Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О СТРОГО G-ГРАДУИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ UP-ГРУПП

С. В. МИХОВСКИ, Ж. М. ДИМИТРОВА

Пусть W — строго градуированное кольцо up-группы G над кольцом K и $J(W)$ — радикал Джекобсона кольца W. В работе доказано, что если K не содержит делители нуля, то W тоже не содержит делители нуля и $J(W)=O$, т. е. кольцо W полупримитивно. Кроме того, кольцо W полупримитивно и для таких первичных колец K, в которых каждый главный двусторонний идеал содержит ненулевой центральный элемент. Если K — конечная прямая сумма простых колец и G — абелева группа без кручения, то снова $J(W)=O$. Далее, все скрещенные групповые кольца up-группы G над полупростым (в смысле Маккоя—Брауна) кольцом K полупримитивны.

Пусть G — FC-группа и порядок любого периодического элемента группы G обратим в полупростом кольце K. Если $W=(G, K, \rho, \sigma)$ — произвольное скрещенное произведение группы G и кольца K, а K удовлетворяет условию конечности для главных двусторонних идеалов, или ядро отображения σ имеет конечный индекс в G, то $J(W)=O$.

Пусть G — произвольная мультипликативная группа, а W — ассоциативное кольцо с единицей e. Напомним [11], что кольцо W называется строго G-градуированным если W является прямой суммой

$$W=\sum_{g\in G}\oplus W(g)$$

своих аддитивных подгрупп $W(g)$, где $W(g)\,W(h)=W(gh)$ для всех $g, h\in G$. Очевидно что групповые кольца и скрещенные произведения группы G и кольца K [2] являются строго G-градуированными кольцами.

В теории групповых колец еще не решена следующая проблема Капланского [12]: доказать или опровергнуть, что групповое кольцо KG, группы G без кручения над полем K не содержит делителей нуля. Бовди [1] доказал, что групповое кольцо RN-группы G с факторами без кручения над произвольным ассоциативным кольцом K без делителей нуля тоже не содержит делителей нуля и показал, что это имеет место и для скрещенных произведений правоупорядоченных групп [2]. Другие результаты в этом направлении и их применение можно найти в [13], [3] и [9]. В настоящей работе изучаются эти вопросы для строго G-градуированных колец, где G — произвольная up-группа. Кроме того указаны условия, при которых скрещенное произведение FC-группы и полупростого кольца полупримитивно.

Как известно, группа G называется up-группой [9], если для любых двух конечных непустых подмножеств A и B группы G с условием $|A|+|B|>2$, произведение AB содержит хотя бы один елемент g, который имеет однозначное представление в виде $g=ab$ $(a\in A, b\in B)$. Строяновский [8] доказал, что в таком случае существует хотя бы еще один такой элемент, т. е. любая up-группа является tup-группой [9]. Эти группы впервые изучались в работе Рудина и Шнайдера [15]. Известно (см. [9], Лемма 13. 1. 8), что класс up-групп очень большой и строго содержит класс правоупорядоченных групп [9], но он не содержит класс всех групп без кручений [10].

Отметим некоторые элементарные свойства строго G-градуированных колец, Если x — произвольный элемент строго G-градуированного кольца W, то x имеет однозначное представление в виде конечной суммы

$$x = \sum_{g \in G} x_g, \quad x_g \in W(g).$$

Следом элемента $x \in W$ назовем элемент $\operatorname{tr} x = x_1 \in W(1)$, где 1 — единичный элемент группы G. Носителем элемента x называется подмножество $\operatorname{supp} x = \{g \in G \mid x_g \neq 0\}$ группы G. Число $\|x\|$ элементов в $\operatorname{supp} x$ называется длиной элемента x. Если $\|x\| \leq 1$, то будем говорить, что x — тривиальный элемент кольца W.

