Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НАИЛУЧШИЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И МЕРОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ

И. В. ИВАНОВ

Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу $\mathscr{H}(E)$, голоморфных на E функции, E-инте рвал $[-1, 1]$ и пусть m-фиксированное натуральное число. Рассматривается задача о достаточном условии для продолжимости $f(z)$ до мерофорной в эллипсе D_σ (с центром в нуле и полуосями $\sigma+1/\sigma$ и $\sigma-1/\sigma$) и имеющей в D_σ не более чем, m полюсов. Достаточное условие задается асимптотическим поведением свободных полюсов наилучших рациональных приближений на E функции f в равномерной метрике.

Пусть f: $\bar{\mathsf{C}}\to\bar{\mathsf{C}}$, здесь и в дальнейшем $\bar{\mathsf{C}}$ — расширенная комплексная плоскость Пусть $E \doteq [-1, 1]$, $\|f\|_E=\sup_{z\in E}|f(z)|$ и f: $E\to\mathsf{R}$, $f\in C(E)$ (здесь $\mathsf{R}=(-\infty, \infty)$). Для каждой пары (n, m) натуральных чисел $(n, m\in\mathsf{N})$ будем обозначать через $\mathscr{R}_{n\cdot m}$ множество всех рациональных функций порядка (n, m), т. е. $\mathscr{R}_{n\cdot m}=\{p_{n\cdot m}(z)/q_{n\cdot m}(z)$, $\deg p_{n\cdot m}\leqq n$, $\deg q_{n\cdot m}\leqq m$, $q_{n\cdot m}\neq 0\}$ и через $r_{n\cdot m}(z)=P_{n\cdot m}(z)/Q_{n\cdot m}(z)$ наилучшее приближение $f(z)$ на E относительно равномерной метрики и такое, что $r_{n\cdot m}\in\mathscr{R}_{n\cdot m}(\|f-r_{n\cdot m}\|_E=\inf_{r\in\mathscr{R}_{n,m}}\|f-r\|_E)$. Известно (см. [5]), что, если f выполняет условия f: $E\to\mathsf{R}$ и $f\in C(E)$, то все коэффициенты многочленов $P_{n,m}(z)$ и $Q_{n\cdot m}(z)$ являются вещественными. Нули многочлена $Q_{n\cdot m}(z)$ называются свободными полюсами $r_{n\cdot m}(z)$, их число $\leqq m$.

Пусть $\varphi(z)=z+\sqrt{z^2-1}$ ($\sqrt{\ }$ выбрана так, что φ: $\bar{\mathsf{C}}\setminus E\to\bar{\mathsf{C}}\setminus\{z:|z|\leqq 1\}$). Известно, что φ является конформным изображением и его обратное $z(\varphi)$ отображает конформно $\bar{\mathsf{C}}\setminus\{z: |z|\leqq 1\}$ на $\bar{\mathsf{C}}\setminus E$.

Пусть $\sigma\in\mathsf{R}$, $\sigma>1$. Введем следующие обозначения: $D_\sigma=\{z: |\varphi(z)|\leqq\sigma\}\cup E$, $\Gamma_\sigma=\{z: |\varphi(z)|=\sigma\}$ (σ называется параметром D_σ, соответственно Γ_σ). Из [4] известно, что Γ_σ — эллипс с полуосями $\sigma+1/\sigma$ и $\sigma-1/\sigma$ и что $|z(\Gamma_\sigma)|=\sigma$. Будем предполагать, что для $\sigma=1$, $D_\sigma=E$.

Определяем $D_m(f)$ как максимальную область вида D_σ, в которой f продолжается как m-мероморфная (в которой f имеет не более, чем m полюсов). R_m — параметр $D_m(f)$, D_{R_0} — максимальный эллипс голоморфности f. Ясно, что если $f\in\mathscr{H}(E)$, то $R_0>1$ и тем самым $R_m>1$ для каждого фиксированного $m\in\mathsf{N}$.

