Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ON THE CHRISTOFFEL-DARBOUX FORMULA AND ITS APPLICATIONS

R. K. RAINA

Simple operational techniques and summation manipulations are applied to the familiar Christoffel-Darboux formula to obtain a new class of summation relations in order to unify and generalize the various results concerning the finite summations. The usefulness of our main result (2.1) given below is shown by illustrating its applications, thus revealing the relevance to the well-known Srivastava's (1986) recent results.

1. Preliminaries. Motivated by the usefulness of various properties of a well-known triple-series analogue to Appell's double hypergeometric function F_2 [9, p. 33, Eqn. (5)], in particular the production of bremsstrahlung by the interaction of polarized electrons with the Coulomb field of a nucleus [4] and by the calculation of radial matrix elements of the radiative transitions between the states of a relativistic electron in a Coulomb field [5], Srivastava [8] extended his earlier summation formula [6, p. 1088, Eqn. [(1.5)], (See also [1] and [2]) to the generalized triple hypergeometric function $F^{(3)}[x, y, z]$. This function is defined by ([9, p. 69, Eqn. (39)]):

$$(1.1)\qquad F^{(3)}[x, y, z]=F^{(3)}\left[\begin{matrix}(a): \ :(b);\,(b');\,(b''):\,(c);\,(c');\,(c'');\\ (e): \ :(g);\,(g');\,(g''):\,(h);\,(h');\,(h'');\end{matrix}\ x, y, z\right]$$

$$=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\Lambda(m, n, p)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!},$$

where the function $\Lambda(m, n, p)$ is mentioned in [9].

Let a polynomial system be defined by

$$(1.2)\qquad S_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\delta(m, n)\,x^m,\quad n\geqq 0.$$

It is well known that if $S_n(x)$ is an orthogonal system, then it will satisfy a three-term recurrence relation [3, p. 271]:

$$(1.3)\qquad S_{n+1}(x)=(A_nx+B_n)S_n(x)-C_nS_{n-1}(x),$$

whree the coefficients A_n, B_n and C_n are easily determinable (see [3]). Further, (1.2) and (1.3) yield the well-known Christoffel-Darboux formula

$$(1.4)\qquad \sum_{k=0}^{n}h_k^{-1}S_k(x)S_k(y)$$

$$=\frac{(A_nh_n)^{-1}}{(x-y)}[S_{n+1}(x)S_n(y)-S_n(x)S_{n+1}(y)],\quad x\neq y,$$

where

$$(1.5)\qquad \begin{cases}A_n=\delta(n+1,\ n+1)/\delta(n,\ n),\\ h_n=(S_n,\ S_n)=\int_a^b w(x)\,S_n^2(x)dx,\end{cases}$$

2. Оптимальная экстраполяция и золотаревские сплайны. При решении задач (1.2) и (1.3) существенную роль играют золотаревские идеальные сплайны, поэтому нам потребуется ряд предварительных сведений, касающихся этих сплайнов.

Идеальным сплайном на отрезке $[-1, 1]$ степени n с k узлами $-1<\xi_1<\ldots<\xi_k<1$ называется функция вида

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i+c\,[t^n+2\sum_{j=1}^{k}(-1)^j(t-\xi_j)_+^n],$$

где

$$t_+^n=\begin{cases} t^n, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Будем говорить, что функция $x\in C[-1, 1]$ имеет l точек альтернанса (l-альтернанс), если существуют точки $-1\leq t_1<\ldots<t_l\leq 1$ такие, что

$$x(t_i)=(-1)^i\varepsilon\,\|x\|,$$

где $\varepsilon=1$ или -1, а $\|x\|=\max_{t\in[-1,1]}|x(t)|$.

Т е о р е м а 1 ([5]). *При всех n и $m\geq n$ существует единственный идеальный сплайн на отрезке $[-1, 1]$ x_{mn} степени n, имеющий $m-n$ узлов и $m+1$-альтернанс, нормированный условиями $x_{mn}(1)>0$, $|x_{mn}^{(n)}(t)|\equiv 1$.*

Сплайны x_{mn} называются чебышевскими идеальными сплайнами, а

$$x_{nn}(t)=\frac{1}{2^{n-1}\,n!}\,T_n(t),$$

где $T_n(t)=\cos(n\arccos t)$ — многочлен Чебышева.

