Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

ИДЕАЛЫ СКРЕЩЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ

К. Х. КОЛИКОВ

Пусть G — произвольная группа, K — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, а $K_\rho G$ — скрещенное групповое кольцо [1] группы G и кольца K при системе факторов

$$\rho = \{\rho_{g,h} \mid \rho_{g,h} \in K^*;\ g, h \in G\},$$

где K^* — мультипликативная группа кольца K. Таким образом, $K_\rho G$ есть векторное пространство над K с базисом $\{t_g \mid g \in G\}$ и умножением, определенным равенством $t_g t_h = \rho_{g,h} t_{gh}$ $(g, h \in G)$, которое продолжается линейно на $K_\rho G$.

Как и в теории групповых колец, здесь находятся связи между подгруппами группы G и идеалами скрещенного группового кольца $K_\rho G$. Доказывается, что некоторые факторкольца кольца $K_\rho G$ представляются в виде обыкновенных групповых колец. Основные результаты этой работы анонсированы в [2] и составляют главу 1 диссертации автора [3].

Пусть V — фиксированная система образующих группы G (это будем обозначать через $G = \langle V \rangle$). Если $|g|$ — порядок произвольного элемента g группы G, Z — кольцо целых рациональных чисел, то выбираем новый базис $\{\bar{t}_g\}$ скрещенного группового кольца $K_\rho G$, полагая

$$\bar{t}_1 = \rho_{1,1}^{-1} t_1 \text{ и } \bar{t}_{a^k} = t_a^k\ (a \in V, k \in \mathrm{Z}),$$

где при $|a| = n$, $k \in [0, n-1]$. Тогда нетрудно увидеть, что

$$\bar{t}_1 \bar{t}_1 = \bar{t}_1 \text{ и } \bar{t}_{a^k} \bar{t}_{a^l} = \bar{t}_{a^{k+l}}\ (a \in V;\ k, l \in \mathrm{Z}),$$

где при $|a| = n$, $k, l \geqq 0$ и $k + l \in [0, n-1]$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что система факторов ρ удовлетворяет условию

$$\rho_{a^k, a^l} = 1\ (a \in V;\ k, l \in \mathrm{Z}), \tag{1}$$

где при $|a| = n$, $k, l \geq 0$ и $k + l \in [0, n-1]$.

Далее, если $V^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in V\}$, то каждый элемент $g \in G$ записывается разными способами в виде

$$g = a_1 a_2 \ldots a_s\ (a_i \in V \cup V^{-1},\ i = 1, 2, \ldots, s). \tag{2}$$

При этом в записи элемента g могут участвовать и множители вида $a\,a^{-1}$ $(a \in V \cup V^{-1})$. Кроме того, ясно, что

$$t_{a_1 a_2 \ldots a_s} = \rho_{a_1, a_2} \rho_{a_1 a_2, a_3} \ldots \rho_{a_1 a_2 \ldots a_{s-1}, a_s} t_{a_1} t_{a_2} \ldots t_{a_s}.$$

Пусть $V(g)$ множество всех слов над V, которые соответствуют разным представлениям (2) элемента $g \in G$. Тогда для любого $a \in V \cup V^{-1}$ и любого $v(g) = a_1 a_2 \dots a_s \in V(g)$ обозначим

$$\eta_a = \eta_1 = 1, \quad \eta_{v(g)} = \rho_{a_1, a_2} \rho_{a_1 a_2, a_3} \dots \rho_{a_1 a_2 \dots a_{s-1}, a_s}. \tag{3}$$

Отметим, что $\eta_{v_1(g)}$ и $\eta_{v_2(g)}$ могут быть разными, если $v_1(g) \neq v_2(g)$. Так как система факторов ρ включается в $K^* \cap Z(K)$, где $Z(K)$ — центр кольца K, то $\eta_{v(g)} \in K^* \cap Z(K)$ для каждого $v(g) \in V(g)$.

Пусть $g, g' \in G$ и $v(g) = a_1 a_2 \dots a_s \in V(g), v(g') = b_1 b_2 \dots b_l \in V(g')$. Тогда $v(g)v(g') \in V(gg')$ и из (3) получаем $\eta_{v(g)v(g')} t_{gg'} = t_{a_1} t_{a_2} \dots t_{a_s} t_{b_1} t_{b_2} \dots t_{b_l} = \eta_{v(g)} t_g \eta_{v(g')} t_{g'} = \eta_{v(g)} \eta_{v(g')} \rho_{g,g'} t_{gg'}$. Следовательно, имеем

$$\eta_{v(g)v(g')} = \eta_{v(g)} \eta_{v(g')} \rho_{g,g'}. \tag{4}$$

Из этой формулы вытекает, что для любых слов $v(g) \in V(g), v(h) \in V(h)$ и $v(g') \in V(g')$ $(g, h, g' \in G)$ выполняется равенство $\eta_{v(g)v(h)v(g')} = \eta_{v(g)} \eta_{v(h)} \eta_{v(g')} \rho_{h,g'} \rho_{g,hg'}$. В частности, если $h = 1$, то

$$\eta_{v(g)v(1)v(g')} = \eta_{v(g)v(g')} \eta_{v(1)}, \tag{5}$$

где мы снова изпользовали (4).

Справедлива следующая

Лемма 1. *Если* $v(g) = a_1 a_2 \dots a_s \in V(g)$, *то* $\eta_{v(g)v(g)^{-1}} = \eta_{a_1 a_1^{-1}} \eta_{a_2 a_2^{-1}} \dots \eta_{a_s a_s^{-1}}$, *где для каждого* $a_i \in V \cup V^{-1}$

$$\eta_{a_i a_i^{-1}} = \begin{cases} 1, & \textit{при } |a_i| = \infty, \\ \rho_{a_i, a_i^{n-1}}, & \textit{при } |a_i| = n. \end{cases}$$

Доказательство. Если $a_i \in V \cup V^{-1}$, то из (3) следует, что $\eta_{a_i a_i^{-1}} = \rho_{a_i, a_i^{-1}}$ Но $\rho_{a_i, a_i^{-1}} = \rho_{a_i, a_i^{n-1}}$ при $|a_i| = n$, а при $|a_i| = \infty$, согласно (1), $\rho_{a_i, a_i^{-1}} = 1$. Кроме того, в силу (5), $\eta_{v(g)v(g)^{-1}} = \eta_{a_1 a_2 \dots a_{s-1} a_{s-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}} \eta_{a_s a_s^{-1}}$ и индуктивно мы устанавливаем справедливость леммы.

