Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

DIFFERENTIABLE GROUPS AND WHITNEY SPACES

K. SPALLEK

Differentiable groups G, i. e. groups in the category of differentiable spaces are, for example, Lie groups or formal groups over **R** or **C**. In general they are some "mixture" of these special cases: in some sense families of formal groups differentiably parametrized along Lie groups. Here we go one step in this direction and show, that a differentiable group, which is a standard space, is a Whitney space (main result, Satz 3.7). For more general results, one has in addition to apply [5]—[8]. In more detail:

A N-differentiable space $X=(X, \mathscr{A})$ is a ringed space, with structure sheaf $\mathscr{A}$ on a top. space X, which is locally of the form $(D, \mathscr{D}^N/\mathscr{J})$. Here: $D\subset K^n$ is an arbitrary subset (in general). $\mathscr{D}^N$ is the sheaf of K-valued C^N-function germs on K^n, $K=\mathbf{R}$ if $N=1, \dots \infty, \omega$ ($\sim$ real analytic), $K=\mathbf{C}$ if $N=\omega^*$ ($\sim$ complex analytic) and $\mathscr{J}\subset\mathscr{D}^N|D$ is some ideal sheaf of function germs vanishing on D.

X is called *locally compact*, iff X is locally compact; X is closed, iff $\mathscr{A}$ is topologically closed, i. e iff in each local form $(D, \mathscr{D}^N/\mathscr{J})$ of X the ideal $\mathscr{J}$ is closed under limits of sequences of functions of $\mathscr{J}$ in the usual topologies. X is a ***standard space***, iff X is locally compact and closed ([4]). X is ***reduced***, iff in each local form the ideal $\mathscr{J}$ is the ideal of all function germs vanishing on D.

Special standard spaces are: differentiable manifolds, complex spaces (reduced or not), reduced locally compact N-differentiable spaces, locally compact Whitney spaces.

X is a *Whitney space*, iff in each local form $(D, \mathscr{D}^N/\mathscr{J})$ of X the sheaf $\mathscr{J}\subset\mathscr{D}^N|D$ is the ideal of all function germs, which are flat on D, i. e. which vanish with all their derivatives on D. According to Whitney's main theorem in [10], each section in $\mathscr{D}^N/\mathscr{J}$ corresponds exactly to one Whitney-differentiable function on D (in modern terminology): i. e. to a family $D\ni x\to P_x$ of formal power series $P_x=\Sigma a_v(y-x)^v$, which are "differentiably connected along D". Here D is supposed to be locally compact.

The proof of our main results 3.7 works with vector fields on non-reduced spaces. Also for use in subsequent papers we first discuss different notions of "vector fields", i. e. of differentiaal operators of first order on X, as well as of operators of higher order: From a more algebraic point of view we introduce k-derivations (following [2]), then also, what is new, weak k-derivations; in addition in case $N=\infty$ one has the sheaf homos $\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ (as **R**-moduli), especially also those which can be lifted locally from $\mathscr{D}^N/\mathscr{J}\to\mathscr{D}^N/\mathscr{J}$ to $\mathscr{D}^N|D\to\mathscr{D}^N|D$. In classical situations all these give the same "differential operators". For spaces this is only true under additional assumptions on X (mostly: standard space) (see § 1) § 2 establishes for standard spaces the equivalence of k-derivations to the definition of operators as sections in the so called tangent space of k-th order of X.

In some sense 3.7 can be extended to non-standard spaces by using results from [5], [7], [8]: First a natural smoothing functor F_2 brings any space X, esp. G, into a closed space $F_2(X)$, exp. $F_2(G)$, which again is a differentiable group ([5], [7]). Then by [7], $F_2(G)$ can uniquely be embedded into a diffbl. group $\bar{G}$ which is a standard space and contains G as a "dense" subgroup. Finally one shows, that the reduction red $\bar{G}$ of $\bar{G}$ is a Lie group ([7], [8]).

3.5 was proved years ago. Since that time, many additional results and applications of the theory of differentiable spaces were established (as those in [7], [8], [12], mentioned above, see also the additional literature at the end) completing the basis of the theory. This paper now is part of this series.

1. Schwache und starke Derivationen. A sei eine kommutative, assoziative R-Algebra mit $1\in A$, R ein Körper, $R\to 1\cdot R\subset A$ injektiv, $R\ni 1\to 1\in A$. $M:=\{m\,|\,m\subset A$ max. Ideal, für welches $R\to A\to A/m$ bijektiv ist$\}$. $M\ni m$ bezeichne zugleich die sog. "Auswertung" $m: A\to A/m \xrightarrow{\sim} R$. $D: A\to A$ sei weiterhin stets als R-linear gegeben.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes, Vol, 16. 1990, p. 166—175.

D i f i n i t i o n 1.1 ([5]): *D heißt (starke) k-Derivation, wenn* $\forall x_i \in A$ *gilt:* $D(x_i)=0$ *im Falle* $k=0$; $D(x_0 \cdots x_i \cdots x_k)=\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s-1}\cdot \sum_{0\leqq j_1<\ldots<j_s\leqq k} x_{j_1}\cdots x_{j_s}\cdot D(x_0\cdots x_k)$ *im Falle* $k\geqq 1$.

B e m e r k u n g 1.2 ([5]): D k-Deriv. $\Leftrightarrow D(x_0\cdots)-x_0 D(\cdot\cdot)-(\cdot\cdot)D(x_0)(k-1)$-Deriv. $\forall x_0\in A \Rightarrow D(R)=0$; $D(I^{k+s})\subset I^s\ \forall I\subset A$ Ideal, $s\in \mathsf{N}$; falls $k=1$: $D(f^v)=v\cdot f^{v-1}D(f)$ $\forall f\in A$ $\forall v\in\mathsf{N}$. Sei weiter fest gegeben: $N\subset M$, $I\subset A$ Ideal, $N/I:=\{m/I \mid m\in N,\ m\supset I\}$.

D e f i n i t i o n 1.3: *$D: A\to A$ lin. heißt schwache k-Derivation bzgl. N, wenn gilt:* $D(R)=0$, $D(m^{k+s})\subset m^s\ \forall m\in N$, $s\in\mathsf{N}$. *$*$-k-Deriv. stehe für k-Deriv. bzw. für schwache k-Deriv.*

B e m e r k u n g 1.4: a) D k-Deriv. $\Rightarrow D$ schwache k-Deriv. b) D $*$-k-Deriv., $D(I)\subset I\Rightarrow D$ induziert $*$-k-Deriv. (resp. bzgl. N/I) $D/I: A/I\to A/I$. c) $D_v: A\to A$ seien $*$-k-Deriv., $a_v\in A\Rightarrow D:=\sum_{v=1}^{s} a_v D_v$ $*$-$(k+t)$-Deriv. $\forall t\in\mathsf{N}\cup\{0\}$. d) D(rep. $\widetilde{D}$): $A\to A$ seien $*$-k (resp. $*$-e)-Deriv. $\Rightarrow \widetilde{D}\circ D$ ist $*$-$(k+e)$ Deriv., $\widetilde{D}+D$ ist $*$-Max(k, e)-Deriv.