Пусть $\mathscr{P}_{n\cdot m}=\{\xi_{n\cdot m\cdot 1},\dots,\xi_{n\cdot m\cdot l_n}\}$ — множество свободных полюсов $r_{n\cdot m}$ (каждый полюс выписывается столько раз, какова его кратность). Пусть $a\in\bar{\mathsf{C}}$. Всегда, если не оговорено другое, будем предполагать, что точки $\mathscr{P}_{n\cdot m}$ упорядочены в ряд по неубывающим расстояниям до точки a. Зная асимптотическое поведение точек $\mathscr{P}_{n\cdot m}$, можно судить о величине R_m. В (6) Прохоровым дана следующая

Теорема. *Пусть $a\in\mathsf{C}\setminus E$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
A) $a\in D_m(f)$ *и a — полюс для f.*
B) $\xi_{n\cdot m\cdot 1}\to a$ *при $n\to\infty$ быстрее геометрической прогрессии со знаменателем, принадлежащим отрезку* (0, 1).

Кроме того, если выполнено A) *или* B), *то:*

СЕРДИКА Българско математическо списание, Том. 16, 1990, с. 35-40

$\left| \begin{array}{l} R_m = |\varphi(a)|/\Delta(a), \end{array}\right.$ *определение* $\Delta(a)$ *см. в* [1],
$\mu(a)=\nu$, *здесь* ν — *кратность полюса* f *в точке* a, *а* $\mu(a)$ — *количество точек из* $\mathcal{P}_{n,m}$, *которые стремятся к* a *при* $n\to\infty$ *быстрее, чем убывающая геометрическая прогрессия.*

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть* $f\in\mathcal{H}(E)$, $a\in\mathbf{C}\setminus E$ *и пусть существует число* $i\leq m$; $i\in\mathbf{N}$ *такое, что*: а) $|\xi_{n,m,j}-a|=o(1/n)$; $j=1,\ldots,i$.

б) $\liminf\limits_{n\in\mathbf{N}}|\xi_{n,m,j+1}-a|>0$.

Тогда $a\in\overline{D_m(f)}$, *и тем самым* $R_m\geq|\varphi(a)|$.

Перед доказательством утверждения теоремы сформулируем некоторые результаты и определения, используемые при доказательстве. Так как m будет всегда фиксированным, то дальше этот индекс не будет выписываться. Иногда удобно использовать $r_n(z)$ в следующем виде: $r_n(z)=((\Pi_{|\xi_{n,j}|>1}\xi_{n,j}^{-1})P_n(z))/((\Pi_{|\xi_{n,j}|>1}\xi_{n,j}^{-1})Q_n(z))$. При этом преобразовании знаменатель r_n приобретает следующую форму:

(1) $$Q_n(z)=\prod_{|\xi_{n,j}|\leq 1}(z-\xi_{n,j})\prod_{|\xi_{n,j}|>1}(z/\xi_{n,j}-1).$$

Если Q_n записан в форме (1), то для каждого компакта $K\subset\mathbf{C}$ выполняется

(2) $$\|Q_n\|_K\leq C_1;\quad n\in\mathbf{N}.$$

Здесь и в дальнейшем через $C_1, C_2,\ldots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n.

Пусть $\varepsilon>0$. Для каждого $n\in\mathbf{N}$ определяем множество $J_{n,\varepsilon}$ следующим образом: $J_{n,\varepsilon}=\bigcup_{j=1}^{l_n}\{z:|z-\xi_{n,j}|<\varepsilon/6mn^2\}$.

Если $n>0$, полагаем: $J_{0,\varepsilon}=\bigcup_{j=1}^{k}\{z:|z-b_j|<\varepsilon/6m\}$, (здесь $b_1, b_2,\ldots$ — полюсы f в $D_m(f)$).

