Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

РАНГ БЕЗ КРУЧЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ГРУПП КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР НАД ПОЛЕМ

ТОДОР Ж. МОЛЛОВ, НАКО А. НАЧЕВ

В этой работе вычисляется ранг $r_0(U)$ без кручения мультипликативной группы U коммутативной скрещенной групповой алгебры K^tG абелевой группы G над полем K, характеристика которого не делит порядки периодических элементов группы G.

Результаты статьи анонсированы в [4]. Будем использовать следующее определение понятия скрещенной групповой алгебры K^tG группы G над коммутативным кольцом K с единицей, данное в [5]. Пусть G — группа с операцией „o", K^* — мультипликативная группа кольца K и дана функция $G\times G\rightarrow K^*$, которая любым двум элементам a и b группы G сопоставляет такой однозначно определенный элемент $(a, b)\in K^*$, что для каждого элемента $c\in G$ выполняется равенство

$$(a\circ b,\ c)(a,\ b)=(a,\ b\circ c)(b,\ c).$$

Скрещенная групповая алгебра K^tG группы G над кольцом K, соответствующая указанной функции, называется K-алгеброй с базисом G, в которой умножение базисных элементов определено следующим образом: $ab=(a, b)\,a\circ b$, а умножение линейных комбинаций базисных элементов продолжено по линейности. Таким образом операция умножения элементов алгебры K^tG обозначается через „." или даже без знака. Множество элементов (a, b) называется обычно системой факторов. n-ная степень элемента g в группе G обозначается через $g^{(n)}$, а в алгебре K^tG — обычным образом через g^n. Обозначим единицу группы G через e, а единицу кольца K (и алгебры K^tG) — через 1. Очевидно $g_1g_2\dots g_\lambda=\alpha g_1\circ g_2\circ\dots\circ g_n$, где $\alpha\in K^*$, и что алгебра K^tG коммутативна тогда и только тогда, когда $(a, b)=(b, a)$ для любых элементов a и b группы G. Дополнительно отметим, что $G\subseteq U$, где $U=U(K^tG)$— мультипликативная группа алгебры K^tG, но G не является подгруппой группы U. Так как считаем, что K совпадает с групповой алгеброй $K\langle e\rangle$, где $\langle e\rangle$ — единичная группа, то K является K-подалгеброй алгебры K^tG. Следовательно, K^* — подгруппа группы $U(K^tG)$ и $r_0(K^*)\leq r_0(U)$, где $r_0(K^*)$ — ранг без кручения мультипликативной группы K^*.

Если KG — полупростая групповая алгебра периодической абелевой группы G над полем K, то ранг $r_0(U(KG))$ без кручения мультипликативной группы $U(KG)$ вычислен в [2].

Теорема 1. *Пусть K^tG — коммутативная скрещенная групповая алгебра абелевой группы G над полем K, характеристика которого не делит порядки периодических элементов группы G. Мультипликативная группа $U(K^tG)$ алгебры K^tG периодическая тогда и только тогда, когда G — периодическая группа и K — алгебраическое расширение конечного поля.*

Доказательство. Необходимость. Так как K^* — подгруппа группы $U(K^tG)$, то K^* — периодическая группа. Следовательно, K — алгебраическое расширение конечного поля. Если g — любой элемент группы G, то $g^{(n)}=\alpha g^n$, $\alpha\in K^*$. Так как $g^n=1$ для некоторого $n\in \mathbb{N}$ и $1=(e, e)^{-1}e$, то $g^{(n)}=e$, т. е. G — периодическая группа.

Достаточность. Покажем, что любой элемент $x \in U(K^tG)$ является периодическим элементом. Действительно, $x \in U(K^tF)$, где F — конечнопорожденная подгруппа группы G, т. е. F — конечная группа. Так как K^tG — коммутативная полупростая алгебра, то коммутативная полупростая артиновая алгебра K^tF является прямой суммой

(1) $$K^tF = I_1 \oplus \cdots \oplus I_s$$

полей I_i, являющимися K-алгебрами. Ввиду того, что K^tF — конечномерная алгебра над полем K, то поля I_i — конечномерные расширения поля K. Кроме того

(2) $$U(K^tF) = I_1^* \times \cdots \times I_s^*.$$

Так как каждое поле I_i — конечномерное расширение алгебраического расширения K конечного поля, то I_i^* — периодическая группа, и из (2) вытекает, что $U(K^tF)$ — периодическая группа, т. е. x — периодический элемент. Следовательно, $U(K^tG)$ — периодическая группа.