Пусть $a \in V$ и $|a| = n$. Тогда из (1) получаем $\eta_{a^n} = \rho_{a^{n-1}, a}$ и так как $\rho_{g, g^{-1}} = \rho_{g^{-1}, g}$ для каждого $g \in G$, то выполняются равенства

$$\eta_{a^n} = \eta_{aa^{-1}} = \eta_{a^{-1}a}. \tag{6}$$

Далее, пусть $G = \langle V \rangle$ и $F = F^V$ — множество всех слов над V, участвующих в системе определяющих соотношений группы G, содержащей все соотношения вида

$$a^n = 1 \quad (a \in V, \ |a| = n). \tag{7}$$

Известно [4, с. 110], что каждое соотношение в группе G записывается как конечное произведение

$$\prod_j h_j f_j^{n_j} h_j^{-1}, \tag{8}$$

где $h_j \in G$, $f_j \in F$ и $n_j \in \mathbb{Z}$. Тогда, если $v(1) \in V(1)$, то $v(1)$ является произведением слов из (8) и, быть может, aa^{-1}, где $a \in V \cup V^{-1}$. Поэтому, в силу (5), (6) и леммы 1, легко получаем

(9) $$\eta_{v(1)}=\eta_{f_1}^{\varepsilon_1}\eta_{f_2}^{\varepsilon_2}\ldots\eta_{f_s}^{\varepsilon_s},$$

где $f_i\in F$, а $\varepsilon_i=\pm 1$ $(i=1, 2, \ldots, s)$. Это нам понадобится для доказательства следующих трех лемм.

Лемма 2. *Если $g\in G$ и $v_1(g)$, $v_2(g)\in V(g)$, то*

$$\eta_{v_1(g)}=\eta_{f_1}^{\varepsilon_1}\eta_{f_2}^{\varepsilon_2}\ldots\eta_{f_k}^{\varepsilon_k}\eta_{v_2(g)},$$

где $f_i\in F$, а $\varepsilon_i=\pm 1$ $(i=1,2,\ldots,k)$.

Доказательство. Пусть $v_1=v_1(g)\in V(g)$ и $v_2(g)\in V(g)$. Тогда $v_1v_1^{-1}$ и $v_1^{-1}v_2$ являются элементами $V(1)$ и поэтому, согласно (5), $\eta_{v_1v_1^{-1}}\eta_{v_2}=\eta_{v_1v_1^{-1}v_2}=\eta_{v_1}\eta_{v_1^{-1}v_2}$. Отсюда следует $\eta_{v_1}=\eta_{v_1v_1^{-1}}\eta^{-1}_{v_1^{-1}v_2}\eta_{v_2}$, так как $\eta_{v(g)}\in Z(K)$ для каждого $v(g)\in V(g)$. Теперь утверждение получается из (9).

Далее рассмотрим в кольце K множество всех конечных сумм

(10) $$E(F^V)=\{\sum_{f\in F^V}\alpha_f(\eta_f-1)\,|\,\alpha_f\in K\}.$$

Так как элементы η_f принадлежат центру $Z(K)$ кольца K, то $E(F^V)$ является двусторонним идеалом K, который порождается элементами $\{\eta_f-1\,|\,f\in F^V\}$.

Справедлива следующая

Лемма 3. *Для каждого $v(1)\in V(1)$ имеем $\eta_{v(1)}-1\in E(F^V)$.*

Действительно, в силу (9) и равенства $ab-1=a(b-1)+a-1$ получаем

$$\eta_{v(1)}-1=\sum_{f\in F^V}\alpha_f(\eta_f^{\varepsilon_f}-1),$$

где $f\in F^V$ и $\varepsilon_f=\pm 1$. Однако, $\eta_f^{-1}-1=-\eta_f^{-1}(\eta_f-1)$ и поэтому $\eta_{v(1)}-1\in E(F^V)$. Лемма доказана.

Если Q^V множество всех слов над V, которые участвуют в другой системе определяющих соотношений группы G, содержащей соотношения вида (7), то последняя лемма непосредственно показывает, что $E(Q^V)=E(F^V)$. Следовательно, идеал (10) не зависит от выбора системы определяющих соотношений группы G, содержащей соотношения вида (7), и поэтому этот идеал будем обозначать через E^V.

Имея в виду лемму 2, следующее утверждение доказывается как лемма 3.

Лемма 4. *Для всех $g\in G$ и $v_1(g), v_2(g)\in V(g)$ имеем $\eta_{v_1(g)}-\eta_{v_2(g)}\in E^V$.*

Пусть χ — гомоморфизм группы G в группу $K^*\cap Z(K)$. Если H — подгруппа группы G, то в $K_\rho G$ образуем подмножество всех конечных сумм

$$I_r(H,\chi)=\{\sum_{h\in H,\ v(h)\in V(h)}(\eta_{v(h)}t_h-\chi(h)t_1)z_h\,|\,z_h\in K_\rho G\}.$$

Очевидно, $I_r(H,\chi)$ является правым идеалом кольца $K_\rho G$, который порождается элементами $\eta_{v(h)}t_h-\chi(h)t_1$, где h пробегает H, а $v(h)$ пробегает множество $V(h)$.