Очевидно, что $K = W(1)$ является подкольцом кольца W и любая g-компонента $W(g)$ является (K, K)-бимодулем. Подкольцо K называется базисным подкольцом кольца W. В таком случае будем говорить, что W является строго G-градуированным кольцом группы G над кольцом K. В известной нам литературе всегда предполагается, что единичные элементы кольцах K и W совпадают. На самом деле другая возможность не существует. Имеет место следующая

Лемма 1. *Элемент e является единичным элементом кольца W тогда и только тогда, когда e — единичный элемент кольца $W(1)$.*

Доказательство. Если

$$e = e_{g_0} + e_{g_1} + \cdots + e_{g_n} \quad (g_0 = 1 \in G)$$

— единичный элемент кольца W, то $e_{g_i} e = e_{g_i}$ и поэтому

$$e_{g_i} e_{g_0} = e_{g_i}, \quad e_{g_i} e_{g_j} = 0 \ (j \neq 0)$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, n$. Но из равенства $e e_{g_0} = e_{g_0}$ вытекает, что $e_{g_i} e_{g_0} = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $e_{g_i} = 0$ при $i > 0$ и $e = e_{g_0} \in W(1)$.

Теперь предположим, что e — единичный элемент кольца $W(1)$. Из условия $W(g) = W(g)W(1)$ следует, что любое $r_g \in W(g)$ можно представить в виде

$$r_g = \sum_{i=1}^{m} r_g^{(i)} \alpha_i \quad (r_g^{(i)} \in W(g), \quad \alpha_i \in W(1)).$$

Тогда $r_g e = r_g$ $(g \in G)$, а это означает, что e является правым единичным элементом кольца W. Точно так же устанавливается, что e является и левым единичным элементом кольца W. Лемма доказана.

Лемма 2 [7]. *Если W — строго G-градуированное кольцо с единицей e, то любая g-компонента $W(g)$ является конечно порожденным левым (правым) K-модулем, где $K = W(1)$.*

Предложение 1. *Строго G-градуированное кольцо W является скрещенным произведением группы G и кольца $K = W(1)$ тогда и только тогда, когда любая g-компонента $W(g)$ является циклическим левым и правым K-модулем.*

Доказательство. Предположим, что любая g-компонента $W(g)$ является циклическим левым K-модулем и пусть $W(g)$ порождается элементом $t_g \in W(g)$. Тогда $e \in W(g^{-1})W(g) = K$ и

$$e = \sum_{i=1}^{m} r_{g^{-1}}^{(i)} s_g^{(i)} \quad (r_{g^{-1}}^{(i)} \in W(g^{-1}), \quad s_g^{(i)} \in W(g)).$$

Но $s_g^{(i)} = \alpha_i t_g$ $(\alpha_i \in K)$ и поэтому

$$e = \Big(\sum_{i=1}^{m} r_{g^{-1}}^{(i)} \alpha_i\Big) t_g,$$

т. е. t_g является левым обратимым элементом кольца W. Точно так же доказывается, что t_g является и правым обратимым элементом. Но из условий $v t_g = t_g u = e$

следует, что $v = ve = v(t_g u) = eu = u$, т. е. t_g является обратимым элементом кольца W. В силу результата Дейда [11, Теорема 5. 10], отсюда следует, что W — скрещенное произведение группы G и кольца K. Обратное утверждение очевидно.

Лемма 3. *Если g и h — произвольные элементы группы G, то для любого ненулевого элемента $r_g \in W(g)$ существуют такие элементы u_h, $v_h \in W(h)$, что $r_g u_h \neq 0$ и $v_h r_g \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq r_g \in W(g)$ и

$$e = \sum_{i=1}^{m} u_h^{(i)} v_{h^{-1}}^{(i)}.$$

Тогда $r_g e = r_g$ и поэтому

$$r_g = \sum_{i=1}^{m} (r_g u_h^{(i)}) v_{h^{-1}}^{(i)} \neq 0.$$

Отсюда следует, что для некоторого $i (1 \leq i \leq m)$ имеет место неравенство $r_g u_h^{(i)} \neq 0$. Точно так же доказывается и существование неравенства $v_h r_g \neq 0$.

