Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

PROBLEMES UNIVERSELS RELATIFS AUX CLASSES POLAIRES DES RELATIONS

DEKO V. DEKOV

Nous étudions des projections et des structures quotient des classes polaires des relations. Nous utilisons la terminologie et les notations introduites par Ch. Ehresmann (1965).

1. Soient $\mathcal{M}_0$ un univers et $\mathcal{M}$ la catégorie des applications associée à $\mathcal{M}_0$ [8]. Soit $\mathcal{N}_g$ la catégorie des homomorphismes entre classes polaires associée à $\mathcal{M}$ [1]–[7].

Soit n un entier, $n>1$. Soit $\mathcal{N}_g^n$ la catégorie produit $\mathcal{N}_g \times \ldots \times \mathcal{N}_g$ (n fois) et soit $\mathcal{N}_g^{(n)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g^n$ ayant pour unités les n-uplets $C^{\perp} = (C^{\perp i})_{i \leqq n}$ où $C \in \mathcal{M}_0$. Nous désignons par $(\mathcal{N}_g^{(n)})_0$ la sous-classe des unités de $\mathcal{N}_g^{(n)}$.

Supposons $C^{\perp} = (C^{\perp i})_{i \leqq n} \in (\mathcal{N}_g^{(n)})_0$. Soit r une relation d'équivalence sur C. On dira que la relation r est bicompatible sur $C^{\perp}$ si r est bicompatible sur $C^{\perp i}$ pour tout $i \leqq n$ Soit r une relation sur C et soit $\widehat{r}$ la relation-intersection des tous r', $r' \in R$ où R est. la classe des relations d'équivalence bicompatibles sur $C^{\perp}$ et contenant r. On dira que $\widehat{r}$ est une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\perp}$ engendrée par la relation r.

Soit $\mathcal{N}_g^{\{n\}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g^{(n)}$ formée par les homomorphismes entre n-uplets $C^{\perp} = (C^{\perp i})_{i \leqq n}$ vérifiants la condition (L'axiome de permutabilité [9]): Si les composés $k_j(k_i(g', g), k_i(f', f))$ et $k_i(k_j(g', f'), k_j(g, f))$ sont définis, on a $k_j(k_i(g', g), k_i(f', f)) = k_i(k_j(g', f'), k_j(g, f))$ où $i \leqq n$, $j \leqq n$, $i \neq j$ et où k_i est la loi de composition de $C^{\perp i}$, $i \leqq n$. La sous-classe des unités de $\mathcal{N}_g^{\{n\}}$ est notée $(\mathcal{N}_g^{\{n\}})_0$.

Supposons $C^{\perp} = (C^{\perp i})_{i \leqq n} \in (\mathcal{N}_g^{(n)})_0$ et $C^{\perp i} = (C, k_i, \beta_i, \alpha_i)$, $i \leqq n$. Soit $r(C^{\perp})$ la relation (C, A, C) où A est la classe des couples $(k_j(k_i(g', g), k_i(f', f)), k_i(k_j(g', f'), k_j(g, f)))$ où $i \leqq n$, $j \leqq n$ et $i \neq j$. Soit $\widehat{r}(C^{\perp})$ la relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\perp}$ engendrée par la relation $r(C^{\perp})$. Soit $p^{(n)}_{\mathcal{N}_g}$ le foncteur canonique de $\mathcal{N}_g^{(n)}$ vers $\mathcal{M}$.

Théorème 1. *Si la $p^{(n)}_{\mathcal{N}_g}$-structure quotient $C^{\perp}/\widehat{r}(C^{\perp})$ de $C^{\perp}$ par $\widehat{r}(C^{\perp})$ est une unité de $\mathcal{N}_g^{\{n\}}$, alors $C^{\perp}/\widehat{r}(C^{\perp})$ est une $(\mathcal{N}_g^{\{n\}}, \mathcal{N}_g^{(n)})$-projection de $C^{\perp}$.*

