Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

О РАВНОСХОДИМОСТИ РЯДОВ ЭРМИТА

ГЕОРГИ Е. КАРАДЖОВ

Получены новые результаты о равносходимости рядов Эрмита, обобщающие соответствующие теоремы Сеге [1]. Основная идея связана с асимптотикой спектральной функции $e(\lambda, x, y)$ одномерного гармонического осциллятора при $\lambda \to +\infty$, которая равномерна относительно параметров x, y, меняющихся на всей вещественной прямой.

0. Введение. Рассмотрим ряд Эрмита

$$f(y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(y), \quad a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y) H_n(y)\, dy$$

и его n-ую частичную сумму

$$s_n(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(y),$$

где $\{H_k\}_{k=0}$ суть нормированные полиномы Эрмита.

В [1] Сеге доказал следующую теорему о равносходимости рядов Эрмита:

Теорема А. *Если $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и выполнено условие*

$$(S_1) \qquad \int_{|x|>n} e^{-x^2/2} |x|^{-5/3} |f(x)|\, dx = 0(n^{-1}), \quad n \to \infty,$$

то для любого $\delta > 0$,

$$(1) \qquad s_n(y) - \frac{1}{\pi} \int_{y-\delta}^{y+\delta} f(x) \frac{\sin \sqrt{2n}(x-y)}{x-y}\, dx = 0(1), \quad n \to +\infty,$$

локально равномерно относительно параметра $y \in \mathbb{R}$.

Результат сохраняется, если условие (S_1) заменено следующим условием:

$$(S_2) \qquad \int_{|x|>1} e^{-x^2/2} |x|^{-1} |f(x)|\, dx < \infty, \quad \int_{|x|>n} e^{-x^2} x^{-4} |f(x)|^2\, dx = 0(n^{-3}), \quad n \to \infty.$$

Цель данной работы доказать следующие обобщения теоремы А:

Теорема 1. *Если $f \in L^1_{\mathrm{loc}}/\mathbb{R})$ и функция $g(x) = e^{-x^2/2} f(x)$ удовлетворяет предположениям:*

$$(H_1) \qquad \int_{|x|>1} |x|^{-1} |g(x)|\, dx < \infty;$$

$$(H_2) \qquad \int a(\lambda, x)(1 - x^2/\lambda)^{-1/4} |g(x)|\, dx = 0(\lambda^{1/2}), \quad \lambda \to +\infty,$$

где $a(\lambda, x)$ — характеристическая функция множества $\{x : \lambda/2 < x^2 < \lambda - \lambda^{1/3+\varepsilon/2}\}$, $\varepsilon > 0$;

$$(H_3) \qquad \int b(\lambda, x) |g(x)|\, dx = 0(\lambda^{1/3}), \quad \lambda \to +\infty,$$

где $b(\lambda, x)$ — характеристическая функция множества $\{x : \lambda - \lambda^{1/3+2\varepsilon} < x^2 < \lambda + \lambda^{1/3+\varepsilon}\}$, то имеет место утверждение (1) *о равносходимости.*

Замечание 1. Легко увидеть, что условие (S_1) влечет (H_1) — (H_3), а из (S_2) вытекают (H_1), (H_2), и следующее, более жесткое, чем (H_3), условие: $\int b(\lambda, x)$

Сердика Българско математическо списание. Том 16, 1990, с. 217—229.

$\cdot |g(x)|dx = 0(\lambda^{1/6+2\varepsilon})$. Отметим также, что предположение (H_3) неулучшаемо по отношению к степени 1/3 в правой части. Действительно, оно удовлетворяется функцией $g(x)=|x|^\alpha$ при любом $\alpha<1$ (выбирая $\varepsilon<(1-\alpha)/4$) и не удовлетворяется функцией $g(x)=|x|$. С другой стороны, как известно [1], для функции $f(x)=xe^{x^2/2}$ ряд Эрмита расходится. Что касается условий (H_1) и (H_2), то они удовлетворены только при $\alpha<0$. Так как функция $g(x)=|x|^\alpha$ дифференцируема при $x\neq 0$, то возникает вопрос можно ли в классе функций $f(x)$, обладающих производной при $x^2>A$ для некоторого $A>0$, ослабить условия (H_1) и (H_2) так, чтобы они удовлетворялись функцией $g(x)=|x|^\alpha$ при $\alpha<1$? Имеет место

