n+1, 2i)$, то утверждение *c*) вытекает непосредственно из *a*) и *в*).

Утверждение *d*) получается из *c*) очевидной индукцией по числу n.

Лемма 2.12. *Если X и Y — два интервала n-ого деления интервала Δ, то существует элемент g в G такой, что g является сдвигом интервала X на интервал Y.*

Доказательство. *Лемма очевидна при $X=Y$, и мы можем считать, что $X \neq Y$.*

Если, X, Y являются половинами одного и того же интервала Z $(n-1)$-ого деления Δ, то, по предложению 2.11, в G существует такой элемент g, что его ограничение на Z есть элемент t из G_Z. Ясно, что g является сдвигом интервала X на Y и обратно. В частности, лемма верна при $n=1$.

Пусть $n\geq 1$ и лемма верна для $n-1$. Мы можем считать, что X и Y содержатся в интервалах Z_1, Z_2, $Z_1\neq Z_2$, $(n-1)$-ого деления интервала Δ. По предположению индукции, существует элемент f в G, являющийся сдвигом Z_1 на Z_2. Так как X есть одна из половин Z_1, то $f(X)$ совпадает с некоторой из половин интервала Z_2. Интервал Y тоже совпадает с некоторой из половин интервала Z_2. Если $f(X)=Y$, то f есть сдвиг интервала X на Y, а если $f(X)\neq Y$, то, как мы уже заметили, существует $h\in G$, который есть сдвиг $f(X)$ на Y, и в этом случае $g=hf$ является искомым сдвигом X на Y. Лемма доказана.

Предложение 2.13. *а) Если элемент g группы G является сдвигом интервала $\Delta(n, i)$ на интервал $\Delta(n, j)$, то g^{-1} $M(n, j)$ $g=M(n, i)$, и для каждого элемента f подгруппы $M(n, j)$ выполняется равенство*

$$\pi(n, j)\ (t)=\pi(n, i)\ (g^{-1}\ fg);$$

в) Подгруппы $M(n, i)$, $i=1, 2, \ldots, 2^n$, образуют полный класс сопряженных подгрупп группы G.

Утверждение а) проверяется непосредственно, а утверждение в) следует из леммы 2.12 и из предложения 2.9.

Теорема 2.14. *Для всех $n\geq 0$ и $1\leq i\leq 2^n$ существует такой мономорфизм $\psi(n, i)$ группы G в ее подгруппу $M(n, i)$, что*

а) $\psi(n, i)\ \psi_1=\psi(n+1,2i-1)$, $\psi(n, i)\ \psi_2=\psi(n+1,2i)$,

в) $\pi(n, i)\ \psi(n, i)=id_G$,

с) $\psi(n, i)\ (H)\subseteq M(n+1,2i-1)=M(n+1,2i)$.

Доказательство. Если $n=0$, то $\pi(0,1)=\mathrm{id}_G$ и $M(1,1)=M(1,2)=H$. В этом случае мы полагаем $\psi(0,1)=\mathrm{id}_G$, т. е. теорема верна при $n=0$, $\psi(1,1)=\psi_1$, $\psi(1,2)=\psi_2$.

Пусть $n>0$ и пусть теорема верна для $n-1$. Рассмоторим сперва случай, когда $i=2j-1$, т. е. число i — нечетное. В этом случае интервал $\Delta(n, i)$ является левой половиной интервала $\Delta(n-1, j)$. Положим $\psi(n, i)=\psi(n-1, j)\ \psi_1$, где ψ_1 — мономорфизм, определенный в теореме 1.20. Ясно, что так определенный гомоморфизм $\psi(n, i)$ является мономорфизмом группы G в ее подгруппу $M(n-1, j)$. Но $\psi_1(G)\subset H$ и по предположению $\psi(n-1, j)\ (H)\subset M(n, i)$, т. е. $\psi(n, i)$ является мономорфизмом группы G в ее подгруппу $M(n, i)$.

Для доказательства равенства в) достаточно его проверить для образующих t, u, v группы G. Из таблицы 2 мы видим, что $\psi(n, i)\ (t)=\psi(n-1, j)\ (v)$. Но $\pi(n-1, j)$ $\psi(n-1, j)=\mathrm{id}_G$, т. е. $v=\pi(n-1, j)\ (\psi(n-1, j)\ (v))$. Последнее равенство показывает, что ограничение элемента $\psi(n-1, j)\,(v)$ на $\Delta(n-1, j)$ есть элемент v группы $G_{\Delta(n-1, j)}$. Следовательно, ограничение этого же элемента на левую половину $\Delta(n, i)$ интервала $\Delta(n-1, j)$ является элементом t группы $G_{\Delta(n, i)}$. Но это означает, что $\pi(n, i)$ $\psi(n, i)\ (t)=t$. Аналогичным образом проверяются и равенства $\pi(n, i)\ \psi(n, i)\ (u)=u$ и $\pi(n, i)\ \psi(n, i)\ (v)=v$, т. е. равенство в) выполняется для $\psi(n, i)$.