Пусть $J_\varepsilon=\bigcup_{n\geq 0}J_{n,\varepsilon}$ и для каждого компакта $K\subset\mathbf{C}$, $K(\varepsilon)=K\setminus J_\varepsilon$. Из [1] известно, что если Q_n записан в форме (1), то для каждого $\varepsilon>0$ и для каждого компакта $K\subset\mathbf{C}$ выполняется:

(3) $$\min_{z\in K(\varepsilon)}|Q_n(z)|>C_2 m^{-2n};\quad n\in\mathbf{N}.$$

Пусть Ω — область, граница $\delta\Omega$ которой составлена из двух замкнутых аналитических кривых γ_1 и γ_2, $\gamma_1\cap\gamma_2=\varnothing$. Функция $\omega(z)$ называется гармонической мерой γ_1 относительно Ω в точке $z\in\Omega$, если $\omega(z)$ решение задачи Дирихле:

$$\left|\begin{array}{l}\Delta\omega=0;\quad z\in\Omega\\ \omega(z)=0,\quad z\in\gamma_1;\quad \omega(z)=1,\quad z\in\gamma_2.\end{array}\right.$$

Пусть Ω — область. Функция $g(z,\zeta)$ называется функцией Грина для области Ω с особенностью в $z=\zeta$, если

1. $g(z,\zeta)$ гармонична в $\Omega\setminus\{\zeta\}$,
2. $g(z,\zeta)=0$ при $z\in\delta\Omega$,
3. разность $|g(z,\zeta)-\ln|z-\zeta||\leq M$ при $z\to\zeta$; $M=\mathrm{const}$.

Теорема 2 (*об альтернансе*, см. [5]). *Существует, притом единственная, функция* $r_n(z)$, *которая вполне определяется следующим свойством: если* $P_n(z)$ *и* $Q_n(z)$ *не обладают общими делителями, то число* N *последовательных точек (называемые точками альтернанса для* f *на* E) *из* E, *в которых разность* $(f-r_n)(z)$ *принимает с чередующимися знаками значение* $\|f-r_n\|_E$, *не менее чем* $n+m+2-d_{n,m}$, *где* $d_{n,m}=\min(n-\deg P_n,\ m-\deg Q_n)$, *а если* $r_n\equiv 0$, *то* $N\geq n+2$.

Теорема 3 (*о двух константах*, см. [4]). *Пусть функция* $f \in \mathscr{H}(E)$ *и пусть* $|f(z)|$ *является ограниченным в области* Ω. *Пусть все предельные значения* $|f(z)|$ *при стремлении* z *из* Ω *к точкам* $\alpha_k (k=1, 2)$ *не превосходят соответственно* $M_k (k=1, 2)$ (*здесь* $\delta\Omega = \alpha_1 \cup \alpha_2$; $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \varnothing$; α_1, α_2 — *аналитические кривые*). *Пусть* $\omega(z)$ — *гармоническая мера* α_1 *относительно* Ω *в точке* $z \in \Omega$.

Тогда в Ω *выполняется неравенство*

$$\ln|f(z)| \leqq \omega(z) \ln M_1 + (1-\omega(z)) \ln M_2.$$

Как следствие этой теоремы получается

Теорема 4 (*Адамара о трех кругах*, см. [4]). *Пусть* $\Omega = \{z: r_1 < |z| < r_2\}$, $\alpha_1 = \{z; |z| = r_1\}$, $\alpha_2 = \{z: |z| = r_2\}$. *Тогда*: $\max_{|z|=r} |f(z)| \leqq M_1^{\ln(r/r_2)\ln(r_1/r_2)} M_2^{\ln(r/r_1)/\ln(r_2/r_1)}$; $r_1 < r < r_2$.

Теорема 5 (*Саффа — Гончара*, см. [2]) *Пусть* $\rho_n = \|f - r_n\|_E$ и $\sigma > 1$. *Если* $\limsup_{n\to\infty} \rho_n^{1/n} \leqq 1/\sigma < 1$, *то* f *продолжается как* m-*мероморфная в* D_σ.