Теорема 2. *Если $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathrm{R})$, существует производная $f'(x)$ при $x^2>A$ для некоторого $A>0$ и функция $g(x)=e^{-x^2/2}f(x)$ удовлетворяет (H_3) и предположениям*

$$(H_1') \qquad \int_{x^2>A} |x|^{-2}|g'(x)|dx<\infty,$$

$$(H_2') \qquad \int a(\lambda,\ x)(1-x^2/\lambda)^{-1/4}|x|^{-2}|g'(x)|dx=0(1),\quad \lambda\to+\infty,$$

то верно утверждение (1) *о равносходимости.*

Пример. Функция $g(x)=|x|^\alpha$, $\alpha<1$ имеет свойства (H_1'), (H_2') и (H_3).

Замечание 2. Условие существования производной для функции $f(x)$ в теореме 2 можно заменить на требование ее абсолютной непрерывности.

Основная идея доказательства теорем 1 и 2 связана с формулой

$$(2) \qquad s_n(y)=\int e^{y^2/2-x^2/2}f(x)\,e(2n+1,\ x,\ y)\,dx,$$

где

$$e(\lambda,\ x,\ y)=\exp(-x^2/2-y^2/2)\,\Sigma\, H_k(x)H_k(y),\quad 0\leq k\leq(\lambda-1)/2$$

представляет собой спектральную функцию оператора $A=-d^2/dx^2+x^2$ в $L^2(\mathrm{R})$. Теперь ясно, что достаточно найти асимптотику функции $e(\lambda,\ x,\ y)$ при $\lambda\to+\infty$, равномерную относительно параметров $x,\ y\in\mathrm{R}$. Применяемый метод позволяет в сущности найти полную асимптотику спектральной функции.

План статьи следующий. В § 1 формулируются полученные результаты об асимптотике спектральной функции $e(\lambda,\ x,\ y)$. Все доказательства проводятся в § 2.

1. Асимптотика спектральной функции. Более удобно выписывать асимптотику функции

$$(3) \qquad E(\lambda,\ x,\ y)=e(\lambda,\ \sqrt{\lambda}\,x,\ \sqrt{\lambda}\,y)\quad \text{при}\quad \lambda\to+\infty.$$

Теорема 3 (случай $|x^2-1|\leq\delta_1$, $|y^2-1|\geq\delta_2$). *Для любого $\delta_2>0$ существует число $\delta_1>0$ такое, что имеет место асимптотика*

$$(4) \qquad E(\lambda,\ x,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_{1k}(\lambda,\ x,\ y)\lambda^{-k-1/3}+b_{1k}(\lambda,\ x,\ y)\lambda^{-k-2/3}),\quad \lambda\to+\infty,$$

равномерно в области $\{(x,\ y):|x^2-1|\leq\delta_1,\ |y^2-1|\geq\delta_2\}$, где

$$a_{1k}=(a_k e^{\lambda A}+c_k e^{\lambda\bar{A}})\,Ai(\lambda^{2/3}B),\quad b_{1k}=(b_k e^{\lambda A}+d_k e^{\lambda\bar{A}})\,Ai'(\lambda^{2/3}B),$$

причем функции $\lambda\to a_k(\lambda,\ x,\ y)$, $\lambda\to b_k(\lambda,\ x,\ y)$, $\lambda\to c_k(\lambda,\ x,\ y)$, $\lambda\to d_k(\lambda,\ x,\ y)$ и их производные по x ограничены, а $Ai(s)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i(s\sigma+\sigma^3/3)}d\sigma$ — функция Эйри. Далее,

$$(5) \qquad A=A(x,\ y)=\frac{1}{2}(\varphi(p_+,\ x,\ y)+\varphi(p_-,\ x,\ y)),$$