Из предложения 2.11 мы знаем, что $\pi(n, i)\ (M(n+1,2i))=H$. Так как Ker $\pi(n, i)$ содержится в $M(n+1,2i-1)=M(n+1,2i)$, то $M(n+1,2i)=\pi(n, i)^{-1}\ (H)$, и, следовательно, включение с) следует из доказанного уже равенства в). Теорема доказана.

3. Элементы группы Григорчука, совпадающие с идентитетом вне данного подинтервала

Определение 3.1. *Через $A(n, i)$ будем обозначать подмножество всех элеменов группы Григорчука, которые совпадают с идентитетом вне подинтервала $\Delta(n, i)$, т. е.*

$$A(n, i)=\{g|g \in G, \ g(x)=x, \ x \in \Delta \setminus \Delta(n, i)\}.$$

Ясно, что $A(n, i)$ является подгруппой группы G, содержащейся в нормальном делителе $M(n)$ группы G (см. § 2).

Если $f \in M(n, i)$, то, по лемме 2.1, множество $\Delta \setminus \Delta(n, i)$ инвариантно относительно преобразования f, и поэтому подгруппа $f^{-1}A(n, i)f$ содержится в $A(n, i)$, т. е. $A(n, i)$ является нормальным делителем подгруппы $M(n, i)$.

Обозначим через $A(n)$ подгруппу, порожденную подгруппами $A(n, i)$, $A(n, 2)$, $\ldots$, $A(n, 2^n)$. Очевидно, подгруппа $A(n)$ содержится в $M(n)$ и является прямым произведением этих подгрупп:

$$A(n)=A(n, 1)\times A(n, 2)\times \ldots \times A(n, 2^n).$$

Заметим, что $A(0, 1)=A(0)=G$.

Предложение 3.2. *Подгруппы $A(n, 1)$, $A(n, 2), \ldots, A(n, 2^n)$ образуют полный класс сопряженных подгрупп группы G, а подгруппа $A(n)$ нормальна в G.*

Доказательство. Пусть g — произвольный элемент группы G. Если $X=\Delta(n, i)$ — интервал n-ого деления интервала Δ, то, по следствию 2.5, образ $g(X)$ также является интервалом n-ого деления Δ, т. е. $g(X)=\Delta(n, j)$ для некоторого j. Нетрудно заметить, что тогда выполнено равенство $gA(n, i)g^{-1}=A(n, j)$.

С другой стороны, для каждой пары интервалов X, Y n-ого деления Δ, по лемме 2.12, в G существует такой элемент f, что $f(X)=Y$, и поэтому любые две подгруппы $A(n, i)$, $A(n, j)$ сопряжены в G.

Этим доказано первое утверждение, а из него, очевидно, вытекает второе утверждение.

В предложении 1.21 мы доказали, что сечение $E=W \cap G'$ порождается как нормальный делитель группы G коммутатором (t, w). Подгруппы $\psi_1(E)=U_2 \cap W$ и $\psi_2(E)=U_1 \cap W$ порождаются как нормальные делители подгруппы H соответственно коммутаторами $(w, tut)=(v, tut)$ и $(twt, u)=(tvt, u)$ (предложение 1.22).

Лемма 3.3. Если E — *нормальный делитель группы G, порожденный коммутатором (t, w), то для каждого $n \geq 0$ и для каждого i, $1 \leq i \leq 2^n$, имеет место включение $\psi(n, i)$ $(E) \subseteq A(n, i)$.*

Доказательство. Если $n=0$, то $i=1$, $A(0, 1)=G$, $\psi(0, 1)=id_G$ и $E \subseteq G$. При $n=1$ мы имеем $A(1, 1)=U_2$, $A(1, 2)=U_1$, $\psi(1, 1)=\psi_1$, $\psi(1, 2)=\psi_2$, $\psi_1(E)=U_2 \cap W \subseteq U_2$ $\psi_2(E)=U_1 \cap W \subseteq U_1$, т. е. лемма верна для $n=0, 1$.

Пусть $n>1$ и утверждение леммы верно для $n-1$. Рассмотрим подгруппу $\psi(n, i)$ (E). Для определенности, допустим сперва, что i — нечетное число. Тогда $i=2j-1$, и, по теореме 2.14, имеет место равенство $\psi(n, i)=\psi(n-1, j)\psi_1$. Поэтому мы имеем $\psi(n, i)$ $(E)=\psi(n-1, j)$ $(U_2 \cap W)$. Так как коммутатор (w, tut) содержится в нормальном делителе E и порождает сечение $U_2 \cap W$ как нормальный делитель подгруппы H, то $U_2 \cap W \subseteq E$. По предположению индукции, мы имеем $\psi(n, i)(E)=\psi(n-1, j)(U_2 \cap W) \subseteq \psi(n-1, j)(E) \subseteq A(n-1, j)$. Это показывает, что каждый элемент f подгруппы $\psi(n, i)(E)$ совпадает с идентитетом на множестве $\Delta \setminus \Delta(n-1, j)$. Элемент f записывается в виде $f=\psi(n-1, j)$ (g), где $g \in U_2 \cap W$. Поскольку элемент g совпадает с идентитетом на $\Delta(1, 2)$ и $g=\pi(n-1, j)$ (f), то элемент f совпадает с идентитетом на правой половине $\Delta(n, 2j)=\Delta(n, i+1)$ интервала $\Delta(n-1, j)$. Поэтому элемент f совпадает с идентитетом на множестве $(\Delta \setminus \Delta(n-1, j)) \cup \Delta(n, 2j)=\Delta \setminus \Delta(n, i)$, т. е. $f \in A(n, i)$. Этим доказано включение $\psi(n, i)$ $(E) \subseteq A(n, i)$, когда $i=2j-1$. Случай, когда i — четное число, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Для любого натурального числа $n \geq 2$ и для любого i, $1 \leq i \leq 2^n$, имеет место включение $\pi(n, i)$ $(A(n, i)) \subseteq E$, где $E=\langle(t, w)\rangle^G$.*