Следствие. *Элемент $\alpha \in W(1)$ не является делителем нуля в $W(1)$ тогда и только тогда, когда α не является делителем нуля в W.*

Действительно, если α не является делителем нуля в кольце $W(1)$, но существует элемент

$$r = \sum_{g \in G} r_g, \qquad 0 \neq r_g \in W(g),$$

для которого $\alpha r = 0$, то $\alpha r_g = 0$ для всех $g \in \operatorname{supp} r$. Тогда, ввиду Леммы 3, существует такой элемент $u_{g^{-1}} \in W(g^{-1})$, что $r_g u_{g^{-1}} \neq 0$. В таком случае $\alpha(r_g u_{g^{-1}}) = 0$ и $0 \neq r_g u_{g^{-1}} \in W(1)$, что является противоречием. Аналогичным образом доказывается, что α не является и правым делителем нуля в W. Обратное утверждение очевидно, так как $W(1) \subseteq W$.

Теперь переходим к изложению основных результатов работы.

Лемма 4. *Пусть W — произвольное G-градуированное кольцо up-группы G, а x и y — некоторые ненулевые элементы из W. Если $\|x\| + \|y\| > 2$ и $\|xy\| \leq 1$, то существуют такие элементы $g \in \operatorname{supp} x$ и $h \in \operatorname{supp} y$, что $x_g y_h = 0$.*

Доказательство. Так как $\|x\| + \|y\| > 2$ и G является up-группой, то существуют хотя бы два элемента a, $b \in \operatorname{supp}(xy)$, которые имеют однозначное представление $a = g_1 h_1$ и $b = g_2 h_2$, где $g_1, g_2 \in \operatorname{supp} x$ и $h_1, h_2 \in \operatorname{supp} y$. Тогда в произведении $xy = x_{g_1} y_{h_1} + x_{g_2} y_{h_2} + \cdots$ хотя бы одно из слагаемых $x_{g_1} y_{h_1}$ и $x_{g_2} y_{h_2}$ должно равнятся нулю, так как они не сокращаются с остальными слагаемыми и принадлежат разным g-компонентам, а $\|xy\| \leq 1$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть W — произвольное строго G-градуированное кольцо up-группы G.*

1). *Кольцо W содержит делители нуля тогда и только тогда, когда его подкольцо $W(1)$ содержит делители нуля.*

2). *Если $W(1)$ — область целостности, то все обратимые элементы кольца W тривиальны.*

Доказательство. 1). Если x и y — делители нуля в кольце W, то на основании Леммы 4 можем предполагать, что $xy = 0$ и $\|x\| = \|y\| = 1$. Пусть $x = x_g \in W(g)$ и $y = y_h \in W(h)$. Ввиду Леммы 3, существуют такие элементы $u_{g^{-1}} \in W(g^{-1})$ и $v_{h^{-1}} \in W(h^{-1})$, что $u_{g^{-1}} x_g \neq 0$ и $y_h v_{h^{-1}} \neq 0$. Тогда

$$(u_{g^{-1}} x_g)(y_h v_{h^{-1}}) = 0, \quad u_{g^{-1}} x_g, \; y_h v_{h^{-1}} \in W(1),$$

т. е. кольцо $W(1)$ содержит делители нуля. Обратное утвеждение очевидно.

2). Если x — нетривиальный обратимый элемент кольца W и $xy = e$ ($y \in W$), то $\|x\| + \|y\| > 2$ и $\|xy\| = 1$. На основании Леммы 4 отсюда следует, что W содержит делители нуля, а это противоречит первой части теоремы. Теорема доказана.

Радикал Джекобсона [5] кольца W обозначим через $J(W)$.

Из Теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение, которое для правоупорядоченных групп доказал Бел [7, Предложение 4.3.].

Следствие. Если G — $ир$-группа, а W — строго G-градуированное кольцо и $W(1)$ — область целостности, то $J(W) = 0$.

Действительно, пусть x — произвольный ненулевой элемент радикала $J(W)$. Тогда $e + xs$ является обратимым элементом кольца W для всех $s \in W$. Таким образом в W существуют нетривиальные обратимые элементы, а это невозможно.

Напомним, что кольцо K называется первичным [5], если для любых двух двусторонних идеалов I_1 и I_2 кольца K условие $I_1 I_2 = 0$ означает, что $I_1 = O$ или $I_2 = O$. С-кольцом назовем такое кольцо K, в котором каждый главный двусторонний идеал содержит ненулевой центральный элемент кольца K. Например, все простые кольца, все бирегулярные кольца [5] и все коммутативные кольца являются С-кольцами.