Démonstration. Soit $\overline{r} = (C^{\perp}/\widehat{r}(C^{\perp}), \widetilde{r}, C^{\perp})$ le $p^{(n)}_{\mathcal{N}_g}$-épimorphisme canonique. Montrons que $\overline{r}$ est un $(\mathcal{N}_g^{\{n\}}, \mathcal{N}_g^{(n)})$-projecteur. Supposons $\widehat{C}^{\perp} = (\widehat{C}^{\perp i})_{i \leqq n}$, $\widehat{C}^{\perp i} = (\widehat{C}, \widehat{k}_i, \widehat{\beta}_i, \widehat{\alpha}_i) \in (\mathcal{N}_g^{\{n\}})_0$ et $\psi = (\widehat{C}^{\perp}, \Psi, C^{\perp}) \in \mathcal{N}_g^{(n)}$. La relation $(k_j(k_i(g', g), k_i(f', f)), k_i(k_j(g', f'), k_j(g, f))) \in A$ entraîne

$$\psi(k_j(k_i(g', g), k_i(f', f))) = \widehat{k}_j(\psi(k_i(g', g), \psi(k_i(f', f)))$$
$$= \widehat{k}_j(\widehat{k}_i(\psi(g'), \psi(g)), \widehat{k}_i(\psi(f'), \psi(f))) = \widehat{k}_i(\widehat{k}_j(\psi(g'), \psi(f')), \widehat{k}_j(\psi(g), \psi(f)))$$
$$= \widehat{k}_i(\psi(k_j(g', f')), \psi(k_j(g, f))) = \psi(k_i(k_j(g', f'), k_j(g, f))).$$

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes, Vol. 16, 1990, p. 14-18

Il en résulte que $r(C^\perp) \subset r_\psi$ d'où $\widehat{r}(C^\perp) \subset r_\psi$; r_ψ est la relation d'équivalence associée à ψ. Alors il existe un et un seul homomorphisme ψ' de $C^\perp/\widehat{r}(\widehat{C})$ vers $C^\perp$ tel que $\psi' . \overline{r} = \psi$. Ceci montre que $\overline{r}$ est un $(\mathcal{N}_g^{\{n\}}, \mathcal{N}_g^{(n)})$-projecteur.

Remarque. La $p^{(n)}_{\mathcal{N}_g}$-structure quotient $C^\perp/\widehat{r}(C^\perp)$ peut ne pas être une unité de $\mathcal{N}_g^{\{n\}}$ dans un cas général.

Soit $\mathcal{N}_g^{[n]}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g^{\{n\}}$ formée par les homomorphismes entre n-uplets $C^\perp = (C^{\perp i})_{i \leqq n}$, $C^{\perp i} = (C, k_i, \beta_i, \alpha_i)$, $i \leqq n$ tels que α_i et β_i sont des foncteurs de $C^{\perp j}$ vers $C^{\perp j}$ pour tout $i \leqq n$ et $j \leqq n$, $i \neq j$. [9]. Soit $\mathcal{F}^{(n)}$ (resp. $\mathcal{F}^{\{n\}}$, $\mathcal{F}^{[n]}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}_g^{(n)}$ (resp. de $\mathcal{N}_g^{\{n\}}$, $\mathcal{N}_g^{[n]}$) formée par les homomorphismes entre n-uplets $C^\perp = (C^{\perp i})_{i \leqq n}$ tels que $C^{\perp i}$ soit une catégorie pour tout $i \leqq n$. On a un diagramme d'inclusions comme sous-catégories pleines suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{(n)} \arrow[d] & \mathcal{F}^{\{n\}} \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{F}^{[n]} \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathcal{N}_g^{(n)} & \mathcal{N}_g^{\{n\}} \arrow[l] & \mathcal{N}_g^{[n]} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Soit m un entier, $m > 1$. Soit B une classe et soit B^m la classe produit $B \times \cdots \times B$ (m fois). Alors $(B^m)^{\perp i} = (B^m, \overline{k}_i, \overline{\beta}_i, \overline{\alpha}_i)$ est une catégorie, en définissant $\overline{k}_i((b'_1, \ldots, b'_m), (b_1, \ldots, b_m)) = (b_1, \ldots, b_{m-i}, b'_{m-i+1}, \ldots, b'_m)$ si, et seulement si, $b_{m-i+j} = b'_j$, $j \leqq i$, $b_{i+j} = b'_{i+j}$, $j \leqq m-2i$, $0 \leqq i \leqq [m/2]$. Les applications de source et de but sont définis par: $\overline{\alpha}i(b_1, \ldots, b_m) = (b_1, \ldots, b_{m-i}, b_1, \ldots, b_i)$ et $\overline{\beta}_i(b_1, \ldots, b_m) = (b_{m-i+1}, \ldots, b_m, b_{i+1}, \ldots, b_m)$. De plus, on montre que $B^\perp = (B^m)^{\perp i}_{0 \leqq i \leqq n-1}$ où $n = [(m+2)/2)$ est un n-uplet vérifiant l'axiome de permutabilité et par consequent $B^\perp \in \mathcal{F}_0^{\{n\}}$. En particulier, si $m = 2$ et $i = 1$, $(B \times B)^\perp$ est la catégorie des couples associée à B ([8], chap. I, n° 1, C). Si $B = \overline{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M} \setminus \varnothing$, nous désignons $\overline{\mathcal{M}}_0^\perp = ((\overline{\mathcal{M}}_0^m)^{\perp i})_{0 \leqq i \leqq n-1}$ et $(\overline{\mathcal{M}}_0^m)^{\perp i} = (\overline{\mathcal{M}}_0^m, \overline{k}_i, \overline{\beta}_i, \overline{\alpha}_i)$ où $0 \leqq i \leqq n-1$, $n = [(m+2)/2]$.