Пусть для каждого элемента $h\in H$, $\bar{h}$ обозначает одно фиксированное его представление из $V(h)$. Тогда для любого слова $v(h)\in V(h)$, согласно лемме 2, находим

$$\eta_{v(h)}=\eta_{f_1}^{\varepsilon_1}\eta_{f_2}^{\varepsilon_2}\ldots\eta_{f_k}^{\varepsilon_k}\eta_{\bar{h}},$$

где $f_i\in F^V$ и $\varepsilon_i=\pm 1$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. Следовательно, $\eta_{v(h)}t_h-\chi(h)t_1=\eta_{f_1}^{\varepsilon_1}\eta_{f_2}^{\varepsilon_2}\ldots\eta_{f_k}^{\varepsilon_k}\times(\eta_{\bar{h}}t_h-\chi(\bar{h})t_1)+\chi(\bar{h})(\eta_{f_1}^{\varepsilon_1}\eta_{f_2}^{\varepsilon_2}\ldots\eta_{f_k}^{\varepsilon_k}-1)t_1$. И здесь, как и в лемме 3, заключаем, что $\eta_{f_1}^{\varepsilon_1}\eta_{f_2}^{\varepsilon_2}\ldots\eta_{f_k}^{\varepsilon_k}-1\in E^V$. Кроме того, $\chi(\bar{h})=\chi(h)$ и поэтому

$$\eta_{v(h)}t_h - \chi(h)t_1 = \delta(\eta_{\bar{h}}\, t_h - \chi(h)t_1) + \gamma t_1, \tag{11}$$

где $\delta \in K^* \cap Z(K)$ и $\gamma \in E^V$.

Таким образом, если в $K_\rho G$ рассмотрим правый идеал

$$\bar{I}_r(H, \chi) = \{\sum_{1 \neq h \in H} (\eta_{\bar{h}}\, t_h - \chi(h)t_1)z_h \mid z_h \in K_\rho G\}$$

и идеал $E^V(K_\rho G) = \{\sum_{g \in G} \gamma_g t_g \mid \gamma_g \in E^V\}$, то

$$I_r(H, \chi) = \bar{I}_r(H, \chi) + E^V(K_\rho G). \tag{12}$$

Пусть теперь $\Pi(G/H)$ — полная система представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H. Тогда для каждого элемента $g = h'u \in G$ $(u \in \Pi(G/H))$ следует, что

$$(\eta_{v(h)}t_h - \chi(h)t_1)t_g = (\eta_{v(h)}t_h - \chi(h)t_1)\rho^{-1}_{h', u} t_{h'} t_u$$

$$= [(\eta_{v(h)}\, \eta_{v(h')}\, t_h\, t_{h'} - \chi(h)\chi(h')t_1) - \chi(h)(\eta_{v(h')}\, t_{h'} - \chi(h')t_1)]t_u\, \eta_{v(h')}\, \rho^{-1}_{h', u}.$$

Отсюда и из (4) выходит, что $(\eta_{v(h)}t_h - \chi(h)t_1)t_g = [(\eta_{v(h)v(h')}\, t_{hh'} - \chi(hh')t_1) - \chi(h)(\bar{\eta}_{v(h')}\, t_{h'} - \chi(h')t_1)]t_u\, \eta^{-1}_{v(h')},\ \rho^{-1}_{h', u}$. Так как $\eta_{v(h)}$ и $\chi(h)$ принадлежат центру $Z(K)$ кольца K, то ясно, что $I_r(H, \chi)$ является не только правым, но и левым K-модулем. Поэтому, на основании предыдущего равенства и (12) заключаем, что справедлива следующая

Лемма 5. *K-модуль $I_r(H, \chi)$ представляется в виде прямой суммы*

$$I_r(H, \chi) = \sum_{1 \neq h \in H, u \in \Pi(G/H)} \oplus \langle(\eta_{\bar{h}} t_h - \chi(h)t_1)t_u\rangle \oplus \sum_{u \in \Pi(G/H)} \oplus E^V t_u,$$

где $\bar{h}$ — фиксированный элемент множества $V(h)$, а $\langle(\eta_{\bar{h}} t_h - \chi(h)t_1)t_u\rangle$ — цикличный K-модуль.

Теперь рассмотрим необходимые и достаточные условия, при которых идеал $I_r(H, \chi)$ является собственным идеалом кольца $K_\rho G$. Точнее, справедлива следующая

Лемма 6. *Если $G = \langle V \rangle$ и H — произвольная подгруппа группы G, то $I_r(H, \chi) \neq K_\rho G$ тогда и только тогда, когда $E^V \neq K$. В этом случае отображение, которое сопоставляет каждой подгруппе H идеал $I_r(H, \chi)$, является взаимно однозначным отображением.*

Доказательство. Пусть $I_r(H, \chi) \neq K_\rho G$. Если $E^V = K$, то, согласно определению идеала E^V, единица 1 кольца K представляется в виде

$$1 = \sum_{f \in F^V} \alpha_f(\eta_f - 1) \quad (\alpha_f \in K).$$

Отсюда следует, что

$$t_1 = \sum_{f \in F^V} \alpha_f(\eta_f t_1 - t_1) \in I_r(H, \chi),$$

а это противоречит предположению.

Обратно, пусть теперь $E^V \neq K$ и пусть $t_1 \in I_r(H, \chi)$ для некоторой подгруппы H группы G. Тогда, по лемме 5

$$t_1 = \sum_{u \in \Pi(G/H)} [\sum_{1 \neq h \in H} \alpha^{(u)}_h(\eta_{\bar{h}} t_h - \chi(h)t_1) + \gamma^{(u)}t_1]t_u,$$

где $\gamma^{(u)} \in E^V$. Очевидно, это равенство возможно только тогда, когда каждое u равно единице, а отсюда сразу выходит, что $\gamma^{(1)} = 1$. Однако это противоречит условию $E^V \neq K$. Значит, $I_r(H, \chi) \neq K_\rho G$.

Теперь докажем вторую часть леммы. Пусть H_1 и H_2 — произвольные подгруппы G. Так как из $H_1=H_2$ следует $I_r(H_1,\chi)=I_r(H_2,\chi)$, то остается доказать, что $H_1\neq H_2$ влечет за собой $I_r(H_1,\chi)\neq I_r(H_2,\chi)$.