Теорема 2. Если W — строго G-градуированное кольцо $ир$-группы G над первичным С-кольцом K, то $J(W) = O$.

Доказательство. Допустим, что $J(W) \neq 0$, и пусть x — ненулевой элемент идеала $J(W)$ минимальной длины $\|x\|$. В силу Леммы 3 можем предполагать, что $a = \operatorname{tr} x \neq 0$. Так как $K = W(1)$ является С-кольцом, то главный двусторонний идеал KaK содержит ненулевой центральный элемент $b \in Z(K)$. Если

$$b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a \beta_i \qquad (\alpha_i, \beta_i \in K),$$

то ненулевой элемент

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x \beta_i$$

тоже принадлежит радикалу $J(W)$, $\operatorname{tr} y = b$ и $\|x\| = \|y\|$, ввиду минимальности длины $\|x\|$. Пусть

$$y = y_{g_0} + y_{g_1} + \cdots + y_{g_n} \quad (n \geqq 0),$$

где $y_{g_0} = b \in Z(K)$ и $y_{g_i} \in W(g_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $\alpha y - y\alpha \in J(W)$ и $\|\alpha y - y\alpha\| < \|y\|$, то $\alpha y - y\alpha = 0$ для всех $\alpha \in K$. Следовательно, $\alpha y_{g_i} = y_{g_i}\alpha$ для всех $\alpha \in K$ и

$i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

1). Предположим, что $n \geqq 1$. Тогда элемент $u = e + y$ является обратимым элементом кольца W длины $\|u\| \geqq 2$, и если v — его обратный, то $\|u\| + \|v\| > 2$. На основании Леммы 4 заключаем, что существуют такие элементы $g \in \operatorname{supp} u$ и $h \in \operatorname{supp} v$, что $u_g v_h = 0$. Кроме того, $u_g \alpha = \alpha u_g$ для всех $\alpha \in K$. В силу Леммы 3, существуют такие элементы $u'_{g^{-1}} \in W(g^{-1})$ и $v'_{h^{-1}} \in W(h^{-1})$, что $c = u'_{g^{-1}} u_g \neq 0$ и $d = v_h v'_{h^{-1}} \neq 0$. Пусть $I_1 = (c)$ и $I_2 = (c)$ — главные двусторонние идеалы кольца K, порожденные соответственно элементами c и d. Покажем, что $I_1 I_2 = O$. В самом деле, любой элемент из $I_1 I_2$ выражается суммами произведений вида $(\alpha c \beta)(\gamma d \delta)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$. Однако,

$$(\alpha c \beta)(\gamma d \delta) = (\alpha u'_{g^{-1}} u_g \beta)(\gamma v_h v'_{h^{-1}} \delta) = \alpha u'_{g^{-1}} \beta \gamma u_g v_h v'_{h^{-1}} \delta = 0,$$

так как u_g коммутирует с элементами кольца K и $u_g v_h = 0$. Но это противоречит условию, что K является первичным кольцом.

2). Предположим, что $n=0$, т. е. $y=y_{g_0}=b$. Тогда выбираем такой элемент $x_g\in W(g)$, что $0\neq x_gb\in W(g)$. Так как $x_gb\in J(W)$, то $u=e+x_gb$ — обратимый элемент кольца W длины $\|u\|=2$. Если v — его обратный элемент, то, согласно Лемме 4, существует такое $h\in\operatorname{supp}v$, что $x_gbv_h=0$. Применяя Лемму 3, отсюда получаем, что центральный элемент b первичного кольца K является делителем нуля, а это невозможно. Теорема доказана.

Далее рассмотрим случай, когда $W(1)$ не является первичным кольцом.

Если I — идеал кольца $K=W(1)$ и $g\in G$, то положим $I^g=W(g^{-1})\,I\,W(g)$. Тогда I^g является идеалом кольца K и $(I^g)^h=I^{gh}$ для всех $g,h\in G$ [7].

Для подгруппы H группы G идеал I кольца K назовем H-инвариантным идеалом, если $I^h=I$ для всех $h\in H$. Очевидно, что I является H-инвариантным идеалом, если $W(h)I=IW(h)$ для всех $h\in H$. Кольцо K назовем H-простым, если K не содержит H-инвариантных двусторонних идеалов (см. [7]).