L i f t u n g s p r o b l e m: $\widetilde{D}: A/I\frown A/I$ k-Deriv. $\Rightarrow\exists$ k-Deriv. $D: A\to A$ mit $D(I)\subset(I)$, $\widetilde{D}=D/I-\widetilde{D}$ schwache k-Deriv. $\Rightarrow\widetilde{D}$ k'-Deriv.

D e f i n i t i o n 1.5 *$B:=A$ oder A/I.* a) *$\nabla^k B:=B$-Modul der k-Deriv. $B\to B$. $\nabla B:=\bigcup_k \nabla^k B$ B-Algebra der Deriv., mit Komposition als Produkt.* b) $\forall T\subset B$: *$B\cdot T$ sei der von T erzeugte B-Modul, ∇T sei die von T in ∇B erzeugte B-Algebra.* c) *Im Falle $T\subset A$ sei* $T/I:=\{\widetilde{D}\in\nabla(A/I) \mid \exists D\in T$ mit $D(I)\subset I$ und $\widetilde{D}=D/I\}$. d) $\Delta_s^k(A/I)$: *$=(A/I)$-Modul der bzgl. N/I schwachen k-Deriv. $A/I\to A/I$, $\nabla_s(A/I):=(A/I)$-Algebra aller schwachen Deriv. (Komposition als Produkt).*

D e f i n i t i o n 1.7: *A/I heißt t-abgeschlossen — $t\in\mathsf{N}\cup\infty$ —, falls gilt: $\exists N\subset M$ mit:* α) $I\subset \bigcap_{m\in N} m$. β) $I=\bigcap_{m\in N}(m^t+I)$ *falls* $t\in\mathsf{N}$; $I=\bigcap_{s\in\mathsf{N}}\bigcap_{m\in N}(m^s+I)$, *falls* $t=\infty$.

S a t z 1.8: *(Liftungssatz für starke Deriv.) Annahmen:* a) *A/I ∞-abgeschlossen.* b) $\exists x_i\in A$ mit $R\cdot\{x_1-m(x_1),\ldots x_n-m(x_n)\}+m^2=m$ $\forall m\in N$, *N wie in* 1.7. c) $\exists D_i\in\nabla^1 A$ mit $D_i(x_j)=\delta_{ij}$ $\forall i, j=1,\ldots, n$. *Behauptung:*

i) $\nabla^k(A/I)=A\cdot\{D^v:=D_1^{v_1}\circ\cdots\circ D_n^{v_n} \mid 1\leqq|v|\leqq k\}/I$

ii) $D_i\circ D_j=D_j\circ D_i$ $\forall i, j=1,\ldots,n$, falls $\bigcap_{s\subset\mathsf{N}}\bigcap_{m\in M} m^s=0$ ist.

B e w e i s: i) Zu zeigen ist "$\subset$". $D^{\sim}: A/I\to A/I$ sei k-Derivation, $\sim: A\to A/I$, $\exists b_\mu\in A$ mit $b_\mu^{\sim}=D^{\sim}(\widetilde{x}^\mu)$ für $\widetilde{x}^\mu=\widetilde{x}_1^{\mu_1}\ldots\widetilde{x}_n^{\mu_n}$, $1\leqq|\mu|\leqq k$. Wegen Vor. c) ist $D^v x^\mu=\frac{\mu!}{(\mu-v)!}x^{\mu-v}$ $\forall 0<v\leqq\mu$, $=0$ sonst. Jetzt bestimme man sukzessive $a_v\in A$ mit $b_\mu=\sum_{0<v\leqq\mu} a_v D^v x^\mu$, setze $D:=\sum_{1\leqq|v|\leqq k} a_v D^v\Rightarrow\widetilde{D}(\widetilde{x}^\mu)=\widetilde{b}_\mu=D(x^\mu)^{\sim}$ $\forall 1\leqq|\mu|\leqq k$. 1.1 mit Induktion über $|\mu|$ liefert für $\widetilde{D}\in\nabla^k(A/I)$, $D\in\nabla^k(A)$: $\widetilde{D}(\widetilde{x}^\mu)=D(x^\mu)^{\sim}$ $\forall 1\leqq|\mu|$, also $\widetilde{D}(P(x))^{\sim}=D(P(x))^{\sim}$ $\forall P(x)$ "Polynom" über R. Sei $f\in A$, $m\in N$, $s\in\mathsf{N}$. Nach Vor. b) folgt: $\exists T_m^s f$ "Polynom" in x mit $f-T_m^s f\in m^{s+k}\Rightarrow\widetilde{D}(\widetilde{f})-D(f)^{\sim}=\widetilde{D}(\widetilde{f}-T_m^s f^{\sim})-D(f-T_m^s f)^{\sim}\in(m/I)^s$ (1.4.a) $\Rightarrow\widetilde{D}(\widetilde{f})-D(f)^{\sim}\in\bigcap_{s\in\mathsf{N}}\bigcap_{m\in N}(m/I)^s=0$ (∞-abgeschlossen).

ii) $D_i\circ D_j(f)=D_j\circ D_i(f)$ $\forall f=x^\mu$ (vor. c)), dann $\forall f=$Polynom, dann $\forall f\in A$ (Beweis wie eben) q. e. d.

S a t z 1.9: *(Liftungssatz für schwache Derivationen). Annahmen:* a) *A/I t-abgeschlossen,* $t\in\mathsf{N}$ fest. b), c) *gelte wie unter* 1.8.

B e h a u p t u n g: $\nabla_s^k(A/I)\subset A\cdot\{D^v \mid 1\leqq|v|\leqq k':=k+t-1\}/I$, also $\nabla_s(A/I)=\nabla(A/I)$.