Доказательство. Рассмотрим случай когда i — нечетное число, т. е. $i=2j-1$ В этом случае интервал $\Delta(n, i)$ является левой половиной интервала $\Delta(n-1, j)$, а

$M(n, i)=M(n, i+1)$ и $A(n, i)$ — нормальна в $M(n, i)$. По предложению 2.11, на $M(n, i)$ имеет место равенство $\pi(n, i)=\varphi_1\pi(n-1, j)$. Пусть $f\in A(n, i)$. Элемент f совпадает с идентитетом на множестве $\Delta\setminus\Delta(n, i)$, а $\Delta(n, i+1)$ совпадает с правой половиной интервала $\Delta(n-1, j)$. Поэтому, элемент $g=\pi(n-1, j)(f)$, который действует „геометрически" на Δ таким же образом как элемент f на $\Delta(n-1, j)$, совпадает с идентитетом на $\Delta(1, 2)$, т. е. $g\in U_2=\operatorname{Ker}\varphi_2$.

По условию $n\geqq 2$. Поэтому, интервал $\Delta(n-1, j)$ совпадает с одной из половин некоторого интервала $\Delta(n-2, k)$. Допустим, для определенности, что $\Delta(n-1, j)$ есть левая половина интервала $\Delta(n-2, k)$, т. е. $j=2k-1$. Тогда на подгруппе $M(n-1, j)$ имеет место равенство $\pi(n-1, j)=\varphi_1\pi(n-2, k)$ и $A(n, i)\subseteq M(n-1, j)$. Следовательно, $g=\varphi_1(g_1)$, где $g_1=\pi(n-2, k)(f)$. Элемент g_1 содержится в подгруппе U_2, так как элемент f совпадает с идентитетом на $\Delta(n-1, j+1)\subset\Delta\setminus\Delta(n, i)$. По лемме 1.17, элемент $g=\varphi_1(g_1)$ содержится в W. Следовательно, элемент g содержится в $U_2\cap W=\psi_1(E)$. Тогда $\pi(n, i)(f)=\varphi_1(g)\in\varphi_1(\psi_1(E))=E$, т. е. для рассматриваемого случая выполняется включение $\pi(n, i)\,(A(n,i))\subseteq E$.

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом.

Теорема 3.5. Если E — *нормальный делитель группы Григорчука, порожденный коммутатором* (t, w), *то для каждого натурального числа* $n\geqq 2$ *и каждого* i, $1\leqq i\leqq 2^n$, *выполняются равенства* $A(n, i)=\psi(n, i)(E)$, $E=\pi(n, i)(A(n, i))$.

Доказательство. По лемме 3.3, имеет место включение $A(n, i)\supseteq\psi(n, i)(E)$. Но $\pi(n, i)\,.\,\psi(n, i)=id_G$, и поэтому $E\subseteq\pi(n, i)\,(A(n, i))$. По лемме 3.4, выполняется и обратное включение, т. е. мы имеем $E=\pi(n, i)\,(A(n, i))$.

Пусть $f\in A(n, i)$, тогда элемент $g=\pi(n, i)\,(f)$ содержится в E, и поэтому элемент $f_1=\psi(n, i)\,(g)$ содержится в $A(n, i)$. Рассмотрим элементы f и f_1 подгруппы $A(n, i)$. Они совпадают с идентитетом на множестве $\Delta\setminus\Delta(n, i)$. Но равенство $\pi(n, i)\,(f)=g=\pi(n, i)\,(f_1)$ показывает, что f и f_1 совпадают также и на интервале $\Delta(n,i)$. Следовательно, $f=f_1=\psi(n, i)\,(g)\in\psi(n, i)\,(E)$, т. е. имеет место равенство $A(n, i)=\psi(n, i)\,(E)$. Теорема доказана.

Следствие 3.6. *Для каждого натурального* $n\geqq 2$ *и каждого* i, $1\leqq i\leqq 2^n$, *подгруппа* $A(n, i)$ *изоморфна нормальному делителю* E *группы* G. *Кроме того,* $A(n, i)$ *содержится в* E.

Доказательство. По предшествующей теореме, ограничение мономорфизма $\psi(n, i)$ на E является изоморфизмом подгруппы E на подгруппу $A(n, i)$.

