Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

О ГЕОМЕТРИИ СЕТЕЙ И ЧЕТЫРЕХ-ТКАНЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ A_3

ГЕОРГИ З. ЗЛАТАНОВ, ГИНКА С. БИЗОВА

В настоящей работе, при помощи аппарата продолженного ковариантного дифференцирования, разработанного в [2], [3], изучаются сети и четыре-ткани в A_3. Найдены необходимые и достаточные условия параллельного переноса двумерных площадок по линиям сетей. Определен вид пространства A_3, содержащего чебышевские сети второго рода. Исследуются четыре-ткани, для которых тензоры Гесса равняются нулю.

Геометрия сетей в пространстве с аффинной связностью изучается в [2], [3], [7].

1. Пусть A_3 — пространство с аффинной связностью. Псевдовеличины v^i, которые после перенормирования преобразуются по закону

$$\overset{\varnothing}{v}{}^i = \sigma v^i, \tag{1}$$

где σ — функция точки, определяют поле по направлениям [2], [3], [7].

Пусть в A_3 заданы поля направлений $\underset{\alpha}{v}{}^i$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), любые три из которых независимы и удовлетворяют условию

$$\underset{1}{v}{}^i + \underset{2}{v}{}^i + \underset{3}{v}{}^i + \underset{4}{v}{}^i = 0. \tag{2}$$

Очевидно $\underset{\alpha}{v}{}^i$ имеют вес $\{1\}$.

Согласно [4], ковекторы $\overset{\alpha}{v}_i$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), определяются условиями

$$\overset{\alpha}{v}_i \underset{\beta}{v}{}^i = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \neq 4 \\ (-1)^{\alpha+1}, & \alpha = \beta \neq 4. \end{cases} \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем

$$\overset{\alpha}{v}_i \underset{4}{v}{}^i = \underset{\alpha}{v}{}^i \overset{4}{v}_i = (-1)^{\alpha}.$$

Ковекторы $\overset{\alpha}{v}_i$ имеют вес $\{-1\}$.

В работе [4], при помощи ковектора $T_k = \overset{1}{v}_i \nabla_k \underset{1}{v}{}^i$, вводится продолженное ковариантное дифференцирование спутников полей $\underset{\alpha}{v}{}^i$. Если A — спутник поля направлений $\underset{\alpha}{v}{}^i$ с весом $\{k\}$, то

$$\dot{\nabla}_s A = \nabla_s A - kT_s A, \tag{4}$$

где $\dot{\nabla}_s A$ — продолженная ковариантная производная A, а $\nabla_s A$ — обычная ковариантная производная A.

В [4] получены деривационные формулы

(5) $$\dot{\nabla}_k \underset{\alpha}{v}^i = \overset{\beta}{\underset{\alpha}{T}}_k \underset{\beta}{v}^i, \quad \dot{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_i = (-1)^{\alpha+\beta+1} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{T}}_k \overset{\beta}{v}_i, \quad (\alpha=1, 2, 3, 4;\ \beta=1, 2, 3).$$

2. Пусть площадка $(\underset{\beta}{v}, \underset{\gamma}{v})$ переносится параллельно по линиям $(\underset{\alpha}{v})$, $(\alpha\neq\beta;\ \alpha\neq\gamma)$. Тогда, согласно [5], выполняется

(6) $$\dot{\nabla}_k \overset{(\alpha)}{v}_i \underset{(\alpha)}{v}^k = \lambda \overset{\alpha}{v}_i .$$

(По индексам, заключенными в скобках, не проводится суммирование). Из (5) и (6) находим

(7) $$\overset{(\alpha)}{\underset{\sigma}{T}}_k \underset{(\alpha)}{v}^k = 0, \quad (\sigma\neq\alpha;\ \sigma=1, 2, 3).$$

Легко доказывается, что из (7) следует (6).
Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Площадка $(\underset{\beta}{v}, \underset{\gamma}{v})$ переносится параллельно по линиям $(\underset{\alpha}{v})$,* $(\alpha\neq\beta;\ \alpha\neq\gamma;\ \alpha, \beta, \gamma=1, 2, 3)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (7).