B e w e i s: Sei $\tilde{D}$: $A/I \to A/I$ schwache k-Deriv., $\sim: A \to A/I$, $b_\mu \in A$ mit $\tilde{b}_\mu = \tilde{D}(\tilde{x}^\mu)$ $\forall |\mu| \leqq k'$. $\exists\, a_v \in A$ mit $b_\mu = \sum\limits_{1 \leqq |v| \leqq k'} a_v \cdot D^v x^\mu$ $\forall\, 1 \leqq |\mu| \leqq k'$. Setze $D: = \sum\limits_{1 \leqq |v| \leqq k'} a_v \cdot D^v$. $\tilde{D}(\tilde{x}^\mu) = \tilde{b_\mu} = D(x^\mu)^\sim$ $\forall\, 1 \leqq |\mu| \leqq k'$. Also: $\tilde{D}(P(x)^\sim) = D(P(x))^\sim$ $\forall$ "Polynom" $P(x)$ vom Grade $\leqq k'$. Ferner: $\forall\, m \in N$, $|\mu| = k+s$, $s = 1, \ldots, t-1$ folgt: $(m/I)^s \ni \tilde{D}((\tilde{x}-m(x))^\mu) = D((x-m(x))^\mu)^\sim \Rightarrow \sum\limits_{1 \leqq |v| \leqq k'} \tilde{a_v} \cdot D^v (x-m(x))^\mu)^\sim = \sum\limits_{0<v<\mu} \tilde{a_v} \cdot c_v \cdot (\tilde{x}-m(x))^{\mu-v} + \tilde{a_\mu} \cdot c_\mu$, wobei $c_* \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ ist. Mit Induktion über $|v|$ erhält man: $\tilde{a_v} \in \tilde{m}^{|v|-k}$ $\forall k \leqq |v| \leqq k'$. Sei nun $f \in A$, $m \in N \Rightarrow \exists\, T_m^{k'} f$ "Polynom" vom Grade $\leqq k'$, mit $f - T_m^{k'} f \in m^{k'+1} \Rightarrow \tilde{D}(\tilde{f}) - D(f)^\sim = \tilde{D}(\tilde{f} - T_m^{k'} f^\sim) - D(f - T_m^{k'} f)^\sim \in (m^t + I)/I \Rightarrow \tilde{D}(\tilde{f}) - D(f)^\sim \in \bigcap\limits_{m \in N} (m^t + I)/I = 0$ q. e. d.

B e m e r k u n g 1.10: α) Der Beweis zu 1.9 hat von $\tilde{D}$ nur verwendet: $\tilde{D}((m/I)^{k+s}) \subset (m/I)^s$ $\forall\, s \leqq t$. β) A/I ist 1-abgeschlossen genau dann, wenn A/I reduziert ist. γ) Analytische Algebren sind lokal (für diese ist $N = M$ einelementig) und ∞-abgeschlossen (: m — adisch abgeschlossen). Die Voraussetzungen b), c) sind für diese ebenfalls erfüllt ("Koordinaten"). 1.9 enthält also den bekannten analytischen Liftungssatz. δ) Jeder Punkt eines komplexen Raumes $(X, \mathcal{O})$ hat eine Umgebung U derart, daß die Algebra der Schnitte $H^0(U, \mathcal{O})$ t-abgeschlossen ist für ein endliches $t \in \mathrm{N}$, wobei N die Menge der zu U gehörenden maximalen Ideale ist ([8]). Auf komplexen Räumen sind also schwache Deriv. ebenfalls liftbar und stimmen dann mit den starken überein. Man beachte aber:

Beispiel 1.11: 1.9 liftet k-Deriv. zu $(k+t-1)$-Deriv. Diese Graderhöhung ist i. a. unvermeidbar: $A = \mathcal{O} =$ Ring der hol. Fu. -keime in $0 \in \mathrm{C}$, $m \subset \mathcal{O}$ max. Ideal., $I = m^3. \Rightarrow A/I$ ist lokal, also $N = \{m\} = M$, $I \subset m$, $I = \bigcap\limits_{m \in N} (m^t + I)$ mit $t = 3$. D: $A/I \to A/I$, def. durch $az^2 + bz + c \to b$, ist schwache 1-Deriv.: $D(m^2) = 0 \subset m^{2-1}$, $D(m) \subset m^0 = m^{1-1}$. D läßt sich nach 1.9 zu einer $(1+3-1)$-Deriv. $A \to A$ liften. Eine solche findet man nach Konstruktion zu 1.9: $\frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^3}{\partial z^3}$. Es gibt aber keine Liftung der Gestalt $f \frac{\partial}{\partial z} + g \frac{\partial}{\partial z^2}$, wie man durch Testen an z, z^2, z^3 prüft (vgl. auch [4]).

B e m e r k u n g 1.12. Man modifiziere 1.2 wie folgt: D k-Deriv.: $\Leftrightarrow g \to D(f \cdot g) - f \cdot D(g)$ $(k-1)$-Deriv. $\forall f \in A$ und: D 0-Deriv.: $\Leftrightarrow \exists\, a \in A$ mit $D(f) = a \cdot f$ $\forall f \in A$. Man verzichte in 1.3 auf die Forderung $D(R) = 0$. Deriv. $A/I \to A/I$ in diesem Sinne lassen sich dann genau zu den Deriv. $\sum\limits_{|v|=0}^{k} a_v D^v$: $A \to A$ mit $D(I) \subset I$ liften, die zusätzlich den ableitungsfreien Term a_0 enthalten können (und umgekehrt), wenn man unter 1.8, c) und 1.9 noch $D_i(R) = 0$ verlangt.

B e m e r k u n g 1.13. Für C^∞-differenzierbare lokalkompakte Räume $X = (X, \mathcal{A})$ ist $\mathcal{A}$ topologisch abgeschlossen (X also ein Standardraum), genau dann, wenn die R-Algebra $A: = H^0(X, \mathcal{A})$ der globalen "Funktionen" auf X ∞-abgeschlossen ist bzgl. der Menge N seiner maximalen Ideale (Whitneys Spektralsatz). Es gelten also in dem Fall der Liftungssatz 1.8 (wenigstens "lokal") und entsprechend 1.9 (falls X sogar t-abgeschlossen bzgl. N ist für ein endliches $t \in \mathrm{N}$). Mit 1.9 leitet man für entsprechende Räume X (speziell für reduzierte) ab, daß Derivationen auf X "lokal" gerade die R-Garbenhomos $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sind (verallgemeinerter Satz von Peetre, vgl. [ ]).

2. Differentialoperatoren und Tangentialräume k-ter Ordnung zu differenzierbaren Räumen. Im folgenden gehen wir nur von differanzierbaren Räumen aus, die in einem R^n eingebettet sind. Die Übertragung auf beliebige abstrakte Räume liegt auf der Hand. Außerdem beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Differenzierbarkeitsklassen C^∞, C^ω (reellanalytisch), C^{ω^*} (komplexanalytisch). Funktionen in n Variablen fassen wir, wo nötig, identisch als Funktionen in mehreren Variablen auf, R^n ist im Falle C^{ω^*} als C^n zu lesen.