Так как $A(m+1, 2j-1)$ и $A(m+1, 2j)$ содержатся в $A(m, j)$, то для доказательства включения $A(n, i)\subseteq E$ достаточно показать, что $A(2, 1)$, $A(2, 2)$, $A(2, 3)$ и $A(2, 4)$ содержатся в E.

Так как эти четыре подгруппы сопряжены в G, то достаточно доказать, что $A(2, 1)$ содержится в нормальном делителе E. Но из равенства $A(2, 1)=\psi(2, 1)\,(E)$ следует, что подгруппа $A(2, 1)$ порождается элементом $\psi(2, 1)\,((t, w))=(twt, vtvtv)$ как нормальный делитель подгруппы $\psi(2, 1)\,(G)$. Но, как нетрудно заметить, коммутатор $(twt, vtvtv)$ содержится в E. Следовательно, $A(2, 1)\subseteq E$. Следствие доказано.

Лемма 3.7. *Если* L*—любая подгрупа группы* $A(8, 1)$, *то* L *и элемент* $b=(tw)^8=(t, w)^4$ *порождают подгруппу* T, *изоморфную сплетению* $Lwr\langle b\rangle$, *а* $\psi(8, 1)\,(T)$ *является подгруппой группы* $A(8, 1)$.

Доказательство. По предложению 1.4, элемент tw имеет порядок 16. Следовательно, $b=(tw)^8$ является элементом порядка 2. Так как $b=(t, w)^4\in E$ и $L\subseteq A(8, 1)\subseteq E$ (следствие 3.6), то подгруппа $T=\langle L, b\rangle$ содержится в E. Поэтому подгруппа $\psi(8, 1)\,(T)$ содержится в $\psi(8, 1)\,(E)=A(8, 1)$.

Легко заметить, что $\pi(4, 1)\,(b)=t$, и, следовательно, имеют место равенства $b(\Delta(8, 1))=\Delta(8, 2)$, $bA(8, 1)b^{-1}=bA(8, 1)b=A(8, 2)$. Это показывает, что подгруппа T является полупрямым произведением своего нормального делителя $L\times bLb(L$

$\subseteq A(8, 1)$, $bLb \subseteq A(8, 2)$) на подгруппу порядка два $\langle b \rangle$ и что T изоморфна сплетению $Lwr\langle b \rangle$. Лемма доказана.

Теорема 3.8. *Пусть E — нормальный делитель группы Григорчука G, порожденный коммутатором (t, w), а $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — группы порядка два. Тогда сплетение $T_n = (\ldots((EwrB_1)wrB_2)\ldots)wrB_n$ вкладывается изоморфно в группу G.*

Доказательство. Индукцией по n мы докажем, что T_n вкладывается изоморфно в подгруппу $A(8, 1)$ группы G. Если $n=0$, то $T_0=E$, и, по следствию 3.6, она изоморфна подгруппе $A(8, 1)$. Допустим, что в $A(8, 1)$ существует подгруппа L, изоморфная группе T_{n-1}. Тогда, по лемме 3.7, подгруппа L и элемент $b=(tw)^8$ порядка два порождают подгруппу T, содержащуюся в E и изоморфную сплетению $Lwr\langle b \rangle$. Ясно, что подгруппа T изоморфна группе T_n. Тогда подгруппа $\psi(8, 1)(T)$ изоморфна группе T_n и она содержится в $A(8, 1)$, т. е. группа $T_n (n \geqq 0)$ вкладывается изоморфно в подгруппу $A(8, 1)$. Теорема доказана.

Хорошо известно, что любая конечная 2-группа вкладывается изоморфно в сплетение конечного числа групп порядка два. Поэтому непосредственно из предшествующей теоремы вытекает следующее следствие.

Следствие 3.9. *Любая конечная 2-группа вкладывается изоморфно в группу Григорчука.*

Предложение 3.10 *Для каждого $n \geq 0$ и каждого i, $1 \leqq i \leqq 2^n$, элемент $a(n, i) = \psi(n, i)((t, w))$ содержится в подгруппе $A(n, i)$. При $n \geqq 2$ элемент $a(n, i)$ порождает подгруппу $A(n, i)$ как нормальный делитель группы $M(n, i)$.*

Доказательство. Поскольку коммутатор $(t, w) \in E$ и, по лемме 3.3, $\psi(n, i)(E) \subseteq A(n, i)$, то $a(n, i) \in A(n, i)$.

Пусть $n \geqq 2$. Тогда $A(n, i) = \psi(n, i)(E)$ (теорема 3.5). Следовательно, элемент $a(n, i)$ порождает $A(n, i)$ как нормальный делитель подгруппы $\psi(n, i)(G) \subseteq M(n, i)$. Но $A(n, i)$ нормальна в $M(n, i)$. Следовательно, элемент $a(n, i)$ порождает $A(n, i)$ как нормальный делитель подгруппы $M(n, i)$.
Предложение доказано.