Согласно [5], сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ называется чебышевской второго рода, если площадки, определенные любыми двумя ее полями направлений, переносятся по линиям, определенным третьим полем.

Из этого определения и теоремы 1 следует

Следствие 1. Сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in A_3$ — чебышевская второго рода, тогда и только тогда, когда выполняются условия

(8) $$\overset{(\alpha)}{\underset{\sigma}{T}}_k \underset{(\alpha)}{v}^k = 0, \quad (\sigma\neq\alpha;\ \alpha, \sigma=1, 2, 3).$$

Определение 1. *Величину*

(9) $$\underset{\alpha}{\rho} = \sqrt{\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq\alpha}}^{3} (\overset{\alpha}{\underset{\sigma}{\rho}})^2},$$

где $\overset{\alpha}{\underset{\sigma}{\rho}} = \overset{(\alpha)}{\underset{\sigma}{T}}_k \underset{(\alpha)}{v}^k$, *будем называть чебышевской кривизной подсети* $(\underset{\beta}{v}, \underset{\gamma}{v})$ *сети* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$.

Очевидно $\overset{\alpha}{\underset{\sigma}{\rho}}$ и $\underset{\alpha}{\rho}$ имеют вес $\{1\}$.

Определение 2. *Вектор*

(10) $$b_i = \underset{\alpha}{\rho}\, \overset{\alpha}{v}_i,$$

будем называть чебышевским вектором сети второго рода $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$.

Из (10) следует, что b_i имеет вес $\{0\}$.

Из теоремы 1 и определения 1 следует справедливость утверждения: Площадка $(\underset{\beta}{v}, \underset{\gamma}{v})$ переносится параллельно по линиям $(\underset{\alpha}{v})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $\underset{\alpha}{\rho} = 0$.

Из следствия 1 и определения 2 следует утверждение:

Сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ — чебышевская второго рода тогда и только тогда, когда $b_i = 0$.

3. А. Е. Либер в [5] определил вид пространства A_n с аффинной связностью, которые содержат чебышевские сети первого рода. Эти пространства он назвал чебышевскими.

Определим вид пространства A_3, содержащего чебышевские сети второго рода $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$.

Сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ выбираем в качестве координатной. Тогда

$$\underset{1}{v}^i(1,\ 0,\ 0), \quad \underset{2}{v}^i(0,\ 1,\ 0), \quad \underset{3}{v}^i(0,\ 0,\ 1). \tag{11}$$

Из (3) и (11) находим координаты ковекторов

$$\overset{1}{v}_i(1,\ 0\ 0), \quad \overset{2}{v}_i(0,\ -1,\ 0), \quad \overset{3}{v}_i(0,\ 0,\ 1). \tag{12}$$

Из (4), (6) и формулы

$$\nabla_k \overset{\alpha}{v}_i = \partial_k \overset{\alpha}{v}_i - \Gamma^s_{ki} \overset{\alpha}{v}_s, \tag{13}$$

где Γ^s_{ki} — коэффициенты аффинной связности A_3, получаем

$$\partial_k \overset{\alpha}{v}_i - \Gamma^s_{ki} \overset{\alpha}{v}_s - T_k \underset{\alpha}{v}^k \overset{\alpha}{v}_i = \lambda \overset{\alpha}{v}_i. \tag{14}$$

Учитывая (11) и (12), находим

$$\Gamma^\alpha_{\alpha i} = 0, \ (\alpha \neq i). \tag{15}$$

Таким образом доказали следующую теорему:

Теорема 2. *Если пространство A_3 содержит чебышевскую сеть второго рода $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ и она выбрана в качестве координатной, то выполняются условия (15).*

Легко доказывается и обратное утверждение: Если сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in A_3$ выбрана в качестве координатной и выполнены условия (15), то она является чебышевской сетью второго рода.

Согласно [1], [8], сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ называется сильно параллельной, если любое ее поле направления переносится параллельно по линиям, определенными одним из остальных двух полей направлений. В зависимости от того, переносится ли по каждой линии сети, $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in A_3$ одно и только едно поле направления или по одной из ее линий переносятся параллельно два поля направлений, сети $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in A_3$ бывают сильно параллельными первого рода и сильно параллельными второго рода.