$1(n, k) := \binom{n+k}{k} - 1$ ist die Anzahl der n-Multiindices $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ mit $\nu_i \in \mathsf{N} \cup \{0\}$, $1 \leq |\nu| \leq k$. Wir verwenden diese Indices daher auch zur Kennzeichnung der Komponenten von $y \in \mathsf{R}^{1(n,k)}$.

Sei $\underline{\underline{X}} = (\underline{X}, \underline{X}) = (D, \mathscr{D}^N/\mathscr{I}) \subset \mathsf{R}^n = \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathsf{R}\}$ ein fester N-differenzierbarer Raum, $N = \infty$, ω, ω^*, und $h: X \to Y = (D^*, \mathscr{D}^{*N}/_{\mathscr{I}^*}) \subset \mathsf{R}^m$ differenzierbar ([4]). Sei $F^{(\nu)} := D^\nu F$ mit $D_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D^\nu := D_1^{\nu_1} \circ \cdots \circ D_n^{\nu_n}$.

D e f i n i t i o n und B e m e r k u n g 2.1: (Tangentialräume)

a)
$$\underline{T^k X} := \{(x, y) \mid x \in \underline{X},\ y \in \mathsf{R}^{1(n,k)},\ \sum_{|\nu|=1}^{k} f^{(\nu)}(x) \cdot y_\nu = 0 \ \ \forall f \in \mathscr{I}_x\}$$
$$\downarrow \underline{T^k h}$$
$$\underline{T^k Y} := \{(x^*, y^*) \mid x^* \in \underline{Y},\ y^* \in \mathsf{R}^{1(m,k)},\ \sum_{|\mu|=1}^{k} f^{(\mu)}(x^*)\, y^*_\nu = 0 \quad \forall f \in \mathscr{I}^*_{x^*}\}$$
$$\underline{T^k h}(x, y) = (x^*, y^*) := (H(x),\ d^k H(x)(y)) \text{ für } (x, y) \in \underline{T^k X}.$$

Hier ist H ein Repräsentant von h in $x \in \mathsf{R}^n$ und $d^k H$ ist durch folgende Gleichung definiert:

$$*)\quad \sum_{|\nu|=1}^{k} (g \circ H)^{(\nu)}(x) \cdot y^\nu = \sum_{|\mu|=1}^{k} g^{(\mu)}(x^*) \cdot d^k H(x)(y)_\mu = \sum_{|\mu|=1}^{k} g^{(\mu)}(x^*) \cdot y^*_\mu$$
$$\forall g \in \mathscr{D}^{*N}_{x^*},\ x^* = H(x).$$

b) $\underline{\underline{T^k X}} := {}^k\mathscr{D}^N/{}^k\mathscr{I}$. *${}^k\mathscr{D}^N$ ist hier die zugehörige Strukturgarbe auf* $\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^{1(n,k)}$ und ${}^k\mathscr{I} := (\mathscr{I} + \{\sum_{|\nu|=1}^{k} f^{(\nu)} \cdot y_\nu \mid f \in \mathscr{I}\} \cdot {}^k\mathscr{D}^N$.

c) $T^k X := (\underline{T^k X}, \underline{\underline{T^k X}})$, $T^0 X := X$, *heißt Tangentialraum k-ter Ordnung (k-Tangentialraum)* von X. $T^k_x X := \{(x, y) \mid (x, y) \in \underline{T^k X}\}$ $(= \{y \mid (x, y) \in \underline{T^k X}\}$ *nach Bedarf*)

d) *Die Repräsentanten $(H, d^k H)$ induzieren eine nur von h abhängende differenzierbare Abbildung*
$$T^k h: T^k X \to T^k Y,\ T^0 h := h.$$

e) *Die Zuordnung $T^k: X \dashrightarrow T^k X$, $h \dashrightarrow T^k h$ der Kategorie der eingebetteten N-differenzierbaren Räume in sich ist funktoriell. T^k läßt sich daher auf die Kategorie aller N-differenzierbaren Räume zu einem Funktor ausdehnen.*

f) $T^k \mathsf{R} = \mathsf{R} \times \mathsf{R}^k$ *(die Strukturgarbe schreiben wir nicht mit).*

g) *Die Einbettung* $0^k_{k'}: \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^{1(n,k)} \to \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^{1(n,k)} \times 0 \subset \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^{1(n,k')}$ *für $k \leq k'$ induziert eine Einbettung*
$$0^k_{k'}: T^k X \subset T^{k'} X$$
mit $0 := 0^0_k: X \subset T^k X$ *als "Nullschnitteinbettung".*

h) *Die Projektion* $\pi := \pi^k_0: \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^{1(n,k)} \to \mathsf{R}^n \times 0 \subset \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^{1(n,k')}$ *induziert eine Projektion*
$$\pi: T^k X \to X \textit{ mit } \pi \circ 0 = \mathrm{id}.$$

i) ***Das folgende Diagramm mit $\pi \circ 0^k_{k'} \circ 0 = id$ ist kommutativ:***

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "h"'] & T^kX \arrow[r, "0^k_{k'}"] \arrow[d, "T^kh"] & T^{k'}X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "T^{k'}"] & X \arrow[d, "h"] \\
Y \arrow[r, "0"] & T^kY \arrow[r, "0^k_{k'}"] & T^{k'}Y \arrow[r, "\pi"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Insbesondere sind damit $0^k_{k'}$, π *für beliebige Räume* X *definierbar.* □

Definition und Bemerkung 2.2 (Differentialoperatoren).

a) *Eine differenzierbare Abbildung* $D: X \to T^kX$ mit $\pi \circ D = \mathrm{id}$ *heißt Differentialoperator der Ordnung* $\leq k$ *(k-Differentialoperator) auf* X. *Die Nullschnitteinbettung* 0 *aus* 2.1, g) *gibt den 0-Differentialoperator.*

$$\nabla^k X: = \{D \mid D \text{ ist } k\text{-Differentialoperator auf } X\}.$$

Die Elemente von $\nabla^1 X$ *heißt auch (Tangential-) Vektorfelder oder auch infinitesimale Transformationen auf* X ([1]).