Замечание. Элемент $a(0, 1)=(t, w)$ порождает нормальный делитель E группы $G=A(0, 1)=M(0, 1)$, а элементы $a(1, 1)=(v, tut)=(w, tut)$, $a(1, 2)=(tvt, u)=(twt, u)$ порождают, соответственно, нормальные делители $U_2 \cap W$ и $U_1 \cap W$ подгруппы $H=M(1, 1)=M(1, 2)$. Следовательно, второе утверждение предшествующего предложения для $n=0$, 1 не выполняется.

4. О неединичных нормальных делителях группы Григорчука. Положим $b(n, i)=\psi(n, i)((t, w, t))$, $c(n, i)=\psi(n, i)((t, w, u))$. Так как тройные коммутаторы (t, w, t), (t, w, u) содержатся в нормальном делителе E, то, по лемме 3.3, элементы $b(n, i)$ и $c(n, i)$ содержатся в нормальном делителе $A(n, i)$ подгруппы $M(n, i)$. Обозначим через $D(n, i)$ нормальный делитель подгруппы $M(n, i)$, порожденный элементами $b(n, i)$ и $c(n, i)$. Тогда $D(n, i) \subseteq A(n, i)$. Пусть $D(n)$ — подгруппа, порожденная подгруппами $D(n, 1), D(n, 2), \ldots. D(n, 2^n)$. Так как $A(n)=A(n, 1) \times \ldots \times A(n, 2) \times \ldots \times A(n, 2^n)$, то подгруппа $D(n)$ является прямым произведением своих подгрупп $D(n, 1), D(n, 2), \ldots, D(n, 2^n)$ и $D(n) \subseteq A(n) \subseteq M(n)$.

Предложение 4.1. *a) Элементы $b(n, 1), b(n, 2), \ldots, b(n, 2^n)$ попарно сопряжены в группе G. Также элементы $c(n, 1), c(n, 2), \ldots, c(n, 2^n)$ попарно сопряжены в G;*

b) *Подгруппы $D(n, 1), D(n, 2), \ldots, D(n, 2^n)$ образуют полный класс сопряженных подгрупп группы G, а подгруппа $D(n)$ нормальна в G;*

c) *Любые два элемента $b(n, i)$ и $c(n, j)$, $1 \leqq i, j \leqq 2^n$, порождают $D(n)$ как нормальный делитель группы G.*

Доказательство. *a*) По лемме 2.12, в G существует элемент f, который является сдвигом интервала $\Delta(n, j)$ на интервал $\Delta(n, i)$. Тогда из предложения 2.13 следует, что $f^{-1}b(n, i)f=b(n, j)$, $f^{-1}c(n, i)f=c(n, j)$ и $f^{-1}D(n, i)f=D(n, j)$.

b) Мы уже получили, что элементы множества $V=\{D(n, i)\ i=1, 2, \ldots, 2^n\}$ попарно сопряжены в G. Остается доказать, что $g^{-1}D(n, i)g\in V$ для каждого элемента $g\in G$ и для каждого i, $1\leq i\leq 2^n$. Если g есть один из образующих t, u, v, w группы G, то из леммы 2.4 и из предложения 2.13 следует, что $g^{-1}D(n, i)g$ содержится в множестве V. Далее, очевидной индукцией по длине записи элемента g через образующие группы G получается, что $g^{-1}D(n, i)g\in V$.

Утверждение c) является очевидным следствием первых двух утверждений.

Предложение 4.2. *Нормальный делитель D группы G, порожденный тройными коммутаторами $b=(t, w, t)$ и $c=(t, w, u)$, имеет конечный индекс в G.*

Доказательство. По следствию 1.13, коммутант W' нормального делителя W группы G имеет индекс $[G\colon W']\leq 2^7$ и порождается как нормальный делитель группы G двумя коммутаторами $f_1=(w, twt)$ и $f_2=(w, tutwtut)$. Нетрудно подсчитать, что $f_1=b\in D$ и $f_2=(vtw)^{-1}.c^2.vtw\in D$. Следовательно, коммутант W' содержится в D и $[G:D]\leq[G:W']\leq 2^7$. Предложение доказано.

Предложение 4.3. *Для каждого $n\geq 0$ нормальный делитель $D(n)$ имеет конечный индекс в группе G.*

Доказательство. Если $n=0$, то $D(0)=D$, где D — нормальный делитель, рассмотренный в предложении 4.2. Поэтому в этом случае выполняется неравенство $[G\colon D(0)]=[G\colon D]\leq 2^7$.