2. Soit m un entier, $m > 1$. Soit $\mathcal{R}_m$ la classe des relations m-aires associée à $\mathcal{M}_0$. Nous désignons une m-relation $R = (A; (C_i; i \leqq m))$ aussi sous la forme $R = (0(R), S(R))$ où $0(R) = A$ est l'objet de la m-relation R et où $S(R) = (C_i; i \leqq m)$ est le support de la m-relation R. Dans le texte qui suit, nous supposons, sans modifier la notation, que la classe $\mathcal{R}_m$ ne renferme que les m-relations pour lesquelles les éléments du support sont differents de la classe vide. Soit $\overline{\mathcal{M}}_0^\perp$ le n-uplet des catégories construits au-dessus.

Soit $\mathcal{R}_{m,i}$ la classe multiplicative $(\mathcal{R}_m, k_{m,i})$ où la loi de composition $k_{m,i}$ est définie par:

$$k_{m,i}(R_2, R_1) = (A; \overline{k}_i(S(R_2), S(R_1)) \quad \text{si, et seulement si,}$$
$$(S(R_2), S(R_1)) \in (\overline{\mathcal{M}}_0^m)^{\perp i} * (\overline{\mathcal{M}}_0^m)^{\perp i}$$

où l'on a posé

$$A = \{(a_1^1, \ldots, a_{m-i}^1, a_{m-i+1}^2, \ldots, a_m^2) : \exists\, (a_1^k, \ldots, a_m^k) \in 0(R_k),$$
$$k \leqq 2,\ a_{m-i+j}^1 = a_j^2,\ \ j \leqq i,\ \ a_{i+j}^1 = a_{i+j}^2,\ \ j \leqq m-2i\}.$$

Cas particuliers: 1° Soit $C \in \mathscr{M}_0$. On dira qu'une m-relation $R = (A; (C_i; i \leq m))$ est homogène sur C, si $C_i = C$ pour tout $i \leq m$. Soit $\mathscr{R}^C_m$ la sous-classe des m-relations homogènes sur C. Soit $\mathscr{R}^C_{m,i} = (\mathscr{R}^C_m, k^C_{m,i})$ la sous-classe multiplicative de $\mathscr{R}_{m,i}$ définie par la sous-classe $\mathscr{R}^C_m$. La loi de composition $k^C_{m,i}$ est introduite et étudiée dans [11].

2° Si $m = 2$ et $i = 1$, on obtient la loi de composition clasique ([8], chap. I, n° 2, B, [10], [12]).