В A_3 существуют два типа сильно параллельные сети первого рода и шесть — сильно параллельные сети второго рода [1], [8].

Пусть сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ — сильно параллельная первого рода типа (2, 3, 1), что, согласно [1], [8] означает, что поля направлений $\underset{1}{v}^i$, $\underset{2}{v}^i$, $\underset{3}{v}^i$ переносятся параллельно соответственно по линиям $(\underset{2}{v})$, $(\underset{3}{v})$, $(\underset{1}{v})$.

Выбираем сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ в качестве координатной.

Согласно [4], получаем справедливость утверждения: Сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in A_3$ — сильно параллельная первого рода типа (2, 3, 1) тогда и только тогда, когда выполняются условия

(16) $$\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{1}{v}^i \underset{2}{v}^k = \lambda \underset{1}{v}^i, \quad \overset{\circ}{\nabla}_k \underset{2}{v}^i \underset{3}{v}^k = \lambda \underset{2}{v}^i, \quad \overset{\circ}{\nabla}_k \underset{3}{v}^i \underset{1}{v}^k = \lambda \underset{3}{v}^i.$$

Из (4), (11) (12) (13) и (16) находим

(17) $$\Gamma^1_{21} = 0, \; \Gamma^2_{21} = 0, \; \Gamma^3_{32} = 0, \; \Gamma^1_{32} = 0, \; \Gamma^2_{13} = 0, \; \Gamma^1_{13} = 0.$$

Таким образом доказали следующую теорему:

Т е о р е м а 3. *Если пространство A_3 содержит сильно параллельную сеть первого рода типа* (2, 3, 1) *и она выбрана в качестве координатной, то выполняются условия* (17).

Справедлива и обратная теорема: Если сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in A_3$ выбрана в качестве координатной и выполнены условия (17), то выполняются и условия (16), т. е. сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ — сильно параллельная первого рода типа (2, 3, 1).

Аналогичную теорему можно доказать и для сильно параллельнной сети первого рода типа (3, 1, 2).

Из теоремы 3 непосредственно следует справедливость следующего следствия:

С л е д с т в и е 2. Если пространство A_3 без торзии содержит сильно параллельную сеть первого рода типа (2, 3, 1) и она выбрана в качестве координатной, то выполняются условия

(18) $$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = 0, \; \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{12} = 0, \; \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{23} = 0, \; \Gamma^2_{32} = \Gamma^2_{23} = 0, \; \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = 0, \; \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение: Если сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in A_3$ без торзии выбрана в качестве координатной и выполнены условия (18), то сеть — силно параллельная первого рода типа (2, 3, 1).

Пусть сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ — сильно параллельная второго рода типа (2, 3, 2), что, согласно [1], [8], означает, что поля направлений $\underset{1}{v}^i$, $\underset{2}{v}^i$, $\underset{3}{v}^i$ переносятся параллельно соответственно по линиям $(\underset{2}{v})$, $(\underset{3}{v})$, $(\underset{2}{v})$. Согласно [4], следует справедливость следующего утверждения:

Сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in A_3$ — сильно параллельная второго рода типа (2, 3, 2) тогда и только тогда, когда выполняются условия

(19) $$\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{1}{v}^i \underset{2}{v}^k = \lambda \underset{1}{v}^i, \quad \overset{\circ}{\nabla}_k \underset{2}{v}^i \underset{3}{v}^k = \lambda \underset{2}{v}^i, \quad \overset{\circ}{\nabla}_k \underset{3}{v}^i \underset{2}{v}^k = \lambda \underset{3}{v}^i.$$

Из (4), (11), (12), (13) и (19) находим

(20) $$\Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^3_{21} = 0, \quad \Gamma^3_{32} = 0, \quad \Gamma^2_{32} = 0, \quad \Gamma^1_{23} = 0, \quad \Gamma^2_{21} = 0.$$

Таким образом доказали следующую теорему:

Т е о р е м а 5. *Если пространство A_3 содержит сильно параллельную сеть второго рода типа* (2, 3, 2) *и она выбрана в качестве координатной, то выполняются условия* (20).