Предложение 2. *Пусть W — строго G-градуированное кольцо над $Z(G)$-простым кольцом $K=W(1)$, где $Z(G)$ — центр группы G. Если G — up-группа, то $J(W)=0$.*

Доказательство. Допустим, что $J(W)\neq 0$ и пусть x — такой ненулевой элемент идеала $J(W)$ минимальной длины, что $a=\operatorname{tr}x\neq 0$. Тогда

$$I=\sum_{h\in Z(G)}W(h^{-1})a\,W(h)$$

является двусторонним $Z(G)$-инвариантным идеалом кольца K, и поэтому I совпадает с K. Следовательно, для единичного элемента кольца K имеем равенство

$$e=\sum_{h\in Z(G)}\sum_{i=1}^{n(h)}r^{(i)}_{h^{-1}}\,a\,s^{(i)}_h,$$

где $r^{(i)}_{h^{-1}}\in W(h^{-1})$ и $s^{(i)}_h\in W(h)$ для всех $h\in Z(G)$. Тогда элемент

$$y=\sum_{h\in Z(G)}\sum_{i=1}^{n(h)}r^{(i)}_{h^{-1}}\,x\,s^{(i)}_h$$

тоже имеет минимальную длину $\|y\|=\|x\|$ и принадлежит радикалу $J(W)$ и $\operatorname{tr}y=e$. Отсюда следует, что $\|y\|\geq 2$ и для всех $h\in Z(G)$ длина элемента u_hy-yu_h меньше длины $\|y\|$. Но $u_hy-yu_h\in J(W)$, что влечет за собой равенство $u_hy=yu_h$, т. е. $u_hy_g=y_gu_h$ для всех $g\in\operatorname{supp}y$ и всех $u_h\in W(h)$, где $h\in Z(G)$.

а) Предположим, что $\|y\|>2$. Тогда $y-e$ — обратимый элемент кольца W длины $\|y-e\|\geq 2$ и, в силу Леммы 4, заключаем, что для некоторого ненулевого элемента $v_f\in W(f)$, $f\in G$, имеем равенство $y_gv_f=0$, где $g\in\operatorname{supp}y$. Если $r_{g^{-1}}$ — такой элемент из $W(g^{-1})$, что $r_{g^{-1}}y_g\neq 0$ (см. Лемму 3), то

$$I=\sum_{h\in Z(G)}W(h^{-1})\,r_{g^{-1}}\,y_gW(h)$$

является $Z(G)$-инвариантным идеалом кольца K и поэтому $I=K$. Но так как y_g коммутирует с элементами из $W(h)$, то отсюда следует, что $e=sy_g$ ($s\in W(g^{-1})$, т. е. y_g — обратимый элемент кольца W. Но это противоречие, поскольку $y_gv_f=0$.

б) Пусть $\|y\|=2$, т. е. $y=e+y_g$. Тогда y_g — обратимый элемент и $yy_g=y_g+y_g^2\in J(W)$. Теперь, применяя Лемму 4 для обратимого элемента $z=e+y_g+y_g^2$, мы получим, что y_g или y_g^2 является делителем нуля в W, а это невозможно. Предложение доказано.

Теорема 3. *Пусть W — строго G-градуированное кольцо, где G — абелева группа без кручения. Если $W(1)$ — конечная прямая сумма простых колец, то $J(W)=0$.*

Доказательство. Предположим, что кольцо $K = W(1)$ имеет разложение $K = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$, где каждое I_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ является простым кольцом с единицей, так как $e \in K$. Под действием элементов группы G множество идеалов $I_1, I_2, \ldots, I_n$ распадается на непересекающиеся орбиты. Если I — произвольный идеал кольца K, то положим

$$O(I) = \sum_{g \in G} W(g^{-1})\, IW(g) = \sum_{g \in G} I^g.$$

Очевидно, что при подходящей номерации идеалов $I_1, I_2, \ldots, I_n$ мы можем предполагать, что

$$K = \sum_{i=1}^{m} \oplus O(I_k) \qquad (m \leq n).$$

Если положим $M_k = \sum_{j \neq k} I_j$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то M_k будет максимальным идеалом кольца K, и так как пересечение всех максимальных идеалов кольца K равняется нулю, то