Пусть $n>0$. Так как $M(n)$ имеет конечный индекс в G (следствие 2.7), то нам достаточно доказать, что индекс $[M(n)\colon D(n)]$ конечен. Пусть G — группа, изоморфная группе G и $\mu_i\colon G\to G_i$ — некоторый фиксированный изоморфизм. Обозначим через D_i образ нормального делителя D при изоморфизме μ_i, т. е. $D_i=\mu_i(D)$, а через τ_i обозначим композицию $\mu_i\pi(n, i)$, $i=1, 2, \ldots, 2^n$. Так как подгруппа $D(n, j)$ при $j\neq i$ содержится в ядре $\operatorname{Ker}\pi(n, i)$ и $\langle 1\rangle=D(n, i)\cap\operatorname{Ker}\pi(n, i)$, то гомоморфизм $\tau_i=\mu_i\pi(n, i)$ отображает изоморфно $D(n, i)$ на D_i. Кроме того, мы имеем очевидное равенство $\bigcap_{i=1}^{2^n}\operatorname{Ker}\pi(n, i)=\langle 1\rangle$. Следовательно, гомоморфизмы $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2^n}$ индуцируют мономорфизм τ подгруппы $M(n)$ в прямое произведение $F=G_1\times G_2\times\ldots\times G_{2^n}$. При этом мономорфизме подгруппа $D(n,i)$ отображается на $D_i\subset G_i$, а нормальный делитель $D(n)=D(n,1)\times D(n,2)\times\cdots\times D(n,2^n)$ — на прямое произведение $B=D_1\times D_2\times\cdots\times D_{2^n}\subset F$. Таким образом, мы имеем $\tau(D(n))=B\subseteq\tau(M(n))\subseteq F$. Но из неравенств $[G_i\colon D_i]\leq 2^7$ следует, что $|F/B|\leq(2^7)^{2^n}$. Поэтому мы имеем $|M(n)/D(n)|=|\tau(M(n)/B|\leq|F/B|\leq(2^7)^{2^n}$, т. е. $D(n)$ имеет конечный индекс в $M(n)$. Предложение доказано.

Лемма 4.4. *Пусть S — произвольный неединичный нормальный делитель группы G. Тогда существует элемент s в S и такой интервал $\Delta(n, i)$ в Δ, что его половины $\Delta(n+1, 2i-1)$ и $\Delta(n+1, 2i)$ инвариантны относительно s и s действует на них соответственно как преобразования t и u, т. е. $\pi(n+1, 2i-1)(s)=t$ и $\pi(n+1, 2i)(S)=u$.*

Доказательство. Пусть f — произвольный неединичный элемент нормального делителя S. По лемме 2.3, существует натуральное число m такое, что $f\in M(m)$ и для некоторого k, $1\leq k\leq 2^m$, элемент $g=\pi(m, k)(f)$ — нечетный, т. е. $g=th$, $h\in H$. По предложению 2.11, в подгруппе $M(m, k)$ существует элемент a со свойством $\pi(m, k)(a)=u$. Положим $s=(f, a)$. Так как $f\in S\cap M(m)$ и это сечение есть нормальный делитель группы G, то s содержится $S\cap M(m)$. Кроме того, мы имеем $\pi(m, k)(s)=(th, u)=h^{-1}tuthu$ и $\varphi_2(\pi(m, k)(s))=\varphi_2(h)^{-1}\varphi_2(tut)\varphi_2(h)\varphi_2(u)=w$. Следовательно, элемент s действует на правую половину интервала $\Delta(m, k)$ как преобразование w. Так как $\varphi_2(w)=v$, то $s\in M(m+2, 4k)$ и $\pi(m+2, 4k)(s)=v$. Но $\varphi_1(v)=t$ и $\varphi_2(v)=u$. Это означает, что выполняются равенства $\pi(m+3, 8k-1)(s)=t$ и $\pi(m+3, 8k)(s)=u$. Следовательно, для $n=m+2$, $i=4k$ и для выбранного элемента s выполняются все утверждения леммы.

Лемма 4.5. *Для каждого нееденичного нормального делителя S группы G существует натуральное число n такое, что нормальный делитель $D(n)$ содержится в S.*

Доказательство. По предшествующей лемме, в S существует такой элемент s, что для подходящих n, i, j элемент $s \in M(n, i) \cap M(n, j)$ и $\pi(n, i)(s) = t$, $\pi(n, j)(s) = u$. Рассмотрим коммутаторы $f = (a(n, i), s)$ и $g = (a(n, j), s)$, где $a(n, i)$, $a(n, j)$ — элементы, определенные в следствии 3.6. Ясно, что элементы f, g содержатся в нормальном делителе S. Но $s \in M(n, i) \cap M(n, j)$, а подгруппа $A(n, i)$ — нормальна в $M(n, i)$ и подгруппа $A(n, j)$ — нормальна в $M(n, j)$. Следовательно, f содержится в $A(n, i)$, а g содержится в $A(n, j)$. Кроме того, из соответствующих свойств элементов s, f, g вытекают непосредственно равенства $\pi(n, i)(f) = (t, w, t)$ и $\pi(n, j)(g) = (t, w, u)$. Следовательно, $f = b(n, i)$ и $g = c(n, j)$ (см. следствие 3.7). Итак, элементы $b(n, i)$ и $c(n, j)$ содержатся в S. По предложению 4.1, эти два элемента порождают нормальный делитель $D(n)$. Следовательно, $D(n) \subseteq S$. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 4.5 и из предложения 4.3 вытекает следующая теорема Р. И. Григорчука ([5], теорема 8.1).