Положим

$$\delta_{mn}=\|x_{mn}\|.$$

Известно (см. [6, с. 138, 135], [7]), что величины δ_{mn} при фиксированном n монотонно убывают и стремятся к нулю, кроме того, при $m\to\infty$

$$\delta_{mn}=\left(\frac{2}{\pi m}\right)^n K_n(1+o(1)),$$

где K_n — константа Фавара. Для $n=1, 2, 3, m$ имеет место равенство

$$\delta_{mn}=\Big(m-n+\frac{4}{\pi}\sqrt[n]{\frac{K_n\,n!}{2}}\Big)^{-n}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^n K_n. \tag{2.1}$$

Пусть $t_i=\frac{2i}{m}-1$, $i=1,\ldots, m-1$, $t_0=-\infty$, $t_m=+\infty$. Положим

$$\varphi_{m0}(t)=(-1)^{m+i},\quad t_{i-1}<t<t_i,\quad i=1,\ldots, m,$$

$$\varphi_{mn}(t)=\int_{\gamma_{mn}}^{t}\varphi_{m,\,n-1}(u)\,du,\quad \gamma_{mn}=\begin{cases}\frac{1}{m}-1, & n=2k+1,\\ -1, & n=2k.\end{cases}$$

Функции $\varphi_{mn}(t)$ называются эйлеровыми идеальными сплайнами (подробнее см., например, [8, с. 9, 64]). Известно, что

$$\|\varphi_{mn}\|=\Big(\frac{2}{\pi m}\Big)^n K_n.$$

Нетрудно показать, что при $n=1, 2, 3$

$$\max_{|t|\leqq 1+\frac{\varepsilon_n}{m}} |\varphi_{mn}(t)| = \|\varphi_{mn}\|,$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{4}{\pi}\sqrt[n]{\frac{K_n n!}{2}} - 1 \quad (\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = \sqrt{2}-1,\ \varepsilon_3 = 1).$$

В случае, когда $n=1, 2, 3$, чебышевский идеальный сплайн может быть записан в виде

$$x_{mn}(t) = \left(1+\frac{\varepsilon_n}{m-n+1}\right)^{-n} \varphi_{m-n+1,\,n}\left[\left(1+\frac{\varepsilon_n}{m-n+1}\right)t\right]. \tag{2.2}$$

При этом его точки альтернанса имеют вид

$$t_{kn}^{(m)} = \frac{2k-m}{m-n+1+\varepsilon_n}, \quad k=1, \ldots, m-1, \quad t_{mn}^{(m)} = -t_{0n}^{(m)} = 1.$$

В общем случае в силу ряда экстремальных свойств чебышевских и эйлеровых идеальных сплайнов (см. [8, с. 265, 267]) имеют место неравенства

$$\|\varphi_{m+1,\,n}\| \leqq \|x_{mn}\| \leqq \|\varphi_{m-n+1,\,n}\|. \tag{2.3}$$

Теорема 2. ([6, с. 138], [7]). *При $\delta \in (\delta_{mn}, \delta_{m-1,\,n})$ и $m \geqq n (\delta_{n-1,\,n} = +\infty)$ существует единственный сплайн $Z_n(t, \delta)$ порядка n, удовлетворяющий условиям:*

1) *$Z_n(t, \delta)$ имеет $m-n$ узлов,*
2) *$Z_n(t, \delta)$ имеет m-альтернанс,*
3) $\|Z_n(\cdot, \delta)\| = \delta, \quad |Z_n^{(n)}(t, \delta)| \equiv 1, \quad Z_n(1, \delta) = \delta, \quad Z_n^{(n)}(1, \delta) = 1.$

Положим $Z_n(t, \delta_{mn}) = x_{mn}(t)$. Тогда идеальный сплайн $Z_n(t, \delta)$ определен при всех $\delta > 0$. Он носит название золотаревского идеального сплайна и при $\delta > \delta_{nn}$ пропорционален многочлену Золотарева степени n (см. [9, с. 314], [10]).