Через $\cup_{a\cdot r}$, $K_{a\cdot r}$, $\Gamma_{a\cdot r}$ обозначаем соответственно открытый круг, замкнутый круг и окружность с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$. Будем использовать следующие обозначения:

$$\rho_n = \|f - r_n\|_E; \quad \tau_1 = \min_{z \in E} |a - z|; \quad \tau_2 = \max_{z \in E} |a - z|.$$

Всюду будем предполагать, что f не является рациональной, так как если f-рациональная функция, то $f \equiv r_{n_0}$ для всех достаточно больших $n \geqq n_0$.

Доказательство теоремы 1. Допустим, что $a \notin \overline{D_m(f)}$. Из этого следует, что найдется такое $r > 0$, для которого $\Gamma_{a\cdot r} \cap \overline{D_m(f)} = \varnothing$. Обозначим через $\widehat{q}_n(z)$ произведение $\prod_j{}_\rho (z - \xi_{n\cdot j})$ (здесь $\rho > \sup_{z \in \Gamma_{a,r}} |(z)|$, а $\prod_j{}_\rho$ — произведение тех $(z - \xi_{n\cdot j})$, для которых выполняется $\xi_{n\cdot j} \in D_\rho$). Преобразуем $\widehat{q}_n(z)$ как это сделано с $Q_n(z)$ в (1), и обозначим преобразованный многочлен через $\widetilde{q}_n(z)$. Ясно, что

$$\widehat{q}_n(z) = \Big(\prod_{|\xi_{n,j}|>1} \xi_{n\cdot j}\Big) \widetilde{q}_n(z). \tag{4}$$

Положим $\psi_n(z) = (r_{n+1} - r_n)(z)(\widetilde{q}_{n+1}\widetilde{q}_n)(z)$. Очевидно $\psi_n \in \mathscr{H}(D_\rho)$.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\deg Q_n = m$. Тогда, используя Теорему 2, получаем

$$(r_{n+1} - r_n)(z) = A_n w_n(z)/(Q_n Q_{n+1})(z), \tag{5}$$

где все нули $w_n(z)$ простые и принадлежат E и кроме того $\deg w_n = n + m + 1$. Полагая в (5) $z = \xi_{n\cdot k}$, получаем:

$$(r_{n+1} - r_n)(z) = \frac{P_n(\xi_{n\cdot k}) Q_{n+1}(\xi_{n\cdot k})}{w_n(\xi_{n\cdot k})} \frac{w_n(z)}{(Q_{n+1}Q_n)(z)}; \quad k = 1, \ldots, i. \tag{6}$$

Для доказательства утверждения рассматриваемой теоремы необходимо оценить $\psi_n(z)$ сверху для $z \in \Gamma_{a\cdot r}$.

Пусть $z \in \Gamma_{a\cdot r}$, z_j — нуль $w_n(z)$ и $r < \tau_1$. Выбираем $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N_0$ выполнялось бы $|\xi_{n\cdot k} - a| < r$. Тогда

$$\frac{|z - z_j|}{|\xi_{n\cdot k} - z_j|} \leq \frac{|a - z_j| + r}{|a - z_j| - r}; \quad k \in \{1, \ldots, i\}. \tag{7}$$

Рассматриваем функцию $g(x) = (x + r)/(x - r)$. Так как $g'(x) < 0$, то $\max_{x \in [\tau_1, \tau_2]} g(x) = g(\tau_1)$, и из (7) получаем

(8) $\quad |w_n(z)/w_n(\xi_{n,k})| \leq [(\tau_1+r)/(\tau_1-r)]^{n+m+1}; \; z\in\Gamma_{a,r}, \; n>N_0, \; k=1,\ldots,i.$

Зафиксируем произвольное $\theta_1>0$ (его выбор будет указан позже) и пусть $\varepsilon>0$. Выбираем r настолько малым, что $\Gamma_{a,r}\subset D_\rho(\varepsilon)$ и