Пусть $H_1\neq H_2$ и пусть $v\in H_1$ и $v\bar{\in} H_2$. Тогда можно включить v в полную систему представителей правых смежных классов группы G по H_2. Ясно, что $x=\eta_v t_{\bar{v}}-\chi(v)t_1\in I_r(H_1,\chi)$. Если $x\in I_r(H_2,\chi)$, то по лемме 5

$$x=\sum_{u\in\Pi(G/H_2)}\Big[\sum_{1\neq h\in H_2}\alpha_h^{(u)}(\eta_{\bar{h}}t_h-\chi(h)t_1)+\gamma^{(u)}t_1\Big]t_u,$$

где $\gamma^{(u)}\in E^V$. Отсюда, сравнивая коэффициенты перед t_1, получаем, что $\gamma^{(1)}=-\chi(v)\in K^*$. Это противоречит условию $E^V\neq K$ и поэтому $I_r(H_1,\chi)\neq I_r(H_2,\chi)$. Лемма доказана.

Теперь приведем два примера, показывающие существование скрещенных групповых колец, для которых выполняется условие $E^V\neq K$ предыдущей леммы.

1. $\mathbb{Z}_\rho G$, где $G=\langle V\rangle$ — произвольная группа, а $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел. Действительно, в этом случае $E^V=0$ или $E^V=2\,\mathbb{Z}$.

2. Каждое $K_\rho G$ с системой факторов вида $\rho_{g,h}=d_{g,h}+1$, где $g,\ h\in G=\langle V\rangle$, а элементы $d_{g,h}$ являются центральными и пренадлежат собственному идеалу кольца K. В этих условиях нетрудно вывести, что $E^V\neq K$.

Далее, приведем три леммы, обобщающие (и доказывающиеся аналогичным способом) хорошо известные результаты из теории групповых колец (см., например, [5, с. 235 — 236]). Доказательства этих лемм можно найти в [3]; в силу их громоздкости и сказанного выше, мы здесь их не приводим.

Лемма 7. *Пусть $H=\langle W\rangle$ — подгруппа группы $G=\langle V\rangle$. Тогда $I_r(H,\chi)=I_r^*(H,\chi)+E^V(K_\rho G)$, где*

$$I_r^*(H,\chi)=\{\sum_{b\in W\cup W^{-1}}(\eta_{v(b)}t_b-\chi(b)t_1)z_b\mid z_b\in K_\rho G\}.$$

Если в этой лемме $W\subseteq V$, то, согласно (3), $\eta_{v(b)}=1$ для каждого $b\in W\cup W^{-1}$. Следовательно, в этом случае $I_r^*(H,\chi)=\langle t_b-\chi(b)\,t_1\mid b\in W\cup W^{-1}\rangle$. Поэтому, если $H=G$, то

$$I_r(G,\chi)=I_r^*(G,\chi)+E^V(K_\rho G),$$

где $I_r^*(G,\chi)=\langle t_a-\chi(a)\,t_1\mid a\in V\cup V^{-1}\rangle$.

Аналогично правому идеалу $I_r(H,\chi)$ определяем и левый идеал

$$I_e(H,\chi)=\{\sum_{h\in H,\ v(h)\in V(h)}z_h(\eta_{v(h)}t_h-\chi(h)t_1)\mid z_h\in K_\rho G\}.$$

Далее, если R — произвольное кольцо и $A\subseteq R$, обозначим через $l(A)$ и $r(A)$ соответственно левый и правый аннулятор множества A в R.

Лемма 8. *Пусть H — подгруппа группы G. Если H — бесконечная группа, или аннулятор A идеала E^V равняется нулю в кольце K, то $l(I_r(H,\chi))=0=r(I_l(H,\chi))$. Если подгруппа H конечна, $A\neq 0$ и $\widehat{H}=\{\sum_{h\in H}\chi(h^{-1})\,\eta_{v(h)}\,t_h\mid v(h)\in V(h)\}$, то*

1) $l(I_r(H,\chi))=A(K_\rho G)\,\widehat{H},\ r(I_l(H,\chi))=\widehat{H}.\ A(K_\rho G)$,

2) $l(\widehat{H})=A(I_l(H,\chi)),\ r(\widehat{H})=A(I_r(H,\chi))$.

Лемма 9. Если $K_\rho G$ скрещенное кольцо, для которого $E^V\neq K$, то $I_r(H,\chi=I_l(H,\chi)$ тогда и только тогда, когда H — нормальная подгруппа группы G.

Пусть теперь H — нормальная подгруппа группы $G=\langle V\rangle$ и $\Pi(G/H)$ — полная система представителей смежных классов G по H. Если $\theta:K\to K/E^V$ — естественный гомоморфизм, то образуем множество всех конечных сумм вида

$$(K/E^V)_\delta(G/H)=\{\sum_{u\in\Pi(G/H)}\bar{\alpha}_u\,\bar{t}_{\bar{u}}\mid\alpha_u\in K/E^V,\bar{u}=Hu\}.$$

Для всех u_i, $u_j\in\Pi(G/H)$ и $u_i u_j=h_{ij}u_{ij}$ ($u_{ij}\in\Pi(G/H)$) определяем в K/E^V-модуле $(K/E^V)_\delta(G/H)$ произведение

$$\bar{\alpha}t_{\bar{u}_i}\;\bar{\beta}t_{\bar{u}_j}=\bar{\alpha}\;\bar{\beta}\,\theta(\chi(h_{ij}))\,t_{\bar{u}_{ij}}.\tag{13}$$

Тогда нетрудно проверить, что $(K/E^V)_\delta(G/H)$ является скрещенным групповым кольцом факторгруппы G/H и факторкольца K/E^V при системе факторов

$$\delta=\{\delta_{\bar{u}_i,\bar{u}_j}=\theta\chi(h_{ij})\mid u_i u_j=h_{i_j}u_{i_j};\ u_i,\ u_j,\ u_{ij}\in\Pi(G/H)\}.\tag{14}$$

Этот факт понадобится нам в следующей теореме 1.