Отметим, что необходимое и достаточное условие для периодичности мультипликативной группы $U(KG)$ полупростой групповой алгебры KG абелевой группы G над полем K найдено в [3].

В следующих утверждениях будем предполагать, что G — абелева группа, K — поле, характеристика которого не делит порядки периодических элементов группы G, и алгебра K^tG коммутативна.

Лемма 2. *Пусть G — периодическая абелева группа. Тогда $r_0(U(K^tG) = 0$, если K — алгебраическое расширение конечного поля и $r_0(U(K^tG) = \max(|K|, |G|)$ в противном случае.*

Доказательство. Если K — алгебраическое расширение конечного поля, то, ввиду теоремы 1, мультипликативная группа $U(K^tG)$ периодическая. Следовательно, $r_0(U) = 0$. Поэтому предположим, что K не является алгебраическим расширением конечного поля. Тогда $|K| \geqq \aleph_0$ и $r_0(K^*) = |K|$ (см. [2]). Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $|K| \geqq |G|$. Так как $|K| = r_0(K^*) \leqq r_0(U)$, то $r_0(U) = \max |K|, |G|)$.

2) Пусть $|K| < |G|$. Следовательно, $|G| > \aleph_0$. Пусть G_p — p-примарная компонента группы G и M — множество этих простых чисел p, для которых $|G_p| > |K|$. Тогда $|G_p| = |G[p]|$, где $G_p[p] = \{g \in G_p \mid g^p = 1\}$ и $|G| = \Sigma_{p \in M} |G_p[p]|$. Докажем, что $r_0(U(K^tG_p[p])) = |G_p[p]|$, откуда будет следовать, что $r_0(U) = |G| = \max(K|, |G|)$. Таким образом достаточно доказать, что $r_0(U(K^tG)) = |G|$ для такой абелевой p-группы G, для которой $G[p] = G$ и $|G| > |K|$. Пусть G — группа с этим условием. Очевидно отображение $\varphi: G \to K^* | K^{*p}$, определенное через $\varphi(g) = g^p K^{*p}$, является гомоморфизмом, так как для любых элементов a и b группы G выполнено

$$\varphi(a \circ b) = (a \circ b)^p K^{*p} = ((a,\ b)^{-1} ab)^p K^{*p} = a^p K^{*p} . b^p K^{*p} = \varphi(a) \varphi(b).$$

Следовательно, $|G| = |\operatorname{Ker} \varphi| . |Im \varphi|$. Так как $Im \varphi \subseteqq K^* | K^{*p}$, то $|Im \varphi| \leqq |K| < |G|$. Следовательно, $|\operatorname{Ker} \varphi| = |G|$. Пусть $\operatorname{Ker} \varphi = \Pi_{i \in I} \langle g_i \rangle$ — (ограниченное) прямое произведение циклических групп $\langle g_i \rangle$. Тогда $|I| = |G|$, и из $g_i \in \operatorname{Ker} \varphi$ вытекает $g_i^p \in K^{*p}$, т. е. $g_i^p = \alpha_i^p$, $\alpha_i \in K^*$. Пусть $\alpha_i^{-1} g_i = f_i$, $i \in I$. Так как элементы f_i, $i \in I$, очевидно образуют мультипликативно независимую систему в группе $U(K^tG)$, то произведение $\Pi_{i \in I} \langle f_i \rangle = F$, операция которого совпадает с операцией алгебры K^tG, является прямым. Следовательно, операции групповой алгебры KF группы F над полем K и алгебры $K^t \operatorname{Ker} \varphi$ одинаковы и $KF = K^t \operatorname{Ker} \varphi$, т. е. KF — подалгебра алгебры K^tG и $|F| = |I| = |G|$. Пусть $V(KF|$ — мультипликативная группа группы нормированных единиц алгебры KF. Тогда

$$r_0(U(K^tG)) \geqq r_0(U(K^t \operatorname{Ker} \varphi)) \geqq r_0(V(KF)) = \max(|K|, |F|) = \max(|K|, |G|),$$

где третье равенство следует из теоремы 3 статьи [2], чем лемма доказана.

Ввиду мультипликативной записи группы G будем говорить о мультипликативно независимой системе группы G, а не о ее линейно независимой системе.