(9) $$(\tau_1+r)/(\tau_1-r)<\exp(\theta_1).$$

Ясно, что для $Q_{n+1}(\xi_{n,k})$ выполнено $|Q_{n+1}(\xi_{n,k})|\leq\|Q_{n+1}\|_{K_{a,r}}$. Из условия а) имеем, что $\xi_{n,k}\xrightarrow[n\to\infty]{} a$; $k\in\{1,\ldots,i\}$. Вводим следующие обозначения:

$$q_n(z)=\prod_{j=1}^{i}(z-\xi_{n,j}), \quad Q_n^*(z)=Q_n(z)/q_n(z).$$

Пусть $P_n^*(z)/q_n(z)$ — сумма главных частей $r_n(z)$, соответствующих точкам $\xi_{n,1},\ldots,\xi_{n,i}$. Следовательно, $P_n(z)=(-P_n^*Q_n^*+Q_n\tilde{\varphi})(z)$, где $\tilde{\varphi}(z)$ голоморфна в $\xi_{n,1},\ldots,\xi_{n,i}$. Из этого равенства получаем:

(10) $$P_n(\xi_{n,j})=P_n^*(\xi_{n,j})\,Q_n^*(\xi_{n,j}); \quad j\in\{1,\ldots,i\}.$$

Из (5) получается легко, что $A_n=(P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1})(z)/w_n(z)$; $z\in\mathbb{C}\setminus E$. Заменяя в этом равенстве z на $\xi_{n,j}$, $\xi_{n+1,j}$; $j=1,\ldots,i$, получаем $(P_{n+1}Q_n)(\xi_{n+1,j})/w_n(\xi_{n+1,j})$ $=-(P_nQ_{n+1})(\xi_{n,j})/w_n(\xi_{n,j})$ и отсюда

$$\prod_{j=1}^{i}|(P_{n+1}Q_n)(\xi_{n+1,j})/w_n(\xi_{n+1,j})|=\prod_{j=1}^{i}|(P_nQ_{n+1})(\xi_{n,j})/w_n(\xi_{n,j})|.$$

Из последнего равенства, из определения $Q_n^*(z)$, $q_n(z)$ и (10) получаем

(11) $$\prod_{j=1}^{i}\left|\frac{P_{n+1}^*(\xi_{n+1,j})}{P_n^*(\xi_{n,j})}\right|=\prod_{j=1}^{i}\left|\frac{Q_{n+1}^*(\xi_{n,j})Q_n^*(\xi_{n,j})w_n(\xi_{n+1,j})}{Q_{n+1}^*(\xi_{n+1,j})Q_n^*(\xi_{n+1,j})w_n(\xi_{n,j})}\right|.$$

Пусть z_l — корень полинома $w_n(z)$. Так как $\xi_{n,j}\xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то для всех $n>N_1$ выполняется

$$\frac{|a-z_l|-|\xi_{n+1,j}-a|}{|a-z_l|+|\xi_{n,j}-a|}\leq\left|\frac{\xi_{n+1,j}-z_l}{\xi_{n,j}-z_l}\right|\leq\frac{|a-z_l|+|\xi_{n+1,j}-a|}{|a-z_l|-|\xi_{n,j}-a|}.$$

Аналогично (8) находим

(12) $$\left(\frac{\tau_1-|\xi_{n+1,j}-a|}{\tau_1+|\xi_{n,j}-a|}\right)^{n+m+1}\leq\left|\frac{w_n(\xi_{n+1,j})}{w_n(\xi_{n,j})}\right|\leq\left(\frac{\tau_1+|\xi_{n+1,j}-a|}{\tau_1-|\xi_{n,j}-a|}\right)^{n+m+1}.$$

Так как $\exp(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$, то $\tau_1(\exp(o(1/n))-1)/(\exp(o(1/n))+1)=o(1/n)$ и, следовательно, $\ln((\tau_1+o(1/n))/(\tau_1-o(1/n)))^{n+m+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Применяя аналогичные рассуждения и для левой стороны (12), окончательно получаем

(13) $$\lim_{n\to\infty}|w_n(\xi_{n+1,j})/w_n(\xi_{n,j})|=1; \quad j\in\{1,\ldots,i\}.$$