Теорема 4. 6. *Каждый нееденичный нормальный делитель группы Григорчука G имеет конечный индекс в G.*

5. О фундаментальном идеале групповой алгебры группы Григорчука. Пусть KG групповая алгебра группы Григорчука G над полем K характеристики два. В этом параграфе мы докажем, что фундаментальный идеал $\omega(KG)$ групповой алгебры KG не является ниль-идеалом. Точнее, мы покажем, что элементы $a_1 = vt + wt$, $a_2 = tv + tw$, $a_3 = ut + wt$, $a_4 = tu + tw$, $a_5 = ut + vt$, $a_6 = tu + tv$ фундаментального идеала $w(KG)$ не являются нильпотентными элементами.

Если $g \in G$, то элемент g может иметь много записей через образующие t, u, v, w группы G. Через $\lambda_t(g)$ будем обозначать минимальное число участий элемента t во всевозможных записях элемента g через t, u, v и w. Число $\lambda_t(g)$ будем называть t-длиной элемента g. Ясно, что $\lambda_t(g)$ — четное число тогда и только тогда, когда $g \in H$.

Рассмотрим следующие двуэлементные подмножества группы G: $C_1 = \{vt, wt\}$, $C_2 = \{tv, tw\}$, $C_3 = \{ut, wt\}$, $C_4 = \{tu, tw\}$, $C_5 = \{ut, vt\}$, $C_6 = \{tu, tv\}$. Через G_i обозначим подгруппу группы G, порожденную множеством C_i, т. е. $G_i = \langle C_i \rangle$, $1 \leq i \leq 6$. Легко заметить, что $G_{2i-1} = G_{2i}$, $i = 1, 2, 3$, и что эти подгруппы имеют индекс два в G, но это нам не понадобится в дальнейшем.

Если $g \in G_i$, то через $\lambda_i(g)$ будем обозначать минимальное число участий двух элементов множества C_i во всевозможных записях элемента g через них. Ясно, что $\lambda_t(g) \leq \lambda_i(g)$.

Определение 5.1. *Будем говорить, что элемент g подгруппы G_i является C_i-стабильным словом длины n, если $\lambda_t(g) = \lambda_i(g) = n$ и элемент g имеет одну единственную запись длины n через элементы множества C_i.*

Например, элементы множества C_i являются C_i-стабильными длины 1.

Лемма 5.2. *Элемент g подгруппы G_{2i-1} $(i = 1, 2, 3)$ является C_{2i-1}-стабильным тогда и только тогда, когда g^{-1} является C_{2i}-стабильным. Притом $\lambda_{2i-1}(g) = \lambda_{2i}(g^{-1})$.*

Доказательство. Так как элементы множества C_{2i-1} обратны элементам множества C_{2i}, то $\lambda_{2i-1}(g) = \lambda_{2i}(g^{-1})$. Кроме того, равенство $\lambda_t(g) = \lambda_t(g^{-1})$ вытекает из того факта, что элементы t, u, v, w имеют порядок 2. Следовательно, равенство $\lambda_t(g) = \lambda_{2i-1}(g)$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\lambda_t(g^{-1}) = \lambda_{2i}(g^{-1})$.

Каждой записи $g = x_1 x_2 \ldots x_r$ элемента g длины r через элементы $x_j \in C_{2i-1}$ соответствует запись $g^{-1} = x_r^{-1} x_{r-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}$ элемента g^{-1} длины r через $x_j^{-1} \in C_{2i}$. Следовательно, элемент g имеет единственную запись длины r через элементы множества C_{2i-1} тогда и только тогда, когда g^{-1} имеет единственную запись длины r через элементы множества C_{2i}. Из этого вытекает утверждение леммы.

Следствие 5.3. *Если существует C_{2i-1}-стабильное слово длины n, то существует и C_{2i}-стабильное слово той же длины n, $i = 1, 2, 3$.*

Лемма 5.4. *Пусть f — C_1-стабильное слово длины n. Если в единственной записи элемента f длины n через vt и wt совершим замену vt на $wtwt$ и wt на $\bar{u}twt$, то полученный элемент g является C_3-стабильным словом длины $2n$.*

Доказательство. Ясно, что элемент g записан через ut и wt и полученная запись имеет длину $2n$. Следовательно, $\lambda_t(g) \leqq \lambda_3(g) \leqq 2n$ Кроме того, g — четный элемент, и поэтому $\lambda_t(g)$ — четное число. Как нам известно (см. табл. 1) при проектировании t-длина четного элемента уменьшается как минимум два раза, т. е. $\lambda_t(\varphi_2(g)) \leqq \lambda_t(g)/2$. Поскольку $\varphi_2(wtwt) = vt$ и $\varphi_2(utwt) = wt$, то $\varphi_2(g) = f$, т. е. $\lambda_t(\varphi_2(g)) = \lambda_t(f) = n \leqq \lambda_t(g)/2$. Следовательно, $\lambda_t(g) = \lambda_3(g) = 2n$.