On peut munir la classe $\mathscr{R}_m$ des structures de graphes orientés $(\mathscr{R}_m, \beta^j_i, \alpha^j_i)$, $0 \leq i \leq [m/2]$; $j \leq 4$ comme suit:

$$S(\alpha^j_i(R)) = \bar{\alpha}_i(S(R)), \qquad S(\beta^j_i(R)) = \bar{\beta}_i(S(R)), \quad j \leq 4,$$

$$0(\alpha^1_i(R)) = \{(a_1, \ldots, a_{m-i}, a_1, \ldots, a_i) : a_j \in Cj, \ j \leq m - i\},$$

$$0(\beta^1_i(R)) = \{(a_{m-i+1}, \ldots, a_m, a_{i+1}, \ldots, a_m) : a_j \in C_j, \ i < j \leq m\},$$

$$0(\alpha^2_i(R)) = \{(a_1, \ldots, a_m) : (a_1, \ldots, a_m) \in 0(\alpha^1_i(R)), \ (a_1, \ldots, a_i) \in 0(Pr_{1, \ldots, i}(R))\}.$$

$$0(\beta^2_i(R)) = \{(a_1, \ldots, a_m) : (a_1, \ldots, a_m) \in 0(\beta^1_i(R)), (a_1, \ldots, a_i) \in 0(Pr_{m-i+1, \ldots, m}(R))\},$$

$$0(\alpha^3_i(R)) = \{(a_1, \ldots, a_m) : (a_1, \ldots, a_m) \in 0(\alpha^1_i(R)), \ (a_{i+1}, \ldots, a_{m-i}) \in 0(Pr_{i+1, \ldots, m-i}(R))\}.$$

$$0(\beta^3_i(R)) = \{(a_1, \ldots, a_m) : (a_1, \ldots, a_m) \in 0(\beta^1_i(R)), (a_{i+1}, \ldots, a_{m-i}) \in 0(Pr_{i+1, \ldots, m-i}(R))\}.$$

$$0(\alpha^4_i(R)) = \{(a_1, \ldots, a_m) : (a_1, \ldots, a_m) \in 0(\alpha^1_i(R)), \ (a_1, \ldots, a_{m-i}) \in 0(Pr_{1, \ldots, m-i}(R))\}.$$

$$0(\beta^4_i(R)) = \{(a_1, \ldots, a_m) : (a_1, \ldots, a_m) \in 0(\beta^1_i(R)), \ (a_i, \ldots, a_m) \in 0(Pr_{i, \ldots, m}(R))\}.$$

Soit $\widehat{\mathscr{M}}_0$ un univers tel que $\mathscr{M}_0 \in \widehat{\mathscr{M}}_0$. Si $\mathscr{U}$ est une des catégories associées à $\mathscr{M}_0$ définis au-dessus, $\widehat{\mathscr{U}}$ désigne la catégorie correspondante associée à $\widehat{\mathscr{M}}_0$. En particulier, $\widehat{\mathscr{N}}_g$ est la catégorie des homomorphismes entre classes polaires associée à $\widehat{\mathscr{M}}_0$. Nous désignons par $\widehat{\mathscr{N}}_p$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{N}}_g$ ayant pour unités les précatégories [6]. Nous utilisons la définition d'une base de précatégorie conformement [6].

On montre que $\mathscr{R}^j_{m,i} = (\mathscr{R}_m, k_{m,i}, \beta^j_i, \alpha^j_i) \in (\widehat{\mathscr{N}}^{(n)}_g)_0$ où $j \leq 4$ et $0 \leq i \leq [m/2]$. Soit $\mathscr{L}_m$ la sous-classe de $\mathscr{R}_m$ formée par les m-relations R telles que $0(R) \neq \emptyset$. Soit $\mathscr{L}^j_{m,i}$ la sous-classe polaire de $\mathscr{R}^j_{m,i}$ définie par la sous-classe $\mathscr{L}_m$, $j \leq 4$.

Soit ρ l'application de $\mathscr{R}_m$ vers $\bar{\mathscr{M}}_0$ définie par: $\rho(R) = S(R)$. Soit $n = [(m+2)/2]$, $0 \leq i \leq n-1$.