Пусть η — корень $Q_{n+1}^*(z)$. Тогда из а) и б) следует, что для всех $n>N_2$ выполняется

$$\frac{|\eta-a|-|\xi_{n,j}-a|}{|\eta-a|+|\xi_{n+1,j}-a|}\leq\left|\frac{\xi_{n,j}-\eta}{\xi_{n+1,j}-\eta}\right|\leq\frac{|\eta-a|+|\xi_{n,j}-a|}{|\eta-a|-|\xi_{n+1,j}-a|}.$$

Так как $\deg Q^*_{n+1} \leqq m$, то из этого неравенства следует

$$\lim_{n\to\infty} |\, Q^*_{n+1}(\xi_{n,j})/Q^*_{n+1}(\xi_{n+1,j})| = 1; \; j \in \{1, \ldots, i\}. \tag{14}$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\lim_{n\to\infty} |\, Q^*_n(\xi_{n,j})/Q^*_n(\xi_{n+1,j})| = 1; \quad j \in \{1, \ldots, i\}. \tag{15}$$

Из (13), (14) и (15) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{i} \left| \dfrac{P^*_{n+1}(\xi_{n+1,j})}{P^*_n(\xi_{n,i})} \right| = 1.$

Из этого и из очевидных неравенств (ниже $a_n > 0$ для всех $n \in \mathrm{N}$): $\liminf_{n\in\mathrm{N}} a_{n+1}/a_n \leqq \liminf_{n\in\mathrm{N}} a_n^{1/n} \leqq \limsup_{n\in\mathrm{N}} a_n^{1/n} \leqq \limsup_{n\in\mathrm{N}} a_{n+1}/a_n$, получаем $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{i} |P^*_n(\xi_{n,j})|^{1/n} = 1$. Из этого вытекает, что для каждого $n \in \mathrm{N}$ найдется такое $k = k(n) \in \{1, \ldots, i\}$, что

$$\limsup_{n\in\mathrm{N}} |P^*_n(\xi_{n,k})|^{1/n} \leqq 1. \tag{16}$$

Ясно, что для Q^*_n выполняется неравенство типа (2) и, так как $|Q^*_n(\xi_{n,k})| \leqq \|Q^*_n\|_{K_{a,r}}$, то

$$|Q^*_n(\xi_{n,k})| < C_3; \quad n > N_3. \tag{17}$$

Пусть в (6) $k = k(n)$. Тогда из (2), (3), (8), (9), (16) и (17) получаем

$$\limsup_{n\in\mathrm{N}} |(r_{n+1} - r_n)(z)|^{1/n} \leqq \exp(\theta_1); \quad z \in \Gamma_{a,r}. \tag{18}$$

Так как для $\tilde{q}_n$ выполняется неравенство типа (2), то из (18) следует, что найдется такое $N_4 \in \mathrm{N}$, для которого при всех $n > N_4$ выполняется $|\psi_n(z)| \leqq \exp(n\,\theta_1)$; $z \in \Gamma_{a,r}$. Пусть $\delta > 0$. Положим $r_\delta = R_m \exp(-\delta/2)$. Выбираем δ такое, что $\Gamma_{r_\delta} \subset D_\rho(\varepsilon)$. Пусть $G_\delta = \bar{\mathrm{C}} \setminus \{D_{r_\delta} \cup K_{a,r}\}$ и $\zeta_{n,\nu}$ — полюсы $\psi_n(z)$ в $\mathrm{C} \setminus D_\delta$, а $g_\delta(z, \zeta_{n,\nu})$ — функция Грина для G_δ с особенностью в $\zeta_{n,\nu}$. Пусть μ_n — порядок полюса ψ_n в ∞. Ясно, что $n - m + 1 \leqq \mu_n \leqq n + m + 1$ и так как f не является рациональной, то $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Рассмотрим функцию

$$H_n(z) = \frac{1}{\mu_n} \ln |\psi_n(z)| - \ln \frac{|\varphi(z)|}{R_m} + \frac{1}{\mu_n} \sum_{\nu} g_\delta(z, \zeta_{n,\nu}).$$