В теории групповых алгебр известен следующий факт (использованный, например, Берманом и Молловым [6]): если G — абелева группа, H ее подгруппа и χ — гомоморфизм H в K^*, где K — поле, то

$$KG/I(H,\chi)\cong K_{\{\chi(h)\}}(G/H),$$

где $I(H,\chi)=<h-\chi(h)\mid h\in H>$ — идеал групповой алгебры KG, порожденный элементами $h-\chi(h)$. Естественным обобщением этого утверждения является следующая

Теорема 1. *Пусть $K_\rho G$ — скрещенное групповое кольцо группы G и кольца K. Если $G=\langle V\rangle$, а H — нормальная подгруппа группы G, то*

$$K_\rho G/I(H,\chi)\cong(K/E^V)_\delta(G/H),$$

где $I(H,\chi)=\langle\eta_{v(h)}t_h-\chi(h)t_1\mid h\in H, v(h)\in V(h)\rangle$ — идеал кольца $K_\rho G$.

Доказательство. Справедливость теоремы в случае $E^V=K$ следует из леммы 6.

Пусть $E=E^V\neq K$. Если $\sum_{g\in G}\alpha_g t_g\in K_\rho G$ и $g\in H_u=\bar{u}$ ($u\in\Pi(G/H)$), то определяем отображение

$$\varphi(\sum_{g\in G}\alpha_g t_g)=\sum_{g\in G}\theta(\alpha_g\eta^{-1}_{v(g)}\chi(h))t_{\bar{u}},\tag{15}$$

где элемент $\eta_{v(g)}$ соответствует некоторому элементу $v(g)\in V(g)$. Докажем, что φ является гомоморфизмом $K_\rho G$ на скрещенном групповом кольце $(K/E)_\delta(G/H)$ с ядром $\mathrm{Ker}\,\varphi=I(H,\chi)$.

Если $\eta_{v_1(g)}\neq\eta_{v_2(g)}$ ($v_1(g),v_2(g)\in V(g)$), то, по лемме 4, $\alpha_g\chi(h)(\eta_{v_1(g)}-\eta_{v_2(g)})\in E$. Отсюда легко получается, что $\theta(\alpha_g\eta^{-1}_{v_1(g)}\chi(h))=\theta(\alpha_g\eta^{-1}_{v_2(g)}\chi(h))$ и поэтому φ является отображением.

Далее, пусть $x=\sum_{g_1\in G}\alpha_{g_1}t_{g_1}$ и $y=\sum_{g_2\in G}\alpha_{g_2}t_{g_2}$ — элементы из $K_\rho G$. Тогда, очевидно $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$. Кроме того, если $g_1=h_1u_1$, $g_2=h_2u_2$ и $g_1g_2=h_1u_1h_2u_1^{-1}h_3u_3$ (u_1, u_2, $u_3\in\Pi(G/H)$), то в силу (13) и (14)

$$\varphi(xy)=\varphi(\sum_{g_1,g_2\in G}\alpha_{g_1}\beta_{g_2}\rho_{g_1,g_2}t_{g_1g_2})$$
$$=\sum_{g_1,g_2\in G}\theta(\alpha_{g_1}\beta_{g_2}\rho_{g_1,g_2}\eta^{-1}_{v(g_1,g_2)}\chi(h_1h_2h_3))t_{\bar{u}_3}.$$

С другой стороны, согласно (13),

$$\varphi(x)\varphi(y)=\sum_{g_1\in G}\theta(\alpha_{g_1}\eta^{-1}_{v(g_1)}\chi(h_1))t_{\bar{u}_1}\sum_{g_2\in G}\theta(\beta_{g_2}\eta^{-1}_{v(g_2)}\chi(h_2))t_{\bar{u}_2}$$
$$=\sum_{g_1,g_2\in G}\theta(\alpha_{g_1}\beta_{g_2}\eta^{-1}_{v(g_1)}\eta^{-1}_{v(g_2)}\chi(h_1h_2))\,\theta(\chi(h_3))\,t_{\bar{u}_3}.$$

Теперь, в силу (4) и леммы 4, нетрудно получить, что $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$. Следовательно, φ является гомоморфизмом.

Пусть теперь

$$z=\sum_{h\in H}(\eta_{v(h)}t_h-\chi(h)t_1)\,z_h\ (z_h\in K_\rho G)\ —$$

произвольный элемент идеала $I_r(H,\chi)$. Тогда

$$\varphi(z)=\sum_{h\in H}(\theta(\eta_{v(h)}\eta^{-1}_{v_1(h)}\chi(h))t_{\bar 1}-\theta\chi(h)\,t_{\bar 1})\varphi(z_h),$$

где $v(h),\ v_1(h)\in V(h)$. Но, согласно лемме 4, $\eta_{v(h)}\eta^{-1}_{v_1(h)}-1\in E$ и поэтому $\theta(\eta_{v(h)}\eta^{-1}_{v_1(h)}\chi(h))=\theta(\chi(h))$. Отсюда следует, что $\varphi(z)=0$ и $I(H,\chi)\subseteq Ker\varphi$.

Осталось показать, что $Ker\ \varphi\subseteq I(H,\chi)$. Для этой цели возьмем элемент $w\in Ker\varphi$ и представим его в виде

$$w=z_1t_{u_1}+z_2t_{u_2}+\ldots+z_st_{u_s},$$

где $u_i\in\Pi(G/H)$, а $z_i=\sum_{h\in H}\alpha^{(i)}_h t_h\ (\alpha^{(i)}_h\in K)$. Тогда

$$0=\varphi(w)=\varphi(z_1)\,\theta(\eta^{-1}_{v(u_1)})\,t_{\bar u_1}+\ldots+\varphi(z_s)\theta(\eta^{-1}_{v(u_s)})\,t_{\bar u_s}$$

$$=\sum_{h\in H}\theta(\alpha^{(1)}_h\eta^{-1}_{v(h)}\chi(h)\,\eta^{-1}_{v(u_1)})\,t_{\bar u_1}+\ldots+\sum_{h\in H}\theta(\alpha^{(s)}_h\eta^{-1}_{v(h)}\chi(h)\,\eta^{-1}_{v(u_s)})\,t_{\bar u_s},$$

что возможно, если

$$\sum_{h\in H}\theta(\alpha^{(i)}_h\eta^{-1}_{v(u_1)}\chi(h)\eta^{-1}_{v(u_i)})=0$$

для каждого $i=1,2\ldots,s$. Таким образом, мы получили, что

$$(\sum_{h\in H}\alpha^{(i)}_h\eta^{-1}_{v(h)}\chi(h))\,\eta^{-1}_{v(u_i)}\in Ker\theta=E$$

и поэтому $\gamma_i=\sum_{h\in H}\alpha^{(i)}_h\eta^{-1}_{v(h)}\chi(h)\in E$. Кроме того, очевидно,

$$z_i=\sum_{h\in H}\alpha^{(i)}_h\eta^{-1}_{v(h)}(\eta_{v(h)}t_h-\chi(h)\,t_1)+\gamma_it_1$$

и, так как $\gamma_it_1\in Et_1\subseteq I(H,\chi)$, то $z_i\in I(H,\chi)$. Следовательно, $w\in I(H,\chi)$ и теорема доказана.