Théorème 2. *$\mathscr{R}^1_{m,i} \in \widehat{\mathscr{F}}^{\{n\}}_0$ et $\bar{\rho} = (\bar{\mathscr{M}}^{\perp}_0, \rho, \mathscr{R}^1_{m,i})$ est un $(\widehat{\mathscr{F}}^{\{n\}}, \widehat{\mathscr{F}}^{(n)})$-projecteur.*

Démonstration. Montrons que $\bar{\rho}$ est un $(\widehat{\mathscr{F}}^{\{n\}}, \widehat{\mathscr{F}}^{(n)})$-projecteur. Soit $\widehat{r}(C^{\perp})$ la relation définie dans le théorème 1. Désignons $\widehat{r} = \widehat{r}(\mathscr{R}^1_{m,i})$. Soient $R = (A; (C_m, C_2,$

$\ldots, C_m)) \in [\mathcal{R}^4_{m,1}]_0$ et $R_\Phi = (\varnothing; S(R))$. Montrons que $R \sim R_\Phi \pmod{\widehat{r}}$. Supposons que la classe $0(Pr_1(R))$ contient au moins deux éléments. Alors, il existe une bijection $f: C_m \xrightarrow{\sim} C_m$ telle que $f(a) \neq a$ pour tout $a \in C_m$. Soient R_1 et R_2 deux m-relations définis comme suit:

$$S(R_1) = S(R_2) = S(R),$$

$$0(R_1) = \{(a_m, a_2, \ldots, a_{m-1}, f(a_m)) : (a_2, \ldots, a_m) \in 0(Pr_{2, \ldots, m}(R))\},$$

$$0(R_2) = \{(fa_m), (a_2, \ldots, a_m) : (a_2, \ldots, a_m) \in 0(Pr_{2, \ldots, m}(R))\}.$$

On obtient

$$k_{m,0}(k_{m,1}(R, R), k_{m,1}(R_2, R_1)) = R,$$

$$k_{m,1}(k_{m,0}(R_2, R) \ k_{m,0}(R_1, R)) = R_\Phi.$$

Il en résulte que $R \sim R_\Phi \pmod{\widehat{r}}$.) D'une manière analogue on montre que $(R \sim R_\Phi) \pmod{\widehat{r}}$ si la classe $0(Pr_1(R))$ contient un seul élément.

Soit $R = (A; (C_i; i \leq m)) \in \mathcal{R}_m$ et soit $R_\Phi = (\varnothing; S(R))$. On obtient

$$k_{m,1}(\beta^4_1(R), R) = R \quad \text{et} \quad k_{m,1}((\varnothing; S(\beta^4_1(R))), R) = R_\Phi$$

et par consequent $R \sim R_\Phi \pmod{\widehat{r}}$. Il en résulte que $R \sim R' \pmod{\widehat{r}}$ si, et seulement si, $S(R) = S(R')$. Ceci montre qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{R}^1_{m,i}/\widehat{r}$ vers $\overline{\mathcal{M}}^{\,1}_0$ et, d'après le théorème 1, $\overline{\rho}$ est un $(\widehat{\mathcal{F}}^{\{n\}}, \widehat{\mathcal{F}}^{(n)})$-projecteur.

Soit $(\widehat{N}, \widehat{\nu})$ un foncteur $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{N}}_g)$-projection naturalisé [6]. Soit $i \leq [(m-2)/2]$.

Théorème 3. *$\mathcal{L}^1_{m,i}$ est une base de catégorie et $\mathcal{R}^1_{m,i}$ est une catégorie quotient strict de $\widehat{N}(\mathcal{L}^1_{m,i})$.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 3, [5].

Théorème 4. *$\mathcal{R}^4_{m,i}$ est une précatégorie, $\widehat{N}(\mathcal{R}^4_{m,i})$ est une catégorie quotient strict de $\mathcal{R}^1_{m,i}$ et $\widehat{\nu}(\mathcal{R}^4_{m,i})$ est un $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{N}}_p)$-projecteur strict. $\mathcal{L}^4_{m,i}$ est une précatégorie et $\widehat{N}(\mathcal{L}^4_{m,i})$ est une catégorie quotient strict de $\widehat{N}(\mathcal{L}^1_{m,i})$. De plus, $\widehat{N}(\mathcal{R}^4_{m,i})$ est une catégorie quotient strict de $\widehat{N}(\mathcal{L}^4_{m,i})$.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 4 et du théorème 5, [5].