Справедливо и обратное утверждение: Если сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}) \in A_3$ выбрана в качестве координатной и выполнены условия (20), то сеть — сильно параллельная второго рода типа (2, 3, 2).

Аналогичные теоремы могут быть доказаны и для сильно параллельных сетей второго рода типа (2, 1, 1), (3, 1, 1), (2, 1, 2), (3, 3, 1) и (3 ,3, 2).

Из теоремы 5 непосредственно следует справедливость следующего следствия:

С л е д с т в и е 3. Если пространство A_3 без торзии содержит сильно параллельную сеть второго рода типа (2, 3, 2) и она выбрана в качестве координатной, то выполняются условия

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = 0, \quad \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{23} = 0, \quad \Gamma^2_{32} = \Gamma^2_{23} = 0, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = 0. \tag{21}$$

4. Тензоры

$$b^{is} = \underset{1}{v}^i \underset{1}{v}^s + \underset{2}{v}^i \underset{2}{v}^s + \underset{3}{v}^i \underset{3}{v}^s + \underset{4}{v}^i \underset{4}{v}^s, \tag{22}$$

$$b_{is} = \overset{1}{v}_i \overset{1}{v}_s + \overset{2}{v}_i \overset{2}{v}_s + \overset{3}{v}_i \overset{3}{v}_s + \overset{4}{v}_i \overset{4}{v}_s, \tag{23}$$

$$b^s_i = \overset{1}{v}_i \underset{1}{v}^s + \overset{2}{v}_i \underset{2}{v}^s + \overset{3}{v}_i \underset{3}{v}^s + \overset{4}{v}_i \underset{4}{v}^s, \tag{24}$$

будем называть тензорами Гесса для четырех-тканей $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v}) \in A_3$. Очевидно b^{is}, b_{is} b^s_i имеют вес соответственно {2}, {−2}, {0}.

Свойства тензора Гесса для трех-тканей в двумерном пространстве с аффинной связностью изучены В. И. Шуликовским [10].

Определим вид пространства A_3, содержащего четыре-ткани $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, для которой продолженная ковариантная производная тензора Гесса равняется нулю, т. е.

$$\dot{\nabla}_k b^{is} = 0. \tag{25}$$

Выбираем сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ в качестве координатной. На основании (4), (13) и (25) находим

$$\partial_k b^{is} + \Gamma^i_{kl} b^{ls} + \Gamma^s_{kl} b^{il} = 2T_k b^{is}. \tag{26}$$

Из (2), (11), (12) и (22) получаем

$$\begin{aligned} &b^{11} = 2, \quad b^{21} = 1, \quad b^{31} = 1, \\ &b^{12} = 1, \quad b^{22} = 2, \quad b^{32} = 1, \\ &b^{13} = 1, \quad b^{23} = 1, \quad b^{33} = 2. \end{aligned} \tag{27}$$

Тогда из (26) находим

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{k2} + \Gamma^1_{k3} = 0, \\ &\Gamma^1_{k1} + \Gamma^1_{k2} + \Gamma^2_{k1} - \Gamma^2_{k2} = 0, \\ &\Gamma^1_{k1} + \Gamma^1_{k3} + \Gamma^3_{k1} - \Gamma^3_{k3} = 0, \\ &\Gamma^2_{k1} + 2\Gamma^2_{k2} + \Gamma^2_{k3} - 2\Gamma^1_{k1} = 0, \\ &\Gamma^3_{k1} + \Gamma^3_{k2} + 2\Gamma^3_{k3} - 2\Gamma^1_{k1} = 0, \\ &2\Gamma^1_{k1} - \Gamma^2_{k2} + \Gamma^2_{k3} + \Gamma^3_{k2} - \Gamma^3_{k3} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом доказали следующую теорему:

Теорема 6. *Если пространство A_3 содержит четыре-ткани* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$ *для которой* $\overset{\circ}{\nabla}_k b^{is}=0$ *и сеть* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ *выбрана в качестве координатной, то выполняются условия* (28).

Определим вид деривационных формул полей направлений четырех тканей $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, для которой продолженная ковариантная производная тензора Гесса b^{is} равна нулю.