Лемма 3. *Каждая мультипликативно независимая система элементов бесконечного порядка в группе G является мультипликативно независимой системой бесконечного порядка в группе $U(K^tG)$.*

Доказательство. Пусть $g_1, \dots, g_s$ — любые элементы бесконечного порядка мультипликативно независимой системы группы G и $g_1^{k_1} \dots g_s^{k_s} = 1$, $k_i \in \mathbb{Z}$. Тогда существуют такие элементы α и β группы K^*, что $\alpha g_1^{(k_1)} \dots g_s^{(k_s)} = \beta e$, откуда получается $g_1^{(k_1)} \dots g_s^{(k_s)} = e$. Следовательно, $k_1 = \dots = k_s = e$. Очевидно g_i — элементы бесконечного порядка в группе $U(K^tG)$, так как из $g_i^{k_i} = 1$ получится $k_i = 0$. Лемма доказана.

В следующих утверждениях используется хорошо известный факт, что если G — абелева группа без кручения и K — коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, то обратимые элементы алгебры K^tG тривиальны, т. е. имеют вид εg, $\varepsilon \in K^*$, $g \in G$. Через $O(g)$ обозначается порядок элемента $g \in G$.

Лемма 4. *Если G — абелева группа без кручения, K — алгебраическое расширение конечного поля и $\{\varepsilon_i g_i \mid i \in I, \varepsilon_i \in K^*, g_i \in G\}$ — мультипликативно независимая система группы $U(K^tG)$, то $\{g_i \mid i \in I\}$ — мультипликативно независимая система группы G.*

Доказательство. Пусть $g_1^{(k_1)} \dots g_s^{(k_s)} = e$. Следовательно, существует такой элемент $\alpha \in K^*$, что

$$\alpha g_1^{k_1} \dots g_s^{k_s} = 1. \tag{3}$$

Пусть $O(\alpha) = l_0$, $O(\varepsilon_i) = l_i$ и $l = l_0 l_1 \dots l_s$. Тогда из (3) следует $g_1^{k_1 l} \dots g_s^{k_s l} = 1$. Полученное равенство можно записать в виде $(\varepsilon_1 g_1)^{k_1 l} \dots (\varepsilon_s g_s)^{k_s l} = 1$. Так как $\{\varepsilon_i g_i \mid i \in I\}$ — мультипликативно независимая система группы $U(K^tG)$, то $k_i l = 0$, откуда, ввиду $l > 0$, вытекает $k_i = 0$, $i = 1, \dots, s$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если G — абелева группа без кручения и K — поле, то*

$$r_0(U(K^tG)) = \max(r_0(K^*), r_0(G)). \tag{4}$$

Доказательство. Если K — алгебраическое расширение конечного поля, то, ввиду леммы 4, выполнено $r_0(U) = r_0(G) = \max(r_0(K^*), r_0(G))$, так как $r_0(K^*) = 0$. Поэтому предположим, что K не является алгебраическим расширением конечного поля. Следовательно, $|K^*| \geqq \aleph_0$ и $r_0(K^*) = |K|$ (см. [2]). Рассмотрим два случая.

1) Пусть $|G| = \aleph_0$. Следовательно, $|G| \leqq |K|$ и $r_0(K^*) = |K| = \max(|K|, |G|) \geqq r_0(U) \geqq r_0(K^*)$, откуда вытекает $r_0(U) = r_0(K^*) = \max(r_0(K^*), r_0(G))$.

2) Пусть $|G| > \aleph_0$. Следовательно, $r_0(G) = |G|$. Тогда

$$\max(r_0(K^*), r_0(G)) = \max(|K|, |G|) \geqq r_0(U) \geqq \max(r_0(K^*), r_0(G)),$$

где последнее неравенство вытекает из леммы 4. Из полученной цепи неравенств следует (4).

Следующая лемма хорошо известна (см. [1]).

Лемма 6. *Пусть H — подгруппа абелевой группы G, Π — фиксированная полная система представителей смежных классов группы G относительно подгруппы H и алгебра K^tH индуцирована коммутативной алгеброй K^tG. Тогда имеет место изоморфизм $K^tG \cong (K^tH)^t(G/H)$ K-алгебр, где скрещенная коммутативная алгебра $(K^tH)^t(G/H)$ фактор группы G/H над кольцом K^tH определяется следующей системой факторов: $(g_1H, g_2H) = (g_1, g_2)(h_{12}, g_{12})^{-1} h_{12}$, где $g_1 g_2 = h_{12} g_{12}$, $g_{12} \in \Pi$ и $h_{12} \in H$.*

Следующие две леммы тоже хорошо известны. Пусть $K_1 \oplus \cdots \oplus K_r$ обозначает прямую сумму колец.