Théorème 5. *$\mathcal{R}^2_{m,i}$ est une précatégorie, $\widehat{N}(\mathcal{R}^2_{m,i})$ est une catégorie quotient strict de $\mathcal{R}^1_{m,i}$ et $\widehat{\nu}(\mathcal{R}^2_{m,i})$ est un $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{N}}_p)$-projecteur strict. $\mathcal{R}^3_{m,i}$ est une précatégorie, $\widehat{N}(\mathcal{R}^3_{m,i})$ est une catégorie quotient strict de $\mathcal{R}^1_{m,i}$ et $\widehat{\nu}(\mathcal{R}^3_{m,i})$ est un $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{N}}_p)$-projecteur strict. $\mathcal{L}^2_{m,i}$ est une base de précatégorie et $\widehat{N}(\mathcal{R}^2_{m,i})$ est une catégorie quotient strict de $\widehat{N}(\mathcal{L}^2_{m,i})$. De plus, $\mathcal{L}^3_{m,i}$ est une base de précatégorie et $\widehat{N}(\mathcal{R}^3_{m,i})$ est une catégorie quotient strict de $\widehat{N}(\mathcal{L}^3_{m,i})$.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celles des théorèmes précédents.

Alors, il existe un cube commutatif (Fig. 1) ayant pour sommets les classes polaires $\mathcal{R}^1_{m,i}$, $\widehat{N}(\mathcal{R}^j_{m,i})$, $1 < j \leq 4$, $\widehat{N}(\mathcal{L}^j_{m,i})$, $j \leq 4$ et tel que pour toute flèche f de ce cube $\beta(f)$ soit une catégorie quotient strict de $\alpha(f)$ pour tout $i \leq [(m-2)/2]$.

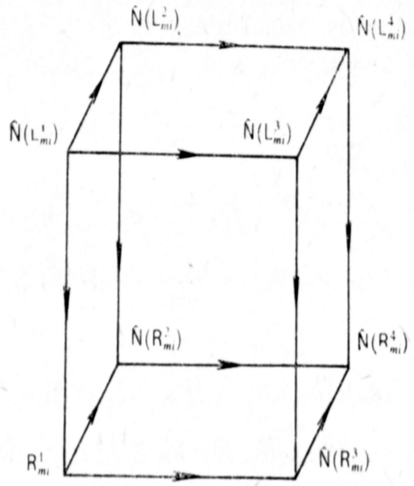

Fig. 1

BIBLIOGRAPHIE

1. D. V. Dekov. Projections des classes n-polaires, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **30**, 1977, 6, 801—804.
2. D. V. Dekov. Précatégories quotient, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 32, 1979, 12, 1619—1622.
3. D. V. Dekov. Classes polaires quotient, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 33, 1980, 1, 11—14.
4. D. V. Dekov. Sur l'existence de structures quotient, *C. R. Acad. Bulg.* Sci., **40**, 1987, 7, 17—19.
5. D. V. Dekov. Sur les structures algébriques des relations. *Revue roum. math. pures et appl.*, 27, 1982, 1, 15—24.
6. D. V. Dekov. Problèmes universels relatifs aux classes polaires. *Serdica*, 14, 1988, 223—233.
7. D. V. Dekov. Existence de structures quotient. *Serdica*, 14, 1988, 343—349.
8. Ch. Ehresmann. Catégories et structures, Paris, 1965.
9. Ch. Ehresmann. Catégories structurées, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 80, 1963, 349—426.
10. S. MacLane. Categories for the working mathematician. Berlin, 1971.
11. J. E. Penzov. On the arithmetic of n-relations (Russian). *Izv. Visš. Učebn. Zaved. Mathematika*, 1961, 4, 78—92.
12. J. Riguet. Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois. *Bull. Soc. Math. France*, **76**, 1948, 114—155.

Georgi Kolev 81,
6000 Stara Zagora, Bulgaria

Received 7. 09. 87
Revised 25. 12. 88