Пусть χ отображает G в единицу кольца K, т. е. $\chi=1$. Тогда из (14) следует, что система факторов δ тривиальна и поэтому $(K/E^V)_\delta(G/H)=(K/E^V)(G/H)$ является обыкновенным групповым кольцом. Следовательно, если $H=\langle 1\rangle$, то в силу (12) и теоремы 1

$$K_\rho G/E^V(K_\rho G)\simeq(K/E^V)G. \tag{16}$$

Это показывает, что если $K_\rho G$ имеет свойство, которое сохраняется при гомоморфизме $K_\rho G\to(K/E^V)\,G$, то можем уже в обыкновенном групповом кольце $(K/E^V)\,G$ искать условия, при которых выполняется это свойство. Так, например, непосредственно описываются группа G и некоторые свойства кольца K, в случае, когда кольцо $K_\rho G$ является правым артиновым регулярным, бирегулярным и вполне приводимым. Специально, для артиновости, справедлива следующая

Теорема 2. *Скрещенное групповое кольцо $K_\rho G$, в котором выполняется условие $E^V\neq K$, является правым артиновым тогда и только тогда, когда кольцо K правое артиново и группа G конечна.*

Доказательство. Пусть скрещенное групповое кольцо $K_\rho G$ правое артиново. Тогда, по [7, лемма 2], K — правое артиново кольцо. Кроме того, групповое кольцо

$(K/E^V)G$ правое артиново, так как $(K/E^V)G$ является гомоморфным образом кольца $K_\rho G$. Следовательно, G — конечная группа.

Обратное утверждение очевидно.

Другим применением изложенных выше фактов является следующая

Теорема 3. *Если в $K_\rho G$ выполняется условие $E^V \neq K$, то идеал $I(G,1) = I(G)$ является нильпотентным тогда и только тогда, когда идеал E^V нильпотентный, G — конечная p-группа и p — нильпотентный элемент в кольце K.*

Доказательство. Пусть идеал $I(G)$ нильпотентен. Так как $E^V.t_1 \subseteq I(G)$, то $(E^V t_1)^n \subseteq I^n(G)$ для каждого естественного числа n. Это показывает, что идеал $E = E^V$ нильпотентен.

Далее, если $\varphi(K_\rho G) \to (K/E)G$ есть гомоморфизм из (15), то легко получается, что $\varphi(I(G)) = \omega((K/E)G)$, где $\omega((K/E)G)$ — фундаментальный идеал группового кольца $(K/E)G$. Отсюда следует, что $\omega((K/E)G)$ тоже является нильпотентным. Тогда, в силу предложения 5 [8, с. 11], G — конечная p-группа и p — нильпотентный элемент в кольце K/E. Но, как мы показали, идеал E нильпотентный и поэтому p — нильпотент в кольце K.

Обратно, пусть $E = E^V$ — нильпотентный идеал, G — конечная p-группа и p — нильпотент в кольце K. Ясно, что p является нильпотентом и в кольце K/E. Тогда, на основании предложения 5 [8, с. 11], идеал $\omega((K/E)G)$ нильпотентный. Поэтому, согласно (16), существует такое естественное число n, что $I^n(G) \subseteq E(K_\rho G)$. Отсюда и из $E^l = 0$ для некоторого естественного числа l следует, что $I^{nl} = 0$. Теорема доказана.

Пусть $K_\rho G$ — скрещенное групповое кольцо группы $G = \langle V \rangle$ и кольца K. Заменим каждое $t_g (g \in G)$ с $\bar{t}_g = \eta_g t_g$, где η_g — фиксированный элемент из мультипликативной группы K^* кольца K. Тогда система факторов $\bar{\rho}$ в базисе $\{\bar{t}_g\}$ называется эквивалентной системой факторов ρ и удовлетворяет условию $\bar{\rho}_{g_1, g_2} = \eta_{g_1} \eta_{g_2} \eta^{-1}_{g_1 g_2} \rho_{g_1, g_2}$. В этом случае скрещенные групповые кольца $K_\rho G$ и $K_{\bar{\rho}} G$ называются диагонально эквивалентными [9, с. 15]. В частности, $K_\rho G$ является диагонально эквивалентным обыкновенному групповому кольцу KG тогда и только тогда, когда $\rho_{g_1, g_2} = \eta_{g_1 g_2} \eta^{-1}_{g_2} \eta^{-1}_{g_1}$

Пусть F^V — система определяющих соотношений группы $G = \langle V \rangle$, которая содержит все соотношения вида (7). Тогда, по определению идеала E^V следует, что $E^V = 0$ тогда и только тогда, когда $\eta_f = 1$ для всех $f \in F^V$. В этом случае, согласно (16), $K_\rho G \cong KG$, и скрещенное групповое кольцо $K_\rho G$ является диагонально эквивалентным обыкновенному групповому кольцу KG.

Обратно, пусть $K_\rho G$ диагонально эквивалентно KG. Тогда для каждой системы образующих V группы G, очевидно, существует базис в $K_\rho G$, для которой $E^V = E(F^V) = 0$. Таким образом, получается следующая

Теорема 4. *Если $G = \langle V \rangle$, то скрещенное групповое кольцо $K_\rho G$ является диагонально эквивалентным обыкновенному групповому кольцу KG тогда и только тогда, когда $\eta_f = 1$ для всех $f \in F^V$.*

А. Рейд [10] рассмотрел следующие случаи, в которых $K_\rho G$ диагонально эквивалентно KG:

1) K — поле и G — бесконечная циклическая группа;

2) K — алгебраически замкнутое поле и $G = C_{p^\infty}$ — группа типа p^∞ для некоторого простого числа p.