b) *Da* $0^k_{k'}: T^kX \subset T^{k'}X$ *eine Einbettung* mit $\pi = \pi \circ 0^{k'}_{k'}$ *ist, liefert die Zuordnung* $D \dashrightarrow 0^k_{k'} \circ D$ *eine Einbettung* $\nabla^k X \subset \nabla^{k'} X \,\forall\, k \leq k'$. *Das kleinste* k *mit* $D \in \nabla^k X$ *heißt die Ordnung von* D. Sei $\nabla X: = \bigcup_k \nabla^k X$.

c) Sei $\pi_2: T^1\mathsf{R} = \mathsf{R} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ *die Projektion auf die zweite Komponente,* $\pi^k_1: T^k\mathsf{R} = \mathsf{R} \times \mathsf{R}^k \to T^1\mathsf{R} = \mathsf{R} \times \mathsf{R}$ die *Projektion auf die ersten beiden Komponenten. Jede differenzierbare Funktion* $H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}}) \ni f: X \to \mathsf{R}$ *induziert eine differenzierbare Funktion*

$$d^k f: = \pi_2 \circ \pi^k_1 \circ T^k f: T^kX \to T^k\mathsf{R} \to T^1\mathsf{R} \to \mathsf{R}.$$

Entsprechend sei $d^k f$ *für* $f \in \underline{\underline{X}}$ *definiert. Jeder Operator* $D \in \nabla^k X$ *induziert eine* R*-lineare Garbenabbildung* $D: \underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{X}}$ *vermöge* $D(f): = d^k f \circ D$, *die halmweise eine k-Derivation ist. Die damit gegebene Zuordnung*

$$\nabla X \dashrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{R}}(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{X}})$$

bildet ∇X *injektiv ab in die* $H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}})$*-Algebra der* R*-linearen Garbenabbildungen* $\underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{X}}$. *Das Bild ist selbst wieder eine* $H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}})$*-Algebra. Wir identifizieren* ∇X *mit diesem Bild und der zugehörigen Algebrastruktur, deren Produkt wir als "*$\circ$*" schreiben.* □

Beweis: c) Mit $P: T^kX \subset \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^{1(n,k)} \to \mathsf{R}^{1(n,k)}$ erhalten wir eine injektive Abbildung

$$\nabla^k X \ni D \overset{j}{\dashrightarrow} P \circ D \in H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}})^{1(n,k)},$$

wenn wir die Elemente von $H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}})^{1(n,k)}$ als differenzierbare Abbildungen $X \to \mathsf{R}^{1(n,k)}$ auffassen.

Ist $f \in \underline{\underline{X}}_x$, $F \in \mathscr{D}^N_x$ ein lokaler Repräsentant von f, $F^{(\nu)*} \in \underline{\underline{X}}_x$ die Restklasse von $F^{(\nu)}$, so hängt nach Definition von D

$$\sum_{|\nu|=1}^{k} (P \circ D)_\nu f^{(\nu)} := \sum_{|\nu|=1}^{k} (P \circ D)_\nu F^{(\nu)*} \in \underline{\underline{X}}_x$$

nur von d, nicht von der Wahl des Repräsentanten F ab. Setzt man in 2.1.*) etwa $g = \mathrm{id}$, so erkennt man:

$$D(f)=\sum_{|\nu|=1}^{k}(P\circ D)_\nu f^{(\nu)},$$

woraus nun die Behauptungen folgen. □

Wir wollen noch einige andere Beschreibungen von ∇X angeben. $X=(\underline{X}, \underline{\underline{X}})=(D, \mathscr{D}^N/\mathscr{J})\subset \mathrm{R}^n$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\ldots\ldots,\ldots)$ sei die Menge der R-linearen Abbildungen.

S a t z 2.3. *Man hat die folgenden natürlichen Bijektionen:* a) $\nabla^k X \overset{j}{=} \{\varphi \mid \varphi\in H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}})^{1(n,k)}$, *und ist* $\varphi^*\in(\mathscr{D}^N_x)^{1(n,k)}$ *ein lokaler Repräsentant von* φ, *so wird* $\sum_{|\nu|=1}^{k}\varphi^*_\nu f^{(\nu)}\in\mathscr{J}_x$ $\forall f\in\mathscr{J}_x,\ x\in\underline{X}\}$ $D(f)=\Sigma\, j(D)_\nu f^{(\nu)}\ \forall D\in\nabla^k X,\ f\in\underline{\underline{X}}$.

b) $\nabla^k X\simeq\{\varphi \mid \varphi\in H^0(D, \mathscr{D}^N)^{1(n,k)},\ \sum_{|\nu|=1}^{k}\varphi_\nu f^{(\nu)}\in\mathscr{J}\ \forall f\in\mathscr{J}\}/H^0(D, \mathscr{J})^{1(n,k)}\simeq H^0(D, \mathscr{D}^N)\cdot\{D^\nu \mid 1\leq|\nu|\leq k\}/H^0(D, \mathscr{J})$*-gemäß* 1.5) —, *falls* $N=\infty$.

c) $\nabla^k X\simeq\{D \mid D\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}}), H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}}))$ *ist eine k-Derivation*$\}$, *falls* $N=\infty$ *und X ein Standardraum ist.*

d) $\nabla^k X\simeq\{D \mid D\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{X}})$, *und D ist halmweise eine k-Derivation* $D\colon \underline{\underline{X}}_x\to\underline{\underline{X}}_x\}$, *falls* $N={}_{\omega,\omega^*}$ *oder falls* $N=\infty$ *und X ein Standardraum ist.*

e) $\nabla^k X\simeq\{D \mid D\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{X}}),\ D(R)=0,\ D_x(m_x^{k+1})\subset m_x\ \forall x\in\underline{X},\ m_x\subset\underline{\underline{X}}_x$ *maximales Ideal*$\}$, *falls X reduziert ist.*

f) $\nabla^k X$ *ist ein* $H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}})$*-Modul,* ∇X *eine* $H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}})$*-Algebra,* $\nabla^1 X$ *ist eine Lie-Algebra mit* $[D, D^*]:=D\circ D^*-D^*\circ D$ *als Produkt.* □

B e w e i s: a) Die oben angegebene Abbildung $j\colon \nabla^k X\to H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}})^{1(n,k)}$ liefert die Bijektion. b) Die erste Bijektion $\simeq$ gilt wegen a) und der Isomorphie

$$H^0(D, \mathscr{D}^\infty/\mathscr{J})^{1(n,k)}\simeq H^0(D, \mathscr{D}^\infty)^{1(n,k)}/H^0(D, \mathscr{J})^{1(n,k)}.$$