Теорема 3. ([2]). *Пусть $P(t)$ — идеальный сплайн на отрезке $[-1, 1]$ степени n с $m-n$ узлами $(m \geqq n)$ такой, что $|P^{(n)}(t)| \equiv 1$, $P^{(n)}(1) = 1$, и для некоторой системы точек $-1 \leqq t_1 < \ldots < t_m \leqq 1$*

$$P(t_i) = (-1)^{m+i}\delta.$$

Тогда для любой функции $x \in W_\infty^n$, удовлетворяющей условиям $|x(t_i)| \leqq \delta$, $i=1, \ldots, m$, при всех $t \in [t_m, b]$, справедливо неравенство

$$|x(t)| \leqq P(t).$$

Золотаревские идеальные сплайны появляются при решении многих экстремальных задач (см. [5—7, 11]). Они являются экстремальными также в следующих задачах.

Теорема 4. *Пусть $\delta \in [\delta_{mn}, \delta_{m-1,\,n})$ и $t_{1n}(\delta), \ldots, t_{mn}(\delta) = 1$ — точки альтернанса функции $Z_n(t, \delta)$. Тогда для любого $t_0 \in [1, b]$ и $k \geqq m$*

$$\sup_{\substack{x \in W_\infty^n \\ \|x\| \leqq \delta}} |x(t_0)| = \inf_{t_i \in [-1, 1]} \sup_{\substack{x \in W_\infty^n \\ |x(t_i)| \leqq \delta,\ i=1, \ldots, k}} |x(t_0)| = \sup_{\substack{x \in W_\infty^n \\ |x(t_{in}(\delta))| \leqq \delta,\ i=1, \ldots, n}} |x(t_0)| = Z_n(t_0, \delta). \tag{2.4}$$

Кроме того, при всех $\delta > 0$ число точек альтернанса функции $Z_n(t, \delta)$ (без учета точки -1, когда $\delta = \delta_{mn}$) удовлетворяет неравенству

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{K_n}{\delta}\right)^{1/n}-1\leqq m<\frac{2}{\pi}\left(\frac{K_n}{\delta}\right)^{1/n}+n. \tag{2.5}$$

Доказательство. В силу того, что для любой системы точек $t_1,\ldots,t_k \in [-1, 1]$ справедливо неравенство

$$\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ \|x\|\leqq\delta}}|x(t_0)|\leqq \sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_i)|\leqq\delta,\ i=1,\ldots,k}}|x(t_0)|,$$

учитывая свойства $Z_n(t, \delta)$ и теорему 3, имеем

$$Z_n(t_0,\delta)\leqq \sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ \|x\|\leqq\delta}}|x(t_0)|\leqq \inf_{t_i\in[-1,1]}\ \sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_i)|\leqq\delta,\ i=1,\ldots,k}}|x(t_0)|$$

$$\leqq \sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_{in}(\delta))|\leqq\delta,\ i=1,\ldots,m}}|x(t_0)|=Z_n(t_0,\delta).$$

Пусть теперь δ — произвольное положительное число. Существует такое m, что $\delta\in[\delta_{mn}, \delta_{m-1,n})$. Число точек альтернанса функции $Z_n(t, \delta)$ в этом случае (без учета -1) равно m. Из неравенства (2.3) имеем

$$\delta\geqq\delta_{mn}\geqq\|\varphi_{m+1,n}\|=\left[\frac{2}{\pi(m+1)}\right]^n K_n.$$

Отсюда получаем левое из неравенств (2.5). При $m=n$ правое из неравенств (2.5) очевидно, а в случае, когда $m>n$, оно вытекает из соотношений

$$\delta<\delta_{m-1,n}\leqq\|\varphi_{m-n,n}\|=\left[\frac{2}{\pi(m-n)}\right]^n K_n.$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $\delta\in[\delta_{mn}, \delta_{m-1,n})$. *Тогда для любого* $t_0\in(1, b]$ и $k\geqq m$

$$R_{kn}(t_0,\delta)=R_n(t_0,\delta)=r_n(t_0, t_{1n}(\delta),\ldots,t_{mn}(\delta),\delta)=Z_n(t_0,\delta), \tag{2.6}$$