В результтате продолженного ковариантного дифференцирования (22), учитывая (2) и (5), получаем

$$
\begin{aligned}
\dot{\nabla}_k b^{is} &= 2(\overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k+\overset{1}{\underset{3}{T}}{}_k)\,\underset{1}{v}^i\underset{1}{v}^s+(2\overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k+\overset{1}{\underset{3}{T}}{}_k+2\overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k+\overset{2}{\underset{2}{T}}{}_k+\overset{2}{\underset{3}{T}}{}_k)(\underset{1}{v}^i\underset{2}{v}^s+\underset{2}{v}^i\underset{1}{v}^s)\\
&+(\overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k+2\overset{1}{\underset{3}{T}}{}_k+2\overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k+\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k+\overset{3}{\underset{3}{T}}{}_k)(\underset{1}{v}^i\underset{3}{v}^s+\underset{1}{v}^s\underset{3}{v}^i)+2(\overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k+2\overset{2}{\underset{2}{T}}{}_k+\overset{2}{\underset{3}{T}}{}_k)\,\underset{2}{v}^i\underset{2}{v}^s\\
&+(\overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k+\overset{2}{\underset{2}{T}}{}_k+2\overset{2}{\underset{3}{T}}{}_k+\overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k+2\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k+\overset{3}{\underset{3}{T}}{}_k)(\underset{2}{v}^i\underset{3}{v}^s+\underset{2}{v}^s\underset{3}{v}^i)+2(\overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k+2\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k+\overset{3}{\underset{3}{T}}{}_k)\,\underset{3}{v}^i\underset{3}{v}^s.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Последовательно свертывая (29) при помощи ковекторов $\overset{1}{v}_i\overset{1}{v}_s$, $\overset{1}{v}_i\overset{2}{v}_s$, $\overset{1}{v}_i\overset{3}{v}_s$, $\overset{2}{v}_i\overset{2}{v}_s$, $\overset{2}{v}_i\overset{3}{v}_s$, $\overset{3}{v}_i\overset{3}{v}_s$, находим

$$
\overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k=-\overset{1}{\underset{3}{T}}{}_k,\quad \overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k=-\overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k,\quad \overset{2}{\underset{3}{T}}{}_k=-\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k.
\tag{30}
$$

Легко доказывается, что из (30) следует (25).

Таким образом доказали теорему:

Теорема 7. *Четыре-ткань, для которой продолженная ковариантная производная тензора Гесса b^{is} равна нулю, характеризуется условиями* (30).

В этом случае деривационные формулы (5) принимают вид

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{1}{v}^i &= \overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k(\underset{2}{v}^i-\underset{3}{v}^i)\\
\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{2}{v}^i &= \overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k\underset{1}{v}^i+\overset{2}{\underset{2}{T}}{}_k\underset{2}{v}^i+\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k\underset{3}{v}^i\\
\overset{\circ}{\nabla}_k\underset{3}{v}^i &= -\overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k\underset{1}{v}^i-\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k\underset{2}{v}^i+\overset{3}{\underset{3}{T}}{}_k\underset{3}{v}^i.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Определим вид пространства A_3, содержащего четыре-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, для которой продолженная ковариантная производная тензора Гесса b_{is} равняется нулю, т. е.

$$
\overset{\circ}{\nabla}_k b_{is}=0.
\tag{32}
$$

Выбираем сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ в качестве координатной. На основании (4), (13) и (32) находим

$$
\partial_k b_{is}-\Gamma^l_{ki}b_{ls}-\Gamma^l_{ks}b_{il}+2T_k b_{is}=0.
\tag{33}
$$

Из (2), (11), (12) и (23) получаем

$$
(34)\qquad
\begin{matrix}
b_{11}=2, & b_{21}=-1, & b_{31}=1,\\
b_{12}=-1, & b_{22}=2, & b_{32}=-1,\\
b_{13}=1, & b_{23}=-1, & b_{33}=2.
\end{matrix}
$$