Zum Beweis der zweiten Isomorphie sei $A:=H^0(D, \mathscr{D}^\infty)$, $I:=H_0(D, \mathscr{J})$. Man hat: $A^{1(n,k)}\simeq A\cdot\{D^\nu \mid 1\leq|\nu|\leq k\}$ und

$$D(I)\subset I\Leftrightarrow D(\mathscr{J})\subset\mathscr{J}\ \forall D=\Sigma a_\nu D^\nu\subset A\cdot\{D^\nu \mid 1\leq|\nu|\leq k\},$$

weil die Einschränkung $I\to\mathscr{J}_x$ surjektiv ist (Partition der 1). Man hat also eine durch obige Isomorphie gegebene Abbildung

$$\{\varphi \mid \varphi\in A^{1(n,k)},\ \Sigma\,\varphi_\nu\cdot f^{(\nu)}\in\mathscr{J}\ \forall f\in\mathscr{J}\}\to A\cdot\{D^\nu \mid 1\leq|\nu|\leq k\}/I,$$

die surjektiv ist. Ihr Kern ist $I^{1(n,k)}$, da

$$(\Sigma\, a_\nu D^\nu)(x^\mu)\in I\ \forall\mu\Leftrightarrow\forall a_\nu\in I \text{ (Beweis zu 1.8)}\Rightarrow \text{q. e. d.}$$

c) Es ist $H^0(D, \mathscr{D}^\infty/\mathscr{J})\simeq A/I$ und $\bigcap_{x\in D,\ s\in\mathrm{N}}(m_x^s+I)=I$, wobei $m_x\subset A$ das zu $x\in D$ gehörende maximale Ideal ist. (Satz von Whitney über abgeschlossene Ideale, [10]). Also wird:

$$\begin{aligned}\nabla^k X &\simeq A\cdot\{D^\nu \mid 1\leq|\nu|\leq k\}/I && \text{(nach 2.3, b))}\\ &\simeq\{D \mid D\colon A/I\to A/I \text{ ist } k \text{ Derivation}\} && \text{(Satz 1.8).}\end{aligned}$$

d) Wir haben die natürliche Injektion (2.2, c))

$$\nabla^k X\overset{i}{\Rightarrow}\{D \mid D\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{X}}) \text{ ist halmweise } k\text{-Derivation}\}.$$

Sei nun $D^* \in \{\cdots\}$, $\sim : \mathscr{D}^N \to \mathscr{D}^N/\mathscr{J} \Rightarrow \exists!\ a_\nu \in H^0(\underline{X}, \underline{\underline{X}})$ mit

$$D^*(x^{\mu\sim}) =: b_\mu = \sum_{|\nu|=1}^{k} a_\nu (D^\nu x^\mu)^\sim \ \forall\, 1 \leq |\mu| \leq k \text{ (1.8, Beweis).}$$

Wegen $\bigcap_{x \in U\ s \in \mathrm{N}} (m_x^s + H^0(U, \mathscr{J})) = H^0(U, \mathscr{J})\ \forall\, U \subset$ offen $\underline{X}$ folgt:

$$D^*(f^\sim) = \sum_{|\nu|=1}^{k} a_\nu f^{(\nu)\sim}\ \forall\, f \in H^0(U, \mathscr{D}^N),$$

insbesondere: $0 = \Sigma\, a_\nu f^{(\nu)\sim}\ \forall\, f \in H^0(U, \mathscr{J})$, also $(\ldots, a_\nu, \ldots) \in j(\nabla^k X)$, also $i(\nabla^k X) \ni D^*$ q. e. d.

e) folgt entsprechend unter Benutzung von 1.9.

f) Die ersten Behauptungen sind schon in 2.2, c) enthalten, die letzte folgt mit § 1. q. e. d. □

Lokalisiert man die bisher nur global eingeführten Begriffe Derivation uud Differentialoperator, so erhält man

1. die $\underline{X}$-Garbe $\underline{\underline{\nabla^k X}}$ der Keime von Differentialoperatoren auf X der Ordnung $\leq k$;
2. die R-Algebra-Garbe $\underline{\underline{\nabla X}}$ der Keime von Differentialoperatoren auf X;
3. die Lie-Algebra-Garbe $\underline{\underline{\nabla^1 X}}$ der Keime von Vektorfeldern auf X.

3. Vektorfelder auf differenzierbaren Gruppen. Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen. X, Y seien N-differenzierbare Räume in Zahlenräumen wie in § 2; h: $X \to \widetilde{X}$, k: $Y \to \widetilde{Y}$ seien differenzierbare Abbildungen, $N = \infty, \omega, \omega^*$.

B e m e r k u n g 3.1: a) $T^1X \times T^1Y \cong T^1(X \times Y)$, b) $T^1(h \times k) = T^1h \times T^1k$, wenn wir die Isomorphie unter a) als Identität schreiben.

B e w e i s: a) $T^1(X \times Y) = \{(x, x^*, y, y^*) \mid x \in \underline{X},\ x^* \in \underline{Y},\ \sum_{|\nu|=1} \frac{\partial^\nu}{\partial(x, x^*)^\nu} f(x, x^*) \cdot (y, y^*)_\nu = 0\ \forall\, f \in (\mathscr{J} + \mathscr{J}^*)\mathscr{D}^N\} \cong \{(x, y, x^*, y^*) \mid x \in \underline{X},\ x^* \in \underline{Y},\ \sum_i f_{x_i} y_i = 0,\ \Sigma\, g_{x_j^*} y_j^* = 0\ \forall\, f \in \mathscr{J},$ $g \in \mathscr{J}^*\} = T^1X \times T^1Y \Rightarrow T^1(X \times Y) \cong (T^1X \times \widetilde{T}^1Y, \mathscr{D}^N/\widetilde{\mathscr{J}})$ mit $\widetilde{\mathscr{D}}^N$ als Garbe auf dem $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ und mit

$$\widetilde{\mathscr{J}} = (\mathscr{J} + \mathscr{J}^* + \{\Sigma f_{x_i} y_i \mid f \in \mathscr{J}\} + \{\Sigma\, g_{x_j^*} y_j^* \mid g \in \mathscr{J}^*\} \cdot \widetilde{\mathscr{D}}^N,\quad T^1(X \times Y) \cong T^1X \times T^1Y.$$

b) ist damit auch klar.