а для порядка информативности справедливы неравенства

$$n\leqq I_n(t_0,\delta)\leqq m. \tag{2.7}$$

При всех $\delta>0$

$$n\leqq I_n(t_0,\delta)<\frac{2}{\pi}\left(\frac{K_n}{\delta}\right)^{1/n}+n. \tag{2.8}$$

Доказательство. Из работы [1] следует равенство

$$r_n(t_0, t_1,\ldots,t_k,\delta)=\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_i)|\leqq\delta,\ i=1,\ldots,k}}|x(t_0)|,$$

которое вместе с (2.4) дает равенства (2.6). Правое из неравенств (2.7) следует из (2.6), а левое — следствие того, что при $k<n$ для любой системы точек $t_1,\ldots,t_k \in[-1, 1]$ и $t_0\in(1, b]$

$$\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_i)|\leqq\delta,\ i=1,\ldots,k}}|x(t_0)|=\infty.$$

Неравенства (2.8) вытекают из (2.7) и (2.5). Теорема доказана.

3. Некототорые частные случаи. Рассмотрим задачу оптимальной экстраполяции (1.2), когда $m=n$.

Теорема 6. *Для всех* $t_0 \in (1, b]$ *имеет место равенство*

$$R_{nn}(t_0, \delta)=\begin{cases} \dfrac{\delta}{2}\left[\dfrac{H^n(\frac{K}{n}-u_0)}{H^n(\frac{K}{n}+u_0)}+\dfrac{H^n(\frac{K}{n}+u_0)}{H^n(\frac{K}{n}-u_0)}\right], & \delta>\Delta_n, \\ \delta T_n\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\delta n!}\right)^{1/n}(t_0-1)+1\right], & 0<\delta\leqq\Delta_n, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\Delta_n^{-1}=2^{n-1}n!\cos^{2n}\dfrac{\pi}{2n}$, *при этом единственными оптимальными узлами при* $0<\delta\leqq\Delta_n$ *являются узлы*

$$t_j=1-4\left(\frac{\delta n!}{2}\right)^{1/n}\cos^2\frac{\Pi_j}{2n},\quad j=1,\ldots,n,$$

а при $\delta>\Delta_n$ *узлы* $t_1,\ldots,t_n$ *определяются из равенств (эти же равенства определяют* u_0*)*

$$t_j=\frac{\operatorname{sn}^2\frac{K}{n}+\operatorname{sn}^2 u_j}{\operatorname{sn}^2\frac{K}{n}-\operatorname{sn}^2 u_j},\quad j=0, 1,\ldots,n,$$

где $u_1,\ldots,u_n$ *таковы, что*

$$\arg\frac{H(\frac{K}{n}+u_j)}{H(\frac{K}{n}-u_j)}=\pi\left(1-\frac{j}{n}\right),\quad j=1,\ldots,n;$$

здесь K *— полный эллиптический интеграл первого рода для модуля, однозначно определяемого из уравнения*

$$\frac{1}{2^{n-1}n!}\left[\frac{H_1(0)\theta_1(0)}{H_1(\frac{K}{n})\theta_1(\frac{K}{n})}\right]^{2n}=\delta,$$

H, H_1 и θ_1 *— стандартные обозначения тета-функций. Оптимальным методом является метод*

$$x(t_0)\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_j(t_0)}{\omega_j(t_j)}x_j, \tag{3.2}$$

где

$$\omega_j(t)=\frac{\omega(t)}{t-t_j},\quad \omega(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-t_j).$$

Доказательство. Из работы [1] следует, что для любой системы различных точек $t_1,\ldots,t_n\in[a, b]$ имеет место равенство

$$r_n(t_0, t_1,\ldots,t_n, \delta)=\frac{|\omega(t_0)|}{n!}+\delta\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\omega_j(t_0)}{\omega_j(t_j)}\right|, \tag{3.3}$$