Из дефиниции функции Грина, из определения ψ_n и φ получается легко, что H_n субгармонична в G_δ. Зафиксируем θ_1 и r такими, что для всех $n > N_4$ выполнялось

$$H_n(z) < -C_4 < 0; \quad z \in \Gamma_{a,r}. \tag{19}$$

Из доказательства теоремы 5 и из (2) вытекает, что для всех $n \geqq N_5 \geqq N_4$ справедлива оценка $|\psi_n(z)| \leqq C_5$; $z \in \Gamma_{r_\delta}$ и, следовательно,

$$H_n(z) \leqq \frac{1}{\mu_n} \ln C_5 + \delta/2; \quad z \in \Gamma_{r_\delta}, \quad n \geqq N_6.$$

Из принципа максимума для субгармонических функций, из (19) и из последнего неравенства получаем, что

$$H_n(z) < \delta; \quad z \in \Gamma_{R_m}, \quad n \geqq N_6. \tag{20}$$

Зафиксируем R_0 такое, что $R_m < R_0 < \inf_{z \in \Gamma a,r} |\varphi(z)|$. Применяя теорему 3 к $H_n(z)$ в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\bar{D}_{R_m} \cup K_{a,r}\}$ и имея в виду (19) и (20), находим, что $H_n(z) \leqq -\lambda_1 C_4 + \delta$; $z \in \Gamma_{R_0}$, $n \geqq N_6$, где $0 < \lambda < 1$, а $\omega(z)$ — гармоническая мера Γ_{R_m} относительно $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\bar{D}_{R_m} \cup K_{a,r}\}$. Фиксируем теперь $\delta > 0$ такое, что рядом с уже поставленными на нем ограничениями, оно удовлетворяло бы и дополнительному условию: $-\lambda_1 C_4 + \delta = -\lambda < 0$. Следовательно,

$$H_n(z) \leqq -\lambda; \quad z \in \Gamma_{R_0}, \quad n \geqq N_6. \tag{21}$$

Без ограничения общности будем предполагать, что R_0 выбрано таким, что $R_0 \exp(-\lambda)/R_m > 1$. Так как $l_n \leqq m$ и $g_\delta(z, \zeta_{n,\nu})$ — гармоническая в $G_\delta \setminus \{\bar{\mathbb{C}} \setminus D_\rho\}$, то $\Sigma_\nu g_\delta(z, \zeta_{n,\nu}) \leqq C_6 m$; $z \in \Gamma_{R_0}$. Последнее неравенство и (21) приводят к оценке

$$|\psi_n(z)| \leqq C_6 (R_0 \exp(-\lambda)/R_m)^n; \quad z \in \Gamma_{R_0}, \quad n \geqq N_7 \geqq N_6. \tag{22}$$

Фиксируем $r_0 \in (R_m^2/R_0, \ R_m^2 \exp(\lambda/2)/R_0)$ такое, что $\Gamma_{r_0} \subset D_\rho(\varepsilon)$, и пусть $R = \exp(-\lambda/4) R_m$. Ясно, что в силе выбора $r_0 < R < R_m$ и, следовательно, можно применять теорему 5. Из той теоремы вытекает, что для θ_1 найдется такое $N_8 \geqq N_7$, что для $n \geqq N_8$ выполнено $|(r_{n+1} - r_n)(z)| \leqq \exp(n\theta_1)(r_0/R)^n$; $z \in \Gamma_{r_0}$. Так как для $\tilde{q}_n$ выполняется неравенство типа (2), то из последнего неравенства находим, что

$$|\psi_n(z)| \leqq \exp(n\theta_1)(r_0/R)^n; \quad z \in \Gamma_{r_0}, \quad n \geqq N_9 \geqq N_8. \tag{23}$$