B e m e r k u n g 3.2: Man hat in natürlicher Weise Lie-Unteralgebren:

$$\nabla^1 X,\ \nabla^1 Y \subset \nabla^1(X \times Y) \supset (\nabla^1 X + \nabla^1 Y) \text{ mit } [\nabla^1 X, \nabla^1 Y] = 0.$$

B e w e i s: Sei $\nabla^1 X \ni D$: $X \to T^1X$, 0: $Y \to T^1Y$ der Nullschnitt. $D \times 0$: $X \times Y \to T^1X \times T^1Y = T^1X \times Y$ gibt $D \times 0 \in \nabla^1(X \times Y)$. Durch $D \dashrightarrow D \times 0$ erhalten wir einen injektiven Lie-Algebra-Homomorphismus $\nabla^1 X \subset \nabla^1(X \times Y)$ (man verwende etwa 2.3, a)). Der Rest ist klar.

B e m e r k u n g 3.3: Jeder Diffeomorphismus f: $X \to Y$ induziert einen Lie-Algebra Isomorphismus $f^*: \nabla^1 X \to \nabla^1 Y$ vermöge

$$f^*(D) := T^1 f \circ D \circ f^{-1}\ \forall\, D \in \nabla^1 X.$$

B e w e i s: $\nabla^1 Y \ni T^1 f \circ D \circ f^{-1}$: $Y \to X \to T^1X \to T^1Y$ ist klar.

$$[f^*(D), f^*(D^*)] = [T^1 f \circ D \circ f^{-1}, T^1 f \circ D^* \circ f^{-1}] = T^1 f \circ [D, D^*] \circ f^{-1} = f^*([D, D^*])$$

gilt 1. für den klassischen Fall $X = \mathrm{R}^n$; 2. für den Fall $X \subset \mathrm{R}^n$, Einbdim ${}_{x^0}X = n$ in der Nähe von x_0, wie man mit 1. folgern kann, dann auch 3. allgemein.

Definition und Bemerkung 3.4. Sei $f\colon X \to X$ ein Diffeomorphismus. $D \in \nabla^1 X$ heißt f invariant, falls $f^*(D)=D$. Die f-invarianten Elemente $D \in \nabla^1 X$ bilden eine Lie-Unteralgebra, ebenso die bezüglich aller f einer Familie von Diffeomorphismen invarianten D.

Beweis: $f^*(D)=D,\ f^*(D^*)=D^* \Rightarrow f^*([D, D^*])=[f^*(D), f^*(D^*)]=[D, D^*]$ q. e. d.

Im weiteren sei (G, μ, e, ι) eine feste N-differenzierbare Gruppe, $N=\infty, {}_{\omega,\omega^*}$ mit $\mu\colon G\times G \to G$ als Produkt, $e \in G$ als Einselement, $\iota\colon G \to G$ als Inversion. $\forall p \in G$ haben wir Diffeomorphismen:

$$\mu_p\colon G \to G\times p \subset G\times G \xrightarrow{\mu} G \quad \text{(Rechtsmultiplikation)}$$

$$p^\mu\colon G \to p\times G \subset G\times G \xrightarrow{\mu} G \quad \text{(Linksmultiplikation).}$$

Definition 3.5. *$D \in \nabla^1 G$ heißt linksinvariant, falls $D\circ\mu = T^1\mu\circ(0\times D)$ gilt, rechtsinvariant, falls $D\circ\mu = T^1\mu\circ(D\times 0$ gilt), wobei $0\colon G \to T^1 G$ der Nullschnitt ist. Sei $\nabla^1_l(G)\colon =\{D \mid D \in \nabla^1$ G* ist linksinvariant$\}$.

Satz 3.6: a) $\nabla^1_l G \subset \nabla^1 G$ *ist eine Lie-Unteralgebra.* b) *Der durch ${}_p\mu$ induzierte Lie-Algebra-Isomorphismus ${}_p\mu^*\colon \nabla^1 G \to \nabla^1 G$ läßt $\nabla^1_l G$ fest.* c) *Der Einsetzungshomomorphismus (bezüglich der Vektorraumstrukturen)* $p\colon \nabla^1_l G \to \mathcal{J}\rho_p G$ mit $p(D)\colon = D(p)$ *ist bijektiv $\forall p \in G$. Wir versehen $\mathcal{J}\rho_p G$ mit der durch diesen Isomorphismus von $\nabla^1_l G$ induzierten Lie-Algebra-Struktur.* (3. *gilt entsprechend für rechtsinvariante Vektorfelder.*)

Beweis: a) Mit $\pi\colon G\times G \to G$ als Projektion auf die erste Komponente ist $\pi\times\mu\colon G\times G \to G\times G$, wie man zeigt, ein Diffeomorphismus. Es gilt: $D \in \nabla^1_l G \Leftrightarrow D\circ\mu = \tilde{T}^1\mu \circ(0\times D) \Leftrightarrow$

$$(0\times D)\circ(\pi \underset{\sim}{\times} \mu) = T^1(\pi \underset{\sim}{\times} \mu)\circ(0\times D).$$

Also: D ist linksinvariant $\Leftrightarrow 0\times D$ ist $(\pi\times\mu)$-invariant. Die Menge der letzteren Elemente bildet aber eine Lie-Algebra mit $\tilde{[,]}$ als Produkt. Wegen

$$[0\times D,\ 0\times D^*] = 0\times[D, D^*]\ \forall D,\ D^* \in \nabla^1 G$$

ist daher auch $\nabla^1_l G$ eine Lie-Algebra. b) Wegen $D\circ\mu = T^1\mu\circ(0\times D)$ sind folgende Morphismen einander gleich:

$$G \to p\times G \to G\times G \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{D} T^1 G$$

$$G \to p\times G \to G\times G \xrightarrow{0\times D} T^1G\times T^1 G \xrightarrow{T^1\mu} T^1 G$$

$$G \xrightarrow{D} T^1 G \to p\times T^1 G \to T^1G\times T^1G \xrightarrow{T^1\mu} T^1 G$$

$$G \xrightarrow{D} T^1 G \xrightarrow{T^1 p^\mu} T^1 G,$$

also $D\circ{}_p\mu = T^1\,{}_p\mu\circ D$ q. e. d. c) 0. E. sei $p=e$. **e** ist injektiv: Sei $D \in \nabla^1_l G$, $D(e)=0$. Folgende Morphismen sind einander gleich: $G \xrightarrow{0} T^1 G$,

$$G \to G\times e \to G\times G \xrightarrow{0\times D} T^1G\times T^1G \xrightarrow{T^1\mu} T^1 G,$$

$$G \to G\times e \to G\times G \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{D} T^1 G,$$

$$G \xrightarrow{D} T^1 G. \quad \text{q. e. d.}$$

e ist surjektiv: Für $v \in g_e G$ sei

$$\pi_v: G \to v \subset g_e G \subset T^1 G,$$

bzw.
$$G \times G \to v \subset T g_e G \subset T^1 G$$

$$D: = v^*: G \xrightarrow{0 \times \pi v} T^1 G \times T^1 G \xrightarrow{T^1 \mu} T^1 G.$$