Лемма 7. *Если H — абелева группа без кручения и L — коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, то $U(L^t H)/L^* \cong H$.*

Действительно, обратимые элементы скрещенного кольца $L^t H$ имеют вид εh, где $\varepsilon \in L^*$ и $h \in H$ и отображение $\varphi\colon\ U(L^t H) \to H$, определенное через $\varphi(\varepsilon h) = h$, является гомоморфизмом с ядром L^*.

Лемма 8. *Если H — абелева группа и K_i — любые коммутативные кольца с единицами, то имеет место K — изоморфизм*

$$(K_1 \oplus \cdots \oplus K_r)^t H \cong (K_1^t H) \oplus \cdots \oplus (K_r^t H).$$

Теорема 9. *Пусть G — абелева группа G_0 — ее периодическая часть, K — поле, характеристика которого не делит порядки периодических элементов группы G, алгебра $K^t G$ коммутативна и $r_0(U)$ — ранг без кручения мультипликативной группы $U(K^t G)$ алгебры $K^t G$. Если K — алгебраическое расширение конечного поля и 1) группа G периодическая, то $r_0(U) = 0$; 2) если группа G без кручения, то $r_0(U) = r_0(G)$ и 3) если $\{e\} \neq G_0 \neq G$, $r_0(G) < |G|$, число минимальных ортогональных идемпотентов индуцированной алгебры $K^t G_0$ алгеброй $K^t G$ — конечное число s и или 3.1) $|G_0| = |G| = \aleph_0$ или 3.2) $|G_0| < |G|$, то $r_0(U) = s r_0(G)$. В остальных случаях $r_0(U) = \max(|K|, |G|)$.*

Доказательство. I. Пусть K — алгебраическое расширение конечного поля. Следовательно $|K| \leqq \aleph_0$. Если группа G периодическая, то, ввиду теоремы 1, U — периодическая группа. Следовательно, $r_0(U) = 0$, чем закончен случай 1) формулировки теоремы. Поэтому предположим, что $G_0 \neq G$. Если G_0 — единичная группа, то, ввиду леммы 5, имеет место $r_0(U) = \max(r_0(K^*), r_0(G)) = r_0(G)$, чем закончен случай 2) формулировки теоремы.

Поэтому предположим, что $\{e\} \neq G_0 \neq G$. Следовательно $|G| \geqq \aleph_0$ и $|G| \geqq |K|$. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $r_0(G) < |G|$ и

1.1) $|G_0| = |G|$. Предположим, что

1.1.1) $|G| > \aleph_0$. Пусть M — множество всех простых чисел p, для которых $|G_p| > \aleph_0$ и $H = \Pi_{p \in M} G_p[p]$. Тогда $|G| = |H| = \Sigma_{p \in M} |H_p|$. Поэтому можем провести рассуждения для фиксированного простого числа p и группы H_p, принимая, что $H_p = H$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon H \to K^*/K^{*p}$, определенный через $\varphi(h) = h^p K^{*p}$ (см. случай 2 для группы G в доказательстве леммы 2). Очевидно имеет место $H = \operatorname{Ker}\varphi \times H_1$, где H_1 — подгруппа группы H. Введем обозначение $T = \operatorname{Ker}\varphi$. Так как $|K^*/K^{*p}| \leqq \aleph_0$, то $|\operatorname{Ker}\varphi| = |H|$, т. е. $|T| = |H|$. Пусть $T = \Pi_{i \in I} \langle t_i \rangle$, где $\langle t_i \rangle$ — циклические группы порядка p. Тогда $|I| = |H|$. Так как $\varphi(t_i) = t_i^p K^{*p} = K^{*p}$, то $t_i \in K^{*p}$, т. е. $t_i = \alpha_i^p$, $\alpha_i \in K^*$ для каждого $i \in I$. Пусть $\alpha_i^{-1} t_i = a_i$. Тогда $K^t T = KA$, где $A = \Pi_{i \in I} \langle a_i \rangle$. Следовательно, групповая алгебра KA — подалгебра алгебры $K^t H$. Пусть $c \in G \setminus G_0$, и минимальные ортогональные идемпотенты подалгебры $K\langle a_i \rangle$ алгебры $K^t T$ являются $e_{i1}, \ldots, e_{is_i}$, $i \in I$. Рассмотрим элементы

$$x_i = c e_{i1} + e_{i2} + \cdots + e_{is_i} \in U(K^t G), \quad i \in I. \tag{5}$$