Д. Пассман [9, с. 20] доказывает также, что $K_\rho G$ диагонально эквивалентно KG в условиях:

1) K — алгебраически замкнутое поле, G — абелева группа и система факторов ρ симметрическая, т. е. $\rho_{g,h} = \rho_{h,g}$ для всех $g, h \in G$;

2) K — совершенное поле с характеристикой p и G — конечная p-группа.

Теперь с помощью теоремы 4 мы обобщим и дополним цитированные выше результаты Рейда и Пассмана. Точнее, докажем следующие две теоремы.

Теорема 5. *Пусть $K_\rho G$ — скрещенное групповое кольцо группы $G=\langle V\rangle$ и кольца K и пусть*

1) *G — свободная группа или*

2) *G — свободная абелева группа и $\rho_{a,b}=\rho_{b,a}$ для всех $a,b\in V\cup V^{-1}$.*

Тогда $K_\rho G$ диагонально эквивалентно KG.

Доказательство. 1) Если группа G свободна, то в G не существуют нетривиальных определяющих соотношений, и поэтому идеал $E^V=0$. Тогда из теоремы 4 следует, что $K_\rho G$ диагонально эквивалентно KG.

2) Пусть G свободная абелева группа и $\rho_{a,b}=\rho_{b,a}$ для всех $a,b\in V\cup V^{-1}$. Тогда в силу (3), $\eta_{a^{-1}b^{-1}ab}=\rho_{a^{-1},b^{-1}}\rho_{a^{-1}b^{-1},a}\rho_{a^{-1}b^{-1}a,b}=\rho_{b^{-1},a^{-1}}\rho_{b^{-1}a^{-1},a}\rho_{b^{-1},b}$ для любых $a,b\in V\cup V^{-1}$. Однако на основании ассоциативности $K_\rho G$ следует, что $\rho_{b^{-1}a^{-1}}\cdot\rho_{b^{-1}a^{-1},a}=\rho_{b^{-1},1}\rho_{a^{-1},a}$, и так как, согласно (1), $\rho_{a^{-1},a}=\rho_{b^{-1},b}=\rho_{b^{-1},1}=1$, то $\eta_{a^{-1}b^{-1}ab}=1$. Но в группе G можем выбрать для системы определяющих все соотношения вида $a^{-1}b^{-1}ab=1$, где $a,b\in V\cup V^{-1}$. Поэтому идеал $E^V=0$ и, в силу теоремы 4, $K_\rho G$ диагонально эквивалентно KG. Теорема доказана.

Далее, пусть для каждого элемента $a\in V$ с конечным порядком, например $|a|=n$, в группе $K^*\cap Z(K)$ существует такой элемент δ, что $\delta=\sqrt[n]{\rho^{-1}_{a,a^{n-1}}}$. Тогда, если положим $\tilde{t}_{a^k}=(\delta t_a)^k$ для любого $k\in \mathbb{Z}$ и $\tilde{t}_g=t_g$ для всех других элементов $g\in G$, то в силу (6), $\tilde{t}_a{}^n=t_1$. Отсюда и из (1) получаем, что в базисе $\{\tilde{t}_g\}$ скрещенного групового кольца выполняется условие

$$\tilde{\rho}_{a^k,a^l}=1 \tag{17}$$

для каждого элемента $a\in V$ и любых $k,l\in \mathbb{Z}$. Следовательно, при этих условиях, в образующих идеала E^V не будут участвовать элементы $\eta_{a^s}-1$, где $a\in V$ и $|a|=s<\infty$. Это нам понадобится в следующей теореме 6.

Если $K_\rho G$ скрещенное групповое кольцо группы G и кольца K, а H — подгруппа G, то через $K_\rho H$ будем обозначать скрещенное групповое кольцо группы H и кольца K, где ρ ограничено на H.

Пусть Π — фиксированное множество простых чисел. Группа D называется Π-полной [4, с. 510], если для каждого $d\in D$ и каждого естественного числа n, простые делители которого принадлежат Π, уравнение $x^n=d$ имеет решение в D.

Теорема 6. *Пусть $K_\rho G$ — скрещенное групповое кольцо группы $G=\langle V\rangle$ и кольца K и пусть группа $K^*\cap Z(K)$—Π — полная, где Π — множество всех простых чисел, делящих порядки конечных подгрупп группы G. Тогда, если*

1) *G — свободное произведение произвольного числа конечных групп, групп типа $p_i^\infty (i\in I)$ и групп изоморфных аддитивной группе рациональных чисел Q или*

2) *G — прямое произведение произвольной абелевой группы с произвольным числом конечных групп, при котором $\rho_{a,b}=\rho_{b,a}$ для всех $a,b\in V\cup V^{-1}$, то $K_\rho G$ диагонально эквивалентно KG.*

Доказательство. Пусть $G=\Pi^*_\alpha G_\alpha$ — свободное произведение из условия 1). Если каждая группа G_α задается через систему образующих V_α и систему определяющих соотношений F_α в этой системе образующих, то $V=\cup_\alpha V_\alpha$ и $F=\cup_\alpha F_\alpha$ являются соответно системой образующих и системой определяющих соотношений для группы G [см. 4, с. 207].

Пусть G_α — конечная группа порядка n. Так как система факторов ρ включается в $K^*\cap Z(K)$ и, согласно условию теоремы, уравнение $x^{n_\alpha}=\delta$ имеет решение в $K^*\cap Z(K)$ для каждого $\delta\in K^*\cap Z(K)$, то аналогично лемме 2.10 [9, с. 20] доказывается, что $K_\rho G_\alpha$ является диагонально эквивалентным KG_α. Поэтому в скрещенном групповом кольце $K_\rho G_\alpha$ можем выбрать такой базис, что идеал $E(F_\alpha)$ равняется нулю.