причем наилучшим методом является метод (3.2). Обозначим через $\varphi(t)$, $\bar{t}=(\bar{t}_1,\ldots,t_n)$ функцию, стоящую в правой части равенства (3.3). Тогда для $\bar{t}\in D=\{(t_1,\ldots,t_n):-1\leqq t_1<\ldots<t_n\leqq 1\}$ и $t_0\in(1, b]$ имеем

$$\varphi(\overline{t})=\frac{\omega(t_0)}{n!}+\delta\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\frac{\omega_j(t_0)}{\omega_j(t_j)}.$$

Функция $\varphi(\overline{t})$ непрерывна при $\overline{t}\in D$ и $\varphi(\overline{t})\to+\infty$ при $t_i\to t_j$. Следовательно, существует точка, в которой функция $\varphi(\overline{t})$ достигает своей нижней грани. В экстремальной точке $-1<t_1<\ldots<t_n<1$ должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial\varphi(\overline{t})}{\partial t_j}=0,\quad j=1,\ldots,n. \tag{3.4}$$

Если $t_1=-1$ или $t_n=1$, то соответствующее равенство из (3.4) заменяется на неравенство

$$\frac{\partial\varphi(\overline{t})}{\partial t_1}\geqq 0\quad\text{или}\quad\frac{\partial\varphi(\overline{t})}{\partial t_n}\leqq 0.$$

Для данной экстремальной точки $-1\leqq t_1<\ldots<t_n\leqq 1$ рассмотрим многочлен степени n

$$p_n(t)=\frac{\omega(t)}{n!}+\delta\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\frac{\omega_j(t)}{\omega_j(t_j)}.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$p_n'(t_j)=-\frac{\omega_j(t_j)}{\omega_j(t_0)}\frac{\partial\varphi(\overline{t})}{\partial t_j}.$$

При $t>t_n$ $p_n(t)>\delta$, поэтому $p_n'(t_n)>0$, и следовательно, $\frac{\partial\varphi(\overline{t})}{\partial t_n}<0$. Таким образом, $t_n=1$. Из того, что $p_n(t_1)=(-1)^{n+1}\delta, (-1)^n p_n(t)\to+\infty$ при $t\to-\infty$, а $(-1)^n p_n'(t_1)\geqq 0$, следует существование точки $\tau\in(-\infty,\ t_1]$, в которой $p_n'(\tau)=0$. Так как $p_n'(t)$ не может иметь более $n-1$ нулей, то $p_n(t)$ имеет экстремумы только в точках $\tau,\ t_2,\ldots,t_{n-1}$.

Итак, $|p_n(t)|\leqq\delta$ при $t\in[t_1,\ 1]$, $p_n(t)$ имеет n-альтернанс в точках $t_1,\ldots,t_n$, $p_n^{(n)}(t)\equiv 1$, $p_n(1)=\delta$. Из теоремы 2 следует, что многочлен $p_n(t)$ определен единственным образом и при $t_1=-1$ пропорционален многочлену Золотарева на отрезке $[-1,\ 1]$, а при $t_1\neq-1$ $\tau=t_1$ и $p_n(t)$ пропорционален многочлену Чебышева на некотором отрезке $[\tau_2,\ 1]$ с уклонением δ (τ_2 однозначно находится по δ). Представление для многочлена Золотарева можно найти в работах [9, с. 314], [10]. Теорема доказана.

Из теорем 5 и 6 вытекает, что при $\delta\geqq\delta_{nn}=(2^{n-1}n!)^{-1}$ для любого $k\geqq n$ и $t_0\in(1,\ b]$

$$R_{kn}(t_0,\ \delta)=R_{nn}(t_0,\ \delta)=r_n(t_0,\ t_1,\ldots,t_n,\ \delta), \tag{3.5}$$

где точки $t_1,\ldots,t_n$ определены в теореме 6, и, кроме того, $I_n(t_0,\ \delta)=n$.