Докажем, что они образуют мультипликативно независимую систему группы $U(KA)$. Действительно, возьмем n из указанных элементов. Переномерируя их, можем считать, что это элементы x_i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} = 1$. Из этого равенства, используя (5), польучим

$$(c^{k_1} e_{11} + e_{12} + \cdots + e_{1s_1})(c^{k_2} e_{21} + e_{22} + \cdots + e_{2s_2}) \ldots (c^{k_n} e_{n1} + e_{n2} + \cdots + e_{ns_n}) = 1,$$

т. е.

$$c^{k_1}e_{11}e_{2s_2}\dots e_{ns_n}+c^{k_2}e_{1s_1}e_{21}\dots e_{ns_n}+\dots+c^{k_n}e_{1s_1}e_{2s_2}\dots e_{n1}+\dots=1.$$

Так как произведения идемпотентов, участвующих в каждом слагаемом последнего равенства, являются нетривиальными ортогональными и различными идемпотентами, то $c^{k_i}=f_i$, $f_i\in G_0$, откуда получится $c^{k_i l_i}=1$, $i=1,\dots,n$. Таким образом $k_i=0$, $i=1,\dots,n$. Следовательно, $r_0(U)\geq|I|=|G|=\max(|K|,|G|)$, чем случай закончен.

1.1.2). Пусть $|G|=\aleph_0$. Следовательно, $|G_0|=\aleph_0$.

1.1.2.1) Пусть индуцированная алгебра K^tG_0 алгебры K^tG имеет бесконечное число идемпотентов. Следовательно, для каждого натурального n существует такая конечная подгруппа F_n группы G, что число s минимальных ортогональных идемпотентов алгебры K^tF_n не меньше, чем n. Пусть этими идемпотентами являются $e_1,\dots,e_s$, $s\geq n$ и $c\in G\setminus G_0$ — фиксированный элемент. Рассмотрим элементы

$$x_i=e_1+e_2+\dots+ce_i+\dots+e_s,\quad i=1,\dots,s, \tag{6}$$

группы $U(K^tG)$. Покажем, что они образуют мультипликативно независимую систему этой группы. Действительно, из $x_1^{k_1}\dots x_s^{k_s}=1$, $k_i\in\mathbf{Z}$, ввиду (6), получится $c^{k_1}e_1+\dots+c^{k_s}e_s=1$. Так как $e_1+\dots+e_s=1$ и $e_1+\dots+e_s$ — ортогональная сумма идемпотентов, то $c^{k_i}e_i=e_i$. Поскольку элементы носителя идемпотента e_i в правой части этого равенства периодические, то и элементы носителя произведения $c^{k_i}e_i$ периодические. Следовательно, $c^{k_i}=1$, т. е. $k_i=0$, $i=1,\dots,s$. Таким образом $x_1,\dots,x_s$ — мультипликативно независимая система. Следовательно, $r_0(U)\geq\aleph_0=|G|=\max(|K|,|G|)$.

1.1.2.2) Пусть число минимальных ортогональных идемпотентов индуцированной алгебры K^tG_0 конечно. Пусть этими идемпотентами являются $e_1,\dots,e_s$, $s\geq 1$. Так как, ввиду леммы 6, имеет место изоморфизм $K^tG\cong(K^tG_0)^t(G/G_0)$ и $K^tG_0=(K^tG_0)e_1\oplus\dots\oplus(K^tG_0)e_s$, то, ввиду леммы 8, получится

$$K^tG_0\cong\sum_{i=1}^{s}((K^tG_0)e_i)^t(G/G_0),$$

где указанная сумма прямая. Следовательно, обозначая $(K^tG_0)e_i=L_i$, получим прямую сумму $K^tG\cong\Sigma_{i=1}^s L_i^t(G/G_0)$ и

$$U(K^tG)\cong\prod_{i=1}^{s}U(L_i^t(G/G_0)). \tag{7}$$

Ввиду того, что скрещенная алгебра K^tG_0 полупроста, то ее подалгебра L_i полупроста и, очевидно, ее идемпотенты только тривиальные. Так как, кроме этого, L_i — коммутативная алгебра и любая конечнопорожденная K — подалгебра алгебры L_i артинова, то L_i — алгебра (кольцо) без делителей нуля. Хорошо известно, что если H — подгруппа группы G, то $r_0(G)=r_0(H)+r_0(G/H)$ ([6], стр. 105, упражнение 3 (г)). Применяя это свойство к подгруппе $H=L_i^*$ группы $U(L_i^t(G/G_0))$, получим

$$r_0[U(L_i^t(G/G_0))]=r_0(L_i^*)+r_0[U(L_i^t(G/G_0))/L_i^*],\quad i,\dots,s. \tag{8}$$