Пусть $G_\alpha = C_p\infty$ — группа типа p^∞. Тогда G_α может быть задана системой образующих $V_\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ и множеством определяющих соотношений $F_\alpha = \{a_1^p = 1, \ a_n^p a_{n-1}^{-1} = 1 \mid n = 2, 3, \ldots\}$. Так как $K^* \cap Z(K)$ — П — полная группа, то из вида множества П и из изложенного до теоремы следует, что в $K_\rho C_p\infty$ существует такой базис, что $\rho_{a_n^k, a_n^l} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ для всех $k, l \in \mathbf{Z}$. Тогда $\eta_{a_1^p} = 1$ и, в силу (3)

$$\eta_{a_n^p a_{n-1}^{-1}} = \eta_{a_n^p}\, \rho_{a_n^p,\, a_{n-1}^{-1}} = \eta_{a_n^p}\, \rho_{a_{n-1}, a_{n-1}^{-1}} = 1.$$

Следовательно, и в этом случае $E(F_\alpha) = 0$.

Наконец, если G_α является группой, изоморфной аддитивной группе рациональных чисел $\mathbf{Q}$, то G_α может быть задана системой образующих $V_\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ и системой определяющих соотношений $F_\alpha = \{a_{n+1}^{n+1} a_n^{-1} = 1 \mid n = 1, 2, \ldots\}$. И здесь, аналогично случаю $G_\alpha = C_p\infty$ доказывается, что $E(F_\alpha) = 0$.

Так как $V = \cup_\alpha V_\alpha$ и $F = \cup_\alpha F_\alpha$ являются соответственно системой образующих и системой определяющих соотношений группы G, то, в силу выше изложенного, $\eta_f = 1$ для всех $f \in F$. Поэтому из теоремы 4 следует, что $K_\rho G$ диагонально эквивалентно KG.

2) Пусть $G = \Pi_\alpha G_\alpha$ является прямым произведением из условия 2) и снова пусть $G_\alpha = \langle V_\alpha \rangle$ имеет систему определяющих соотношений F_α. Тогда ясно, что $G = \langle V \rangle$, где $V = \cup_\alpha V_\alpha$ и G имеет систему определяющих соотношений $F = \cup_\alpha F_\alpha$ и всех соотношений вида

$$a_\alpha^{-1} a_\beta^{-1} a_\alpha a_\beta = 1 \quad (a_\alpha \in V_\alpha \cup V_\alpha^{-1};\ a_\beta \in V_\beta \cup V_\beta^{-1}).$$

Согласно формулировке теоремы, в $K_\rho G$ можем выбрать такой базис, что в них выполняется условие (17), тогда как в условии 2) теоремы 5 доказывается, что

$$\eta_{a^{-1}\, b^{-1} ab} = 1 \tag{18}$$

для всех $a, b \in V \cup V^{-1}$. Поэтому, если покажем, что $\eta_f = 1$ для любого элемента $f \in F_\alpha$, то на основании теоремы 4, $K_\rho G$ будет диагонально эквивалентно KG.

Если G_α — конечная группа, то в условии 1) мы установили, что $\eta_f = 1$ для каждого определяющего соотношения f этой группы. Остается доказать, что это выполняется и тогда, когда G_α — абелева группа.

Пусть $G_\alpha = A$ — абелева группа. Тогда A является объединением счетной возрастающей последовательности прямых произведений циклических групп [см. 4, с. 148]. Значит $A = \cup_{i=1}^\infty H_i$, где $H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \cdots$ и $H_i = \Pi_j \langle a_{ij} \rangle$ есть прямое произведение циклических групп. Выберем в группе A в качестве системы порождающих множество $V_\alpha = \{a_{ij}\}$. Очевидно, для системы определяющих соотношений F_α в группе A можем выбрать все соотношения

$$a_{ij}^{n_{ij}} = 1 \ \ (|a_{ij}| = n_{ij}), \quad a_{ij}^{-1} a_{lk}^{-1} a_{ij} a_{lk} = 1 \ (a_{ij}, a_{lk} \in V_\alpha)$$

и, кроме того, все соотношения $a_{ij}^{-1} \Pi_k a_{i+1,k}^{l_k} = 1$ $(l_k \in \mathbf{Z})$, которые выражают образующие элементы группы H_i через образующие элементы группы H_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots)$. Однако из (17) и (18) следует, что $\eta_{ij}^{n_{ij}} = 1$ и $\eta_{a_{ij}^{-1} a_{lk}^{-1} a_{ij} a_{lk}} = 1$. В силу этого $K_\rho H_i$ диагонально эквивалентно KH_i для каждого i. Поэтому из (4) и (17) получаем, что и

$$\eta_{a_{ij}^{-1}\prod\limits_k a_{i+1,k}} = \eta_{\prod\limits_k a_{i+1,k}^{l_k}}\, \rho_{a_{ij}^{-1},a} = 1.$$

Следовательно, $\eta_f = 1$ для любого $f \in F_a$ и, согласно теореме 4, $K_\rho A$ диагонально эквивалентно KA.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Бовди. Скрещенные произведения полугруппы и кольца. *Сиб. матем. ж.*, 4, 1963, 3, 481—499.
2. К. Х. Коликов. Идеалы скрещенных групповых колец. *Доклады БАН*, 38, 1985, 2, 169—171.
3. К. Х. Коликов. Теоретико-пръстенови свойства на кръстосани призведения (дисертация, Пловдив. унив.), 1984.
4. А. Г. Курош. Теория групп. М., 1967.
5. И. Ламбек. Кольца и модули. М., 1971.
6. С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. Расщепляемость базисов и изоморфизм групповых колец абелевых групп. *Плиска*, 2, 1981, 6—22.
7. К. Х. Коликов. Артинови кръстосани произведения. *Науч. тр. Пловдив. унив.*, 22, кн. 2, Математика, 1984, 13—26.
8. А. А. Бовди. Групповые кольца. Ужгород, 1974.
9. D. S. Passman. The Algebraic Structure of Group Rings. Interscience. New York, 1977.
10. A. Reid. Twisted group rings which are Artinian, perfect or self-injective. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 7, 1975, 166—170.

Пловдивский университет
им. П. Хилендарского
Математический факультет
Пловдив, Болгария

Поступила 27. 03. 1986 г.