Положим

$$\Delta_{mn}=\left(\frac{2}{1-t_{1n}^{(m)}}\right)^n\delta_{mn},$$

$$y_n(t,\ \delta)=\frac{\delta}{\delta_{mn}}x_{mn}\left[\left(\frac{\delta_{mn}}{\delta}\right)^{1/n}(t-1)+1\right]\quad\text{при } \Delta_{m-1,\,n}<\delta\leqq\Delta_{mn}.$$

В работах [6, с. 138], [7] отмечалось, что для $\delta_{mn}\leqq\delta\leqq\Delta_{mn}$

$$Z_n(t,\ \delta)=y_n(t,\ \delta), \tag{3.6}$$

а следовательно,

$$t_{kn}(\delta)=(\frac{\delta_{mn}}{\delta})^{1/n}(t_{kn}^{(m)}-1)+1, \quad k=1,\ldots,m. \tag{3.7}$$

Поскольку $\Delta_{m1}=\delta_{m-1,1}$, то равенство (3.6) при $n=1$ полностью описывает золотаревские сплайны. Следующая лемма дает описание этих сплайнов при $n=2$, 3 и $0<\delta\leqq\Delta_{nn}$ (случай $\delta>\Delta_{nn}$ следует из теоремы 6).

Лемма 1. *При $n=2$, 3 имеют место равенства*

$$Z_n(t,\delta)=\begin{cases} y_n(t,\delta), & \delta_{mn}\leqq\delta\leqq\Delta_{mn}, \\ y_n(t,\delta)-\frac{2(-1)^m}{n!}(\tau-t)_+^n, & \Delta_{m+1,n}<\delta<\delta_{mn}, \end{cases}$$

где

$$\tau=-1+\sqrt[n]{\frac{n!}{2}[|y_n(-1,\delta)|-\delta]}<t_{1n}(\delta).$$

Доказательство. В силу равенства (3.6) достаточно рассмотреть случай, когда $\Delta_{m+1,n}<\delta<\delta_{mn}$. Положим при $n=2$, 3

$$\psi(t)=\varphi_{1n}(t)-\frac{2(-1)^n}{n!}(\tau_1-t)_+^n,$$

где

$$\tau_1=\alpha+\sqrt[n]{\frac{n!}{2}[|\varphi_{1n}(\alpha)|-\delta_{1n}]}.$$

Нетрудно убедиться, что при $-n\leqq\alpha\leqq-1-\varepsilon_n$, τ_1 монотонно убывает от -1 до $-1-\varepsilon_n$, $\psi(\alpha)=(-1)^n\delta_{1n}$ и $|\psi(t)|\leqq\delta_{1n}$ при $t\in[\alpha, 1+\varepsilon_n]$. Пользуясь подобием между φ_{1n} и функциями, из которых состоит x_{mn}, получаем, что функция

$$\psi_1(t)=x_{mn}(t)-\frac{2(-1)^m}{n!}(\tau_2-t)_+^n,$$

где

$$\tau_2=\beta+\sqrt[n]{\frac{n!}{2}[|x_{mn}(\beta)|-\delta_{mn}]}, \quad -\frac{m}{m-n+1+\varepsilon_n}\leqq\beta\leqq-1,$$

удовлетворяет условиям $\psi_1(\beta)=(-1)^m\delta_{mn}$, $|\psi_1(t)|\leqq\delta_{mn}$ при $t\in[\beta, 1]$, а τ_2 монотонно убывает от $-\frac{m-n+1}{m-n+1+\varepsilon_n}$ до -1. Отсюда следует, что

$$(\frac{2}{1-\beta})^n\psi_1(\frac{1-\beta}{2}t+\frac{1+\beta}{2})=Z_n[t, (\frac{2}{1-\beta})^n\delta_{mn}].$$

Положив

$$\beta=1-2(\frac{\delta_{mn}}{\delta})^{1/n}$$

и заметив, что β монотонно возрастает от $-\frac{m}{m-n+1+\varepsilon_n}$ до -1 при $\delta\in(\Delta_{m+1,n}), \delta_{mn})$, а $-1<\tau_2<t_{1n}^{(m)}$, получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 7. *При $n=1$, 2, 3 для любого $k\geqq n$, $\delta>0$ и $t_0\in(1, b]$ имеют место равенства*

$$R_{kn}(t_0,\ \delta)=R_{nn}(t_0,\ \delta)=R_n(t_0,\ \delta), \tag{3.8}$$

$$I_n(t_0,\ \delta)=n. \tag{3.9}$$

Доказательство. Для $\delta \geqq \delta_{nn}$ утверждение теоремы следует из (3.5). Пусть $\delta<\delta_{nn}$. Тогда из леммы 1 для $\delta \in (\Delta_{m+1,\,n},\ \Delta_{mn}]$

$$Z_n(t_0,\ \delta)=\frac{\delta}{\delta_{mn}}\,x_{mn}[(\frac{\delta_{mn}}{\delta})^{1/n}(t_0-1)+1].$$