Пусть $R_1 = (r_0 R_0)^{1/2}$. Очевидно, что $R_m < R_1 < R_0$. Из (22), (23) и из теоремы 4 находим $|\psi_n(\varphi)| \leqq C_7 \exp(n(-\lambda/8))$; $|\varphi| = R_1$. Отсюда, по принципу максимума, примененному в кольце $\{\varphi: 1 < |\varphi| < R_1\}$, получаем $|\psi_n(\varphi)| \leqq C_7 \exp(n(-\lambda/8))$ $1 < |\varphi| < R_1$. Пусть $q_\lambda = \exp(-\lambda/8)$. Из последнего неравенства следует, что

$$|(r_{n+1} - r_n)(z)| \leqq C_7 q_\lambda^n / |(\tilde{q}_{n+1} \tilde{q}_n)(z)|; \quad z \in \bar{D}_{R_1} \setminus E, \quad n \geqq N_9.$$

Так как для $\tilde{q}_n$ выполняется неравенство типа (3), то, применяя вновь теорему 5, получаем $\limsup_{n \in \mathbb{N}} |(r_{n+1} - r_n)(z)|^{1/n} \leqq q_\lambda < 1$; $z \in \overline{D_{R_1}(\varepsilon)}$ (предположение $1/R_m \leqq q_\lambda$ очевидно не ограничивает общность). Как видно из доказательства теоремы 5 это означает, что f продолжается как m-мероморфная в D_{R_1}. Но $D_{R_1} \supset D_m(f)$ — строго, а это противоречит определению $D_m(f)$. Следовательно, $a \in \overline{D_m(f)}$. Для получения (19) предполагалось, что $\deg Q_n = m$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если это не так, то из теоремы 2 получается легко, что $w_n(z)$ имеет ровно $n + m + 1 - d_n$ простых нулей и все они принадлежат E. Так как $n + 1 \leqq n + m + 1 - d_n \leqq n + m + 1$, то, рассуждая как и в случае $\deg Q_n = m$, получаем (19). Этим доказательство теоремы 1 закончено.

Из доказательства видно, что утверждение теоремы 1 справедливо, если предположить, что существует последовательность $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $k_n \in \{1, \ldots, \liminf_{n \in \mathbb{N}} l_n\}$ такая, что $|\xi_{n \cdot k_n} - a| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ и $\limsup_{n \in \mathbb{N}} |P_n(\xi_{n \cdot k_n})|^{1/n} \leqq 1$. Рассуждения, проведенные для установления (16), показывают, что эти условия будут выполняться, если предположим, что

I) $\tau_{n,j} = o(1/n)$; $j \in \{1, \ldots, i\}$,

II) $o(1/n)/\tau_{n,j} = o(1/n)$; $j \in \{i+1, \ldots, \liminf_{n \in \mathbb{N}} l_n\}$

или II') $\liminf_{n \in \mathbb{N}} \tau_{n,j} > 0$; $j \in \{i+1, \ldots, \liminf_{n \in \mathbb{N}} l_n\}$

(здесь $\tau_{n,j}=|\xi_{n,j}-a|$).

Можно заметить, что в оценку w_n не включались данные о поведении корней многочлена $w_n(z)$, принадлежащих E. В заключение нужно отметить, что метод доказательства теоремы 1 является приложением методов доказательства из работ [1], [3] и [7]. Этот метод был предложен автору Р. Ковачевой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Гончар. Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций. *Мат. сб.*, 115, 1981, 590—613.
2. А. Гончар. Об одной теореме Саффа. *Мат. сб.*, 94, 1974, 152—197.
3. В. Вавилов. О сходимости аппроксимаций Паде мероморфных функций. *Мат. сб.*, 101, 1976, 44—56.
4. Г. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.
5. Н. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимаций. М., 1965.
6. А. Прохоров. О Чебышевских рациональных аппроксимациях аналитических функций. *Доклады АН СССР*, 276, 1984, 1321—1324.
7. R. Kovacheva. Rational best Chebyshev's approximants and poles of functions. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 39, 1986, 27—30.

Поступила 20. 10. 1987 г.
В переработанном виде 29. 05. 1989 г.

Иван В. Иванов
1619 София
ул. „Поточе", 9