Тогда из (33) находим

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
&\Gamma^2_{k1}-\Gamma^3_{k1}=0,\\
&\Gamma^1_{k1}-\Gamma^2_{k1}-\Gamma^1_{k2}-\Gamma^2_{k2}=0,\\
&\Gamma^1_{k1}+\Gamma^3_{k1}+\Gamma^1_{k3}-\Gamma^3_{k3}=0,\\
&\Gamma^1_{k2}-2\Gamma^2_{k2}+\Gamma^3_{k2}+2\Gamma^1_{k1}=0,\\
&\Gamma^1_{k3}-\Gamma^2_{k3}+2\Gamma^3_{k3}-2\Gamma^1_{k1}=0,\\
&2\Gamma^1_{k1}-\Gamma^2_{k2}-\Gamma^3_{k2}-\Gamma^3_{k3}-\Gamma^2_{k3}=0.
\end{aligned}
$$

Таким образом доказали теорему:

Т е о р е м а 8. *Если пространство A_3 содержит четыре-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, для которой $\mathring{\nabla}_k b_{is}=0$ и сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ выбрана в качестве координатной, то выполняются условия (35).*

Определим вид деривационных формул полей направлений четырех-тканей $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, для которой продолженная ковариантная производная тензора Гесса b_{is} равна нулю.

В результате продолженного ковариантного дифференцирования (23), учитывая (2) и (5) получаем

$$
(36)\qquad
\begin{aligned}
\mathring{\nabla}_k b_{is}={}&2(\overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k-\overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k)\overset{1}{v}_i\overset{1}{v}_s+(2\overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k+2\overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k-\overset{2}{\underset{2}{T}}{}_k-\overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k+\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k)(\overset{1}{v}_i\overset{2}{v}_s+\overset{1}{v}_s\overset{2}{v}_i)\\
&+(-2\overset{1}{\underset{3}{T}}{}_k+\overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k+\overset{2}{\underset{3}{T}}{}_k-2\overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k-\overset{3}{\underset{3}{T}}{}_k)(\overset{1}{v}_i\overset{3}{v}_s+\overset{3}{v}_i\overset{1}{v}_s)+2(\overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k-2\overset{2}{\underset{2}{T}}{}_k+\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k)\overset{2}{v}_i\overset{2}{v}_s\\
&+(\overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k-\overset{1}{\underset{3}{T}}{}_k+2\overset{2}{\underset{3}{T}}{}_k-\overset{2}{\underset{2}{T}}{}_k+2\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k-\overset{3}{\underset{3}{T}}{}_k)(\overset{2}{v}_i\overset{3}{v}_s+\overset{3}{v}_i\overset{2}{v}_s)-2(\overset{1}{\underset{3}{T}}{}_k-2\overset{2}{\underset{3}{T}}{}_k+\overset{3}{\underset{3}{T}}{}_k)\overset{3}{v}_i\overset{3}{v}_s.
\end{aligned}
$$

Последовательно свертывая обе части (36) при помощи ковекторов $\underset{1}{v}{}^i\underset{1}{v}{}^s$, $\underset{1}{v}{}^i\underset{2}{v}{}^s$, $\underset{1}{v}{}^i\underset{3}{v}{}^s$, $\underset{2}{v}{}^i\underset{2}{v}{}^s$, $\underset{2}{v}{}^i\underset{3}{v}{}^s$, $\underset{3}{v}{}^i\underset{3}{v}{}^s$, находим

$$
(37)\qquad
\overset{1}{\underset{2}{T}}{}_k=\overset{1}{\underset{3}{T}}{}_k,\quad \overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k=\overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k,\quad \overset{2}{\underset{3}{T}}=-\overset{3}{\underset{2}{T}}{}_k,\quad \overset{2}{\underset{2}{T}}{}_k=-\overset{3}{\underset{3}{T}}{}_k.
$$

Легко доказывается, что из (37) следует (32).