$$\bigcap_{k=1}^{m} \Big(\bigcap_{g \in G} M_k^g\Big) = O.$$

Кроме того,

$$\bigcap_{g \in G} M_k^g = \sum_{j \neq k} O(I_j).$$

Поэтому

$$K/\Big(\bigcap_{g \in G} M_k^g\Big) \cong O(I_k).$$

Так как $N_k = \bigcap_{g \in G} M_k^g$ является G-инвариантным идеалом кольца K, то WN_k — двусторонний идеал кольца W, и W/WN_k является строго G-градуированным кольцом над кольцомK/N_k [7], которое не содержит собственных G-инвариантных идеалов В силу Предложения 2, $J(W/WN_k) = O$, т. е. $J(W) \subseteq WN_k$. Отсюда следует, что

$$J(W) \subseteq \bigcap_{k=1}^{m} WN_k = O.$$

Теорема доказана.

Если K — произвольное ассоциативное кольцо, то через $B(K)$ обозначим радикал Маккоя—Брауна кольца K, т. е. $B(K)$ является пересечением всех максимальных идеалов кольца K [5]. Если $B(K) = O$, то K называется полупростым кольцом.

Теорема 4. *Пусть W — строго G-градуированное кольцо ир-группы G над кольцом $K = W(1)$. Если все максимальные идеалы кольца K являются G-инвариантными, то $J(W) \subseteq B(K)W$.*

Доказательство. Если M — произвольный максимальный идеал кольца K, то MW является двусторонним идеалом кольца W, а W/MW является строго G-градуированным кольцом *ир*-группы G над простым кольцом K/M [7]. В силу Предложения 2, имеет место равенство $J(W/MW) = O$ и поэтому $J(W) \subseteq MW$. Следовательно,

$$J(W) \subseteq \bigcap_{M} MW = B(K)W.$$

Следствие. *Если $W = (G, K, \rho, 1)$ — скрещенное групповое кольцо ир-группы G над полупростым кольцом K, то $J(W) = O$.*

Действительно, в этом случае любой максимальный идеал кольца K является G-инвариантым и $B(K)=O$.

Группа G называется FC-группой [6], если G не имеет бесконечных классов сопряженных элементов. Кольцо K удовлетворяет условию конечности для главных двусторонних идеалов, если конечна любая строго возрастающая (или убывающая) цепочка главных двусторонних идеалов кольца K.

Применяя Теорему 3, укажем некоторые условия, при которых скрещенные произведения FC-группы над полупростыми кольцами имеют нулевой радикал Джекобсона.

Теорема 5. *Пусть G — FC-группа, а K — полупростое кольцо с условием конечности для главных двусторонних идеалов. Если $W=(G, K, \rho, \sigma)$ — произвольное скрещенное произведение и порядок любого элемента периодической части $\pi(G)$ группы G обратим в K, то $J(W)=O$.*

Доказательство. Предположим, что в $J(W)$ существует ненулевой элемент x и пусть $H=\langle \operatorname{supp} x\rangle$ — подгруппа группы G, порожденная множеством $\operatorname{supp} x$. Тогда $x\in J(W_H)$, где $W_H=(H, K, \sigma, \rho)$. Так как H — конечно порожденная FC-группа, то ее периодическая часть $\pi(H)$ является конечной нормальной подгруппой группы H и фактор-группа $H/\pi(H)$ — абелева группа без кручения [6]. Известно [4], что

$$(H, K, \rho, \sigma)=(H/\pi(H),\quad (\pi(H),\ K, \rho, \sigma),\quad \zeta,\ \tau),$$

т. е. W_H является скрещенным произведением группы $H/\pi(H)$ над кольцом $W_{\pi(H)}=(\pi(H), K, \rho, \sigma)$ при некоторой системе факторов ζ и отображении τ. Но так как полупростое кольцо K с условием конечности для главных двусторонних идеалов является бирегулярным кольцом [5], то этим свойством обладает и кольцо $W_{\pi(H)}$ [14]. Кроме того, кольцо $W_{\pi(H)}$ тоже удовлетворяет условию конечности для главных двусторонних идеалов [14]. Следовательно, $W_{\pi(H)}$ разлагается в виде конечной прямой сумме простых колец с единицей [5]. В силу Теоремы 3, отсюда следует, что $J(W_H)=O$, а это невозможно, так как $0\neq x\in J(W_H)$. Полученное противоречие показывает, что $J(W)=O$. Теорема доказана.