Учитывая (2.2), (2.1), вид функций φ_{mn} при $n=1,\ 2,\ 3$ и равенство (3.1), получаем

$$Z_n(t_0,\ \delta)=\delta\, T_n[\frac{1}{2}\,(\frac{2}{\delta_n!})^{1/n}(t_0-1)+1]=R_{nn}(t_0,\ \delta).$$

Тем самым для всех $\delta>0$ $Z_n(t_0,\ \delta)=R_{nn}(t_0,\ \delta)$. Пусть теперь $\delta_{mn}\leqq\delta<\delta_{m-1,\,n}$. При $k\geqq m$ равенства (3.8) следуют из теоремы 5. Если $n\leqq k<m$, то

$$R_{nn}(t_0,\ \delta)\geqq R_{kn}(t_0,\ \delta)\geqq R_{mn}(t_0,\ \delta)=R_{nn}(t_0,\ \delta).$$

Таким образом, равенства (3.8) доказаны при всех $\delta>0$ и $k\geqq n$. Равенство (3.9) непосредственно следует из (3.8). Теорема доказана.

Из теорем 6 и 7 следует, что оптимальные точки экстраполяции при $n=1,2,3$ имеют вид (за исключением случая $n=3$, $j=2$, $\delta>\Delta_{33}=8/81$)

$$t_{jn}=-1+2(1-2\sqrt[n]{\frac{\delta n!}{2}}\cos^2\frac{\pi j}{2n})_+.$$

Если $\delta>\Delta_{33}$, то для некоторого β

$$Z_3(t,\ \delta)=\frac{1}{6}(t-t_{23})^2(t-\beta)-\delta.$$

Пользуясь условиями $Z_3(-1,\ \delta)=Z_3(1,\ \delta)=\delta$, получим уравнение,

$$1-t_{23}^2=2\sqrt{6\delta t_{23}},$$

из которого при $\delta>\Delta_{33}$ единственным образом определяется $t_{23}\in(0,\ 1/3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек. *Мат. заметки*, **17**, 1975, 359—368.
2. C. A. Micchelli. Optimal estimation of smooth functions from inaccurate data. *J. Inst. Math. and Appl.*, **23**, 1979, 473-495.
3. К. Ю. Осипенко. Задача Хейнса и оптимальная экстраполяция аналитических функций, заданных с ошибкой. *Мат. сб.*, **126**, 1985, 566—575.
4. K. Yu. Osipenko. On optimal extrapolation and interpolation of fuzzy analytic functions. *Anal. math.*, **13**, 1987, 199-210.
5. В. М. Тихомиров. Наилучшие методы приближения и интерполяции дифференцируемых функций в пространстве $C(-1,\ 1)$. *Мат. сб.*, **80**, 1969, 290—304.
6. В. М. Тихомиров. Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.
7. S. Karlin. Oscillatory perfect splines and related extremum problems. In: Studies in spline functions and approximation theory. New York, 1976, 371-460.
8. Н. П. Корнейчук. Сплайны в теории приближения. М., 1984.
9. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
10. B. C. Carlson, J. Todd. Zolotarev's first problem — the best approximation by polynomials of degree $\leqq n-2$ to $x^n-n\sigma x^{n-1}$ in $[-1,\ 1]$. *Aequat. math.*, **26**, 1983, 1-33.
11. A. Pinkus. Some extremal properties of perfect splines and the pointwise Landau problem on the finite interval. *J. Approxim. Theory*, **23**, 1979, 37-67.

Московский авиационный технологический институт Москва К-31

Поступила 11. 09. 1989 г.