Таким образом доказали теорему:

Т е о р е м а 9. *Четыре-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, для которой продолженная ковариантная производная тензора Гесса b_{is} равна нулю, характеризуется условиями (37).*

Определим вид пространства A_3, содержащего четыре-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, для которой продолженная ковариантная производная тензора Гесса b^s_i равняется нулю, т. е.

$$\overset{\circ}{\nabla}_k b^s_i = 0, \tag{38}$$

Выбираем сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ в качестве координатной. На основании (4), (13) и (38) находим

$$\partial_k b^s_i - \Gamma^l_{ki} b^s_l + \Gamma^s_{kl} b^l_i = 0. \tag{39}$$

Из (2), (11), (12) и (24) получаем

$$\begin{aligned} &b^1_1 = 2, \quad b^1_2 = -1, \quad b^1_3 = 1,\\ &b^2_1 = 1, \quad b^2_4 = -2, \quad b^2_3 = 1,\\ &b^3_1 = 1, \quad b^3_2 = -1, \quad b^3_3 = 2. \end{aligned} \tag{40}$$

Тогда из (39) находим

$$\begin{aligned} &\Gamma^2_{k1} - \Gamma^3_{k1} + \Gamma^1_{k2} + \Gamma^1_{k3} = 0,\\ &\Gamma^1_{k1} - \Gamma^2_{k1} - \Gamma^3_{k2} - \Gamma^3_{k3} = 0,\\ &\Gamma^1_{k2} + \Gamma^3_{k2} + \Gamma^2_{k1} + \Gamma^2_{k3} = 0,\\ &\Gamma^1_{k1} - 4\Gamma^3_{k1} + \Gamma^2_{k1} - \Gamma^2_{k2} - \Gamma^2_{k3} = 0,\\ &\Gamma^1_{k1} + 4\Gamma^1_{k2} - \Gamma^2_{k2} + \Gamma^3_{k2} + \Gamma^1_{k3} = 0,\\ &\Gamma^1_{k2} - \Gamma^2_{k2} + 4\Gamma^3_{k2} + \Gamma^3_{k1} + \Gamma^3_{k3} = 0,\\ &\Gamma^1_{k3} - 4\Gamma^2_{k3} + \Gamma^3_{k3} - \Gamma^1_{k2} - \Gamma^2_{k2} = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Таким образом доказали теорему:

Теорема 10. *Если пространство A_3 содержит четыре-ткань $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, для которой $\overset{\circ}{\nabla}_k b^s_i = 0$ и сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v})$ выбрана в качестве координатной, то выполняются условия* (41).

Определим вид деривационных формул полей направлений четырех-тканей $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, для которой продолженная ковариантная производная тензора Гесса b^s_i равняется нулю.

В результтате продолженного ковариантного дифференцирования (24), учитывая (2) и (5), получаем

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla}_k b^s_i = {} & (\overset{1}{\underset{2}{T}}_k + \overset{1}{\underset{3}{T}}_k + \overset{2}{\underset{1}{T}}_k - \overset{3}{\underset{1}{T}}_k)\, \overset{1}{v}_i \underset{1}{v}^s + (4\overset{2}{\underset{1}{T}}_k + \overset{2}{\underset{2}{T}}_k + \overset{2}{\underset{3}{T}}_k - \overset{3}{\underset{1}{T}}_k)\, \overset{1}{v}_i \underset{2}{v}^s + (\overset{2}{\underset{1}{T}}_k + \overset{3}{\underset{2}{T}}_k + \overset{3}{\underset{3}{T}}_k)\, \overset{1}{v}_i \underset{3}{v}^s\\ & + (4\overset{1}{\underset{2}{T}}_k + \overset{1}{\underset{3}{T}}_k - \overset{2}{\underset{2}{T}}_k + \overset{3}{\underset{2}{T}}_k)\, \overset{2}{v}_i \underset{1}{v}^s + (\overset{1}{\underset{2}{T}}_k + \overset{2}{\underset{1}{T}}_k + \overset{2}{\underset{3}{T}}_k + \overset{3}{\underset{2}{T}}_k)\, \overset{2}{v}_i \underset{2}{v}^s + (\overset{1}{\underset{2}{T}}_k - \overset{2}{\underset{2}{T}}_k + \overset{3}{\underset{1}{T}}_k + 4\overset{3}{\underset{2}{T}}_k + \overset{3}{\underset{3}{T}}_k)\, \overset{2}{v}_i \underset{3}{v}^s\\ & + (\overset{1}{\underset{2}{T}}_k + \overset{2}{\underset{3}{T}}_k - \overset{3}{\underset{3}{T}}_k)\, \overset{3}{v}_i \underset{1}{v}^s + (-\overset{1}{\underset{3}{T}}_k + \overset{2}{\underset{1}{T}}_k + \overset{2}{\underset{2}{T}}_k + 4\overset{2}{\underset{3}{T}}_k - \overset{3}{\underset{3}{T}}_k)\, \overset{3}{v}_i \underset{2}{v}^s + (-\overset{1}{\underset{3}{T}}_k + \overset{2}{\underset{3}{T}}_k + \overset{3}{\underset{1}{T}}_k + \overset{3}{\underset{2}{T}}_k)\, \overset{3}{v}_i \underset{3}{v}^s. \end{aligned} \tag{42}$$