Однако, ввиду леммы 7, имеет место $U(L_i^t(G/G_0))/L_i^*\cong G/G_0$. В силу этого изоморфизма и равенства $r_0(G/G_0=r_0(G)$, (8) принимает вид $r_0[U(L_i^t(G/G_0))]=r_0(L_i^*)+r_0(G)$. Используя это равенство, запишем (7) в виде

$$r_0(U)=\sum_{i=1}^{s}r_0(L_i^*)+sr_0(G). \tag{9}$$

Однако группа $L_i^* = [(K^t G_0) e_i]^*$ изоморфна подгруппе группы $U(K^t G_0)$. Следовательно, $r_0(L_i^*) \leqq r_0[U(K^t G_0)]$ (последнее равенство вытекает из леммы 2), откуда получится $r_0(L_i^*) = 0$. Тогда равенство (9) принимает вид $r_0(U) = sr_0(G)$, чем случай закончен (а также и случай 3.1) формулировки теоремы).

1.2) Пусть $|G_0| < |G|$. Следовательно, имеет место $|G/G_0| = |G|$. Если допустим, что $|G| > \aleph_0$, то из $|G_0| < |K|$ вытекает $|G/G_0| = |G| > \aleph_0$. Следовательно, выполнено $r_0(G) = r_0(G/G_0) = |G/G_0| = |G|$, т. е. $r_0(G) = |G|$, что противоречит условию. Отсюда вытекает, что $|G| = \aleph_0$, G_0 — конечная группа и $r_0(G)$ — конечное число. Пусть $e_1, \ldots, e_s$ $(s \geqq 1)$ — минимальные ортогональные идемпотенты алгебры $K^t G_0$. Тогда, аналогично прежнему случаю 1.1.2.2), доказываются что $r_0(U) = sr_0(G)$, чем случай закончен (а также и случай 3.2) формулировки теоремы).

II) Пусть K не является алгебраическим расширением конечного поля. Следовательно, $|K| \geqq \aleph_0$ и $r_0(K^*) = |K|$ (см. [2]). Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $|K| \geqq |G|$. Так как $r_0(U) \geqq r_0(K^*) = |K| = \max(|K|, |G|)$ то $r_0(U)$ $|G| = \max(|K|, |G|)$.

2) Пусть $|K| < |G|$. Следовательно, $|G| > \aleph_0$.

2.1) Пусть $|G_0| = |G|$. Тогда

$$r_0(U) \geqq r_0[U(K^t G_0)] = \max(|K|, |G_0|) = \max(|K|. |G|),$$

где предпоследнее равенство вытекает из леммы 2. Следовательно, имеет место $r_0(U) = \max(|K|, |G|)$.

2.2) Пусть $|G_0| < |G|$. Из этого неравенства вытекает $|G/G_0| = |G| > \aleph_0$, т. е $|G/G_0| > \aleph_0$ и $r_0(G) = r_0(G/G_0) = |G|$. Тогда, ввиду леммы 3, имеет место $r_0(U) \geqq r_0(G) = |C|$ $= \max(|K|, |G|)$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Бовди, Ст. В. Миховски. Идемпотенты скрещенных произведений. *Изв. мат. инст.* **13**, 1971, 247-263.
2. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах полупростых групповых алгебр периодических абелевых групп. *Науч. тр. Пловд. унив.*, **20**, 1983, 1, 53-67.
8. Т. Ж. Моллов. Мультипликативные группы полупростых групповых алгебр. *Плиска*, **8**, 1986, 54-64.
4. T. Zh. Mollov, N. A. Natchev. Torsian free rank of the multiplicative group of the commutative semisimple twisted group ring of the abelian group over a field. *C. R. Acad. Bulg. Sci.* (to appear).
5. Н. А. Начев, Т. Ж. Моллов. О полупростых скрещенных групповых алгебр циклических p-групп. *Доклады БАН*, **40**, 7, 1987, 13-15.
6. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, Москва, 1974, с. 335.

Пловдивский университет
Кафедра алгебры
4000 Пловдив
Болгария

Поступила 4. 11. 1989