Пусть $g = x_1 x_2 \cdots x_{2n-1} x_{2n}$ $(x_j \in C_3)$ — любая запись элемента g длины $2n$ через элементы ut и wt. Тогда $g = y_1 y_2 \cdots y_n$, где $y_i = x_{2i-1} x_{2i}$ есть один из элементов $wtwt$, $utwt$, $wtut$, $utut$. Если хотя бы один из y_i совпадает с $wtut$ или с $utut$, то, поскольку $\varphi_2(wtut) = v$ и $\varphi_2(utut) = w$, мы получим, что $\varphi_2(g) = f$ имеет t-длину меньше, чем n. Следовательно, y_i могут быть только $wtwt$ или $utwt$. Заметим теперь, что $f = \varphi_2(g) = \varphi_2(y_1)\varphi_2(y_2) \cdots \varphi_2(y_n)$ есть запись C_1-стабильного слова f через $\varphi_2(y_i) \in C_1$. Следовательно, $y_i = wtwt$ тогда и только тогда, когда на i том месте в записи f мы имеем tw, т. е. запись $g = x_1 x_2 \cdots x_{2n}$ обязательно совпадает с записью элемента g, полученную первоначально, а g является C_3-стабильным словом длины $2n$. Лемма доказана.

Совершенно аналогично доказываются и следующие две леммы.

Лемма 5.5. *Пусть g — C_3-стабильное слово длины n. Если в единственной записи длины n элемента g через ut, wt совершим замену ut на $vtvt$ и wt на $utvt$, то полученный элемент h является C_5-стабильным словом длины $2n$.*

Лемма 5.6. *Пусть g — C_5-стабильное слово длины n. Если в единственной записи длины n элемента g через ut, vt совершим замену ut на $vtvt$ и vt на $wtwt$, то полученный элемент h является C_1-стабильным словом длины $2n$.*

Теорема 5.7. *Для каждого натурального $n \geqq 1$ и каждого i, $1 \leqq i \leqq 6$, в подгруппе G_i существует C_i-стабильное слово длины n.*

Доказательство. Легко заметить, что каждое C_i-подслово C_i-стабильного слова также является C_i-стабильным. Поэтому, если существует C_i-стабильное слово длины $m \geqq 1$, то существует и C_i-стабильное слово длины k, $1 \leqq k \leqq m$.

Если мы уже доказали, что существуют C_1-стабильные слова длины $\leqq m$, то, по лемме 5.4, существуют C_3-стабильные слова длины $\leqq 2m$, по лемме 5.5 будут тогда существовать C_5-стабильные слова длины $\leqq 4m$ и по лемме 5.6 существуют C_1-стабильные слова длины $\leqq 8m$. Применением еще леммы 5.2 мы, очевидно, получаем утверждение теоремы.

Теорема 5.8. *Фундаментальный идеал $\omega(KG)$ групповой алгебры KG группы Григорчука над полем K характеристики два не является ниль-идеалом.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $a_1 = vt + wt$ фундаментального идеала алгебры KG. Ясно, что для каждого $n \geqq 1$ a_1^n есть сумма всех 2^n n-местных слов от vt и wt. По теореме 5.7, среди этих слов существуют C_1-стабильные слова длины n. Но если g — C_1-стабильное слово длины n, то g не равняется как элемент группы G никакому из остальных n-местных слов от vt и wt. Следовательно, элемент a_1^n групповой алгебры G не равен нулю, т. е. a_1 не является нильпотентным элементом. Теорема доказана.

Замечание. Из доказаннных результатов вытекает также, что элементы $a_2 = tv + tw$, $a_3 = ut + wt$, $a_4 = tu + tw$, $a_5 = ut + vt$, $a_6 = tu + tv$ не являются нильпотентными элементами. Очевидно, доказательство теоремы 5.8 остается в силе для любого кольца с единицей. Но мы предпочли сформулировать эту теорему только для полей характеристики два — единственный случай, который, на наш взгляд, представляет интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. С. Голод. О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **28**, 1964, № 2, 273-276.
2. П. С. Новиков, С. И. Адян. Бесконечные периодические группы I, II, III. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **32**, 1968, 212-244, 251-524, 709-731.
3. С. В. Алёшин. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах. *Матем. заметки*, **11**, 1972, № 3, 319-328.
4. В. И. Сущанский. Периодические p-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда *Доклады АН СССР*, **247**, 1979, № 3, 557-561.
5. Р. И. Григорчук. К проблеме Бернсайда о периодических группах. *Функц. анализ и его прилож.*, **14**, 1980, № 1, 53-54.
6. Р. И. Григорчук. Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **48**, 1984, № 5, 939-985.
7. Р. И. Григорчук. О степенях роста p-групп и групп без кручения. *Матем. сб.*, **126**, 1985, № 2, 194-214.
8. А. Ю. Ольшанский. Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка. *Алгебра и логика*, **21**, 1982, № 5, 553-618.
9. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М., 1982.
10. N. Gupta, S. Sidki. On the Burnside Problem for Periodic Groups. *Math. Z.*, **182**, 1983, 385-388.
11. N. Gupta, S. Sidki. Some infinite p-groups. *Алгебра и логика*, **22**, 1983, № 5, 584-589.

Поступила 03. 02. 1989 г.

Математический институт
Болгарской академии наук
София 1090 П. Я. 373