Если $W=(G, K, \rho, \sigma)$ — произвольное скрещенное произведение группы G и кольца K при системе факторов ρ и отображении σ, а $I_{nn}(K)$ — группа внутренних автоморфизмов кольца K, то множество

$$G_{\text{ker}}=\{g\in G/g\sigma\in I_{nn}(K)\}$$

является нормальной подгруппой группы G [2] и называется ядром отображения σ

Следующая теорема показывает, что если кольцо K не удовлетворяет условию конечности, для главных двусторонних идеалов, то вероятно Теорема 5 снова имеет место.

Теорема 6. *Пусть $W=(G, K, \rho, \sigma)$ — произвольное скрещенное произведение FG-группы G и полупростого кольца K. Если порядок любого периодического элемента группы G обратим в K и ядро G_{ker} имеет конечный индекс в G, то $J(W)=O$.*

Доказательство. Если M — произвольный максимальный идеал кольца K, то $\{M^{g\sigma}\mid g\in G\}$ — конечное множество максимальных идеалов кольца K, так как любой внутренний автоморфизм кольца K отображает M в себе и $[G\colon G_{\text{ker}}]<\infty$. Кроме того, пересечение $\bigcap\limits_{g\in G} M^{g\sigma}$ является G-инвариантным идеалом кольца K. В силу китайской теоремы об остатках, отсюда следует, что фактор-кольцо $\bar{K}=K/\bigcap\limits_{g\in G} M^{g}$ является конечной прямой суммой простых колец с единицей. Поскольку [4]

$$W/(\bigcap_{g\in G} M^{g\sigma})M \cong (G, \overline{K}, \overline{\rho}, \overline{\sigma}),$$

то на основании Теоремы 4 заключаем, что

$$J(W) \subseteq (\bigcap_{g\in G} M^{g\sigma})W.$$

Поэтому

$$J(W) \subseteq (\bigcap_{g\in G} M^{g\sigma})W = B(K)W = O,$$

т. е. $J(W) = O$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Бовди. О групповых кольцах групп без кручения. *Сиб. матем. ж.*, **1**, 1960, 555—558.
2. А. А. Бовди. Скрещенные произведения полугруппы и кольца. *Сиб. матем. ж.*, **4**, 1963, 481—499.
3. А. А. Бовди. Групповые кольца. Ужгород, 1974.
4. А. А. Бовди, Ст. В. Миховски. Идемпотенты скрещенных произведений. *Известия матем. инст. БАН*, **13**, 1971, 247—263.
5. В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин. Радикалы алгебр и структурная теория. Москва, 1979.
6. С. Н. Черников. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. Москва, 1980.
7. A. D. Bell. Localization and ideal theory in Noetherian strongly group-graded rings. *J. Algebra*, **105**, 1987, 76—115.
8. A. Strojnowski. A note on u. p. groups. *Comm. Algebra*, **8**, 1980, 231—234.
9. D. S. Passman. The algebraic structure of group rings. New York, 1977.
10. D. S. Passman. Infinite crossed products. San Diego, 1989.
11. E. C. Dade. Group-graded rings and modules. *Math. Z.*, **174**, 1980, 241—262.
12. J. Kaplansky. Problems in the theory of rings. Report of a conference on linear algebras. Washington, 1957, 1—3.
13. R. P. Knott. On isomorphic group rings. *J. London Math. Soc.*, 5, 1972, 546—548.
14. S. V. Mihovski. Biregular crossed products. *J. Algebra*, **114**, 1988, 58—67. Erratum, 117, 1988, 525.
15. W. Rudin, H. Schneider. Idempotents in group rings. *Duke Math. J.*, **31**, 1964, 585—602.

Поступила 6. 06. 1989

Болгария,
Пловдив 4000,
Пловдивский университет
им. Паисия Хилендарского

Болгария,
Бургас,
Химико-технологический
институт