Offenbar ist $D \in \nabla^1 G$ und $D(e) = v$. D ist linksinvariant, da die folgenden Morphismen jeweils einander gleich sind:

$$G \times G \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow[\sim]{0 \times \pi v} T^1 G \times T^1 G \xrightarrow{T^1 \mu} T^1 G$$

$$G \times G \xrightarrow[\sim]{(0 \times 0) \times \pi v} (T^1 G \times T^1 G) \times T^1 G \xrightarrow{T^1 \mu \times \mathrm{id}} T^1 G \times T^1 G \xrightarrow{T^1 \mu} T^1 G$$

$$G \times G \xrightarrow[\sim]{0 \times (0 \times \pi v)} T^1 G \times (T^1 G \times T^1 G) \xrightarrow{\mathrm{id} \times T^1 \mu} T^1 G \times T^1 G \xrightarrow{T^1 \mu} T^1 G$$

$$G \times G \xrightarrow{0\ D} T^1 G \times T^1 G \xrightarrow{T^1 \mu} T^1 G \quad \text{q. e. d.}$$

Satz 3.7: *G sei eine N-differenzierbare Gruppe, $N = \infty, \omega, \omega^*$, $n = \text{Einbdim}\ {}_e G$. Dann ist in einer Umgebung $U(e)$*

$$G \mid U(e) \cong (D, \mathscr{D}^N / \mathscr{I}) \subset \mathrm{R}^n,$$

und für jede solche Darstellung gilt:

1. *$\mathscr{I}_p$ enthält $\forall p \in D$ nur platte Funktionen.*
2. *$\mathscr{I} \equiv 0$, falls $N = \omega, \omega^*$.*
3. *Falls $N = \infty$ und G als differenzierbarer Raum A_2 erfüllt, ist G ein Whitney-Raum.*

Beweis 2: folgt sofort aus 1.; 3. folgt aus 1. und Whitneys Charakterisierung abgeschlossener Ideale.

1.: Es gibt stets eine Darstellung $G \mid U(e) \cong (D, \mathscr{D}^N / \mathscr{I}) \subset \mathrm{R}^n$ mit $n = \text{Einbdim}_e G$. Sei $e = 0 \in \mathrm{R}^n$. Nach 3. gibt es zu jedem $v \in T g_0 G = T g_0 \mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ ein $V \in \nabla_i^1 G$ mit $V(e) = v$. Wir denken uns V als Abbildung $V: U(e) \to \mathrm{R}^n$ realisiert. Dann gilt für die Abbildung in Richtung von V:

$$V(f) = \Sigma V_j \cdot f_{x_j} \in \mathscr{I}\ \forall f \in \mathscr{I}$$

$$V^{(n)}(f) := V(V^{(n-1)}(f)) \in \mathscr{I}\ \forall f \in \mathscr{I},\ n \in \mathrm{N},$$

also:
$$V^{(n)}(f)(0) = 0\ \forall n \in \mathrm{N},\ f \in \mathscr{I}_0,\ V \in \nabla_i^1 G \cong T g_e G.$$

Daraus folgt leicht: f ist platt in 0 q. e. d. Der folgende Satz ist Spezialfall eines Satzes über Transformationsgruppen. Wir geben daher hier keinen Beweis:

Satz 3.8: h: $G \to G^*$ sei ein Homomorphismus N-differenzierbarer Gruppen, $N = \infty, \omega, \omega^*$. $\Rightarrow$ Das Differential $dh(e)$: $T g_e G \to T g_{e^*} G$. ist ein Lie-Homomorphismus.

LITERATUR

1. W. Kaup. Infinitesimale Transformationsgruppen komplexer Räume. *Math. Ann.* **160**. 1965, 72—92.
2. Y. Nakai. High Order Derivations I. *Osaka J. Math.*, 7, 1970, 1—17.
3. H. Osborn. Modules of Differentials. I. *Math. Ann.*, **170**, 1967, 221—244.
4. K. Spallek. Differenzierbare Räume. *Math. Ann.*, **180**, 1969, 269—296.
5. K. Spallek. Glättung differenzierbarer Räume. *Math. Ann.*, **186**, 1970, 233—248.
6. K. Spallek. Beispiele zur lokalen Theorie der differenzierbaren Räume. *Math. Ann.* **195**, 1972, 332—347.
7. K. Spallek. Zur Klassifikation differenzierbarer Gruppen. *Manuscripta Mathematica*, **11**, 1974, 345—357.
8. K. Spallek. Stetige Transformationsgruppen auf differenzierbaren Räumen. Preprint.
9. J. C. Tougeron. Ideaux de fonctions differentiables. Ergebnisse der Mathematik, 71.
10. H. Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**, 1934, 63—89.
11. H. Whitney. On ideals of differentiable functions. *Amer. J. Math.*, **70**, 1948, 635—658.

Weitere Arbeiten zum Themenkreis als Ergänzung:

12. K. Spallek. Geometrische Bedingungen für die Integrabilität von Vektorfeldern auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. *Manuscripta math.*, **25**, 1978, 148—160.
13. K. Spallek. Produktzerlegung und Äquivalenz komplex-analytischer Raumkeime I. Complex Analysis. Fifth Romanian-Finnish Seminar 81. *Lecture Notes*, **1014**, 1983, 78—100.
14. K. Spallek. Produktzerlegung und Äquivalenz von Raumkeimen II. *Lecture Notes*, **1014**, 1983, 101—111.
15. K. Spallek. Differential Operators (Derivations) on Singularities. Complex Analysis and Applications. Varna 83. Sofia, 1985, 208—217.
16. K. Spallek. Foliations on Singularities. Complex Analysis and Applications 85. Sofia, 1988, 643—657.
17. K. Reichard, K. Spallek. Product singularities and quotients. *Lecture Notes Math.*, **1345**, 1988, 256—271.
18. K. Spallek. Fortsetzungen von Blätterungen und Integration beliebiger Verteilungen. Complex Analysis. Seventh Romanian-Finnish-Seminar. *Lecture Notes*, 1989.
19. K. Spallek. Differentiability implies analyticity on analytic and semianalytic spaces. Complex Analysis and Applications 87. Sofia, 1990.

Fakultät für Mathematik
Ruhr Universität Bochum
Universitätsstr. 150
D-4630 Bochum 1
West Germany

Received 4. 11. 1989