Свертывая (42) при помощи ковекторов $\underset{1}{v}^i \overset{1}{v}_s$, $\underset{1}{v}^i \overset{2}{v}_s$, $\underset{1}{v}^i \overset{3}{v}_s$, $\underset{2}{v}^i \overset{1}{v}_s$, $\underset{2}{v}^i \overset{2}{v}_s$, $\underset{2}{v}^i \overset{3}{v}_s$, $\underset{3}{v}^i \overset{1}{v}_s$, $\underset{3}{v}^i \overset{2}{v}_s$, $\underset{3}{v}^i \overset{3}{v}_s$, находим

$$\overset{1}{\underset{2}{T}}_k = -\overset{2}{\underset{1}{T}}_k = -\overset{2}{\underset{3}{T}}_k = \overset{3}{\underset{2}{T}}_k, \quad \overset{1}{\underset{3}{T}}_k = \overset{3}{\underset{1}{T}}_k, \quad \overset{3}{\underset{3}{T}}_k = 0 \tag{43}$$

Легко доказывается, что из (43) следует (38).

Таким образом доказали теорему:

Теорема 11. *Четыре-ткань* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \underset{3}{v}, \underset{4}{v})$, *для которой продолженная коваpиантная производная тензора Гесса* b_l^s *равна нулю, характеризуется условиями (43).*

В этом случае деривационные формулы (5) принимают вид

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{1}{v^i} &= \overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k \underset{2}{v^i} + \overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k \underset{3}{v^i}, \\
\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{2}{v^i} &= -\overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k (\underset{1}{v^i} + \underset{3}{v^i}) + \overset{2}{\underset{2}{T}}{}_k \underset{2}{v^i}, \\
\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{3}{v^i} &= \overset{3}{\underset{1}{T}}{}_k \underset{1}{v^i} + \overset{2}{\underset{1}{T}}{}_k \underset{2}{v^i}.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Дубнов, С. А. Фукс. О пространственных аналогах чебышевской сети. *Доклады АН СССР*, 28, 1940, № 2, 102—104.
2. Г. З. Златанов, А. П. Норден. Ортогональные траектории геодезического поля. *Изв. вузов., Матем.*, 1975, № 7, 42—46.
3. Г. З. Златанов. Геометрия три-тканей. *Научни тр. Пловд. унив. Мат.*, 13, 1795, 179—188.
4. Г. Златанов, Г. Бизова. Върху геометрията на мрежи и тъкани в тримерно пространство с афинна свързаност. *Научни тр. Пловд. унив. Математика.*, 25, 1987, № 1.
5. А. Е. Либер. О чебышевских сетях в чебышевских пространствах. *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, 17, 1974, 177—183.
6. А. П. Норден. Пространствах аффинной связности. Москва, 1976.
7. А. П. Норден, Ш. А. Яфаров. Теория негеодезического векторного поля в пространствах аффинной связности двух измерений. *Изв. вузов. Матем.*, 1974, № 22, 29—34.
8. Б. Царева. Силно паралелни ортогонални три-тъкани в тримерно пространство на Вайл. *Научни тр. Пловд. унив. Матем.*, 22, 1984, 185—199.
9. Ш. А. Яфаров. Чебышевские ковекторы n-мерной сети в пространствах A_n. *Тр. геом. сем КГУ*, 13, 1981, 120—125.
10. В. И. Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия. Москва, 1963.

Пловдивский университет
4000 Пловдив
Болгария

Поступила 06. 06. 1989