и

(6) $$B=B(x, y)=\left[\frac{3}{4}(\varphi(p_+, x, y)-\varphi(p_-, x, y))\right]^{2/3},$$

где

(7) $$\varphi(p, x, y)=p-(x^2/2+y^2/2)\,cth\,2p+xy/sh\,2p,$$

а функции $p_\pm$ *выбираются следующим образом:*

Если $y^2\leqq 1-\delta_2$, *то*

(8) $$p_\pm=it_\pm,\ \cos 2t_\pm=xy\mp\omega,\quad 0<t_\pm<\pi/2\quad \text{при}\ x^2<1,$$

где $\omega=[(1-x^2)(1-y^2)]^{1/2}$ *с главным значением радикала;*

(9) $$p_\pm=\pm\varepsilon+it,\ ch\,2\varepsilon=|x|,\ \varepsilon>0,\quad \cos 2t=|y|\operatorname{sgn}(xy),\quad 0<t<\pi/2\quad \text{при}\ x^2>1;$$

Если $y^2\geqq 1+\delta_2$, *то*

(10) $$p_\pm=\varepsilon\pm it,\ ch\,2\varepsilon=|y|,\quad \cos 2t=|x|,\quad \varepsilon>0,\quad 0<t<\pi/2\quad \text{при}\ xy>0,\ x^2<1,$$

(11) $$p_\pm=\varepsilon_\pm,\ ch\,2\varepsilon_\pm=xy\pm\omega,\quad \varepsilon_\pm>0\quad \text{при}\ xy>0,\ x^2>1$$

и

(12) $$p_\pm=\varepsilon+i\left(\frac{\pi}{2}\pm t\right),\ ch\,2\varepsilon=|y|,\ \cos 2t=|x|,\ \varepsilon>0,\quad 0<t<\pi/2\quad \text{при}\ xy<0,\ x^2<1$$

(13) $$p_\pm=\varepsilon_\pm+i\pi/2,\ ch\,2\varepsilon_\pm=-xy\pm\omega,\ \varepsilon_\pm>0\quad \text{при}\ xy<0,\ x^2>1.$$

Замечание 3. Функция $B(x, y)$ — гладкая со свойствами:

(14) $$B(x, y)>0\quad \text{при}\ x^2>1\ \text{и}\ B(x, y)<0\quad \text{при}\ x^2<1,$$

(15) $$B(x, y)=-2^{1/3}(1\pm x)(1+0(|1\pm x|)),\ \text{если}\ x\to\pm 1\ \text{соответственно, и}$$

(16) $$\operatorname{Re}A(x, y)=0,\ \text{если}\ y^2\leqq 1-\delta_2;\ \operatorname{Re}A(x, y)<0,\ \text{если}\ y^2\geqq 1+\delta_2.$$

Главные коэффициенты a_0 и b_0 в асимптотике (4) можно выписать явно:

Если $y^2\leqq 1-\delta_2$, то

(17) $$a_0(\lambda, x, y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(g_1(\lambda, p_+)+g_1(\lambda, p_-)),$$

(18) $$b_0(\lambda, x, y)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(g_2(\lambda, p_+)-g_2(\lambda, p_-)).$$

Если $y^2\geqq 1+\delta_2$, то a_0 и b_0 определяются формулами (17) и (18) при условии, что в правой части приписан множитель $1/2$. Здесь

$$g_1(\lambda, p)=\operatorname{Re}\{(B^{1/2}/\omega)^{1/2}h(\lambda, p)\,e^{\lambda A}(sh\,p)^{-1}\},$$

$$g_2(\lambda, p)=\operatorname{Re}\{(B^{1/2}\omega)^{-1/2}h(\lambda, p)\,e^{\lambda A}(sh\,p)^{-1}\}.$$

Функция $s\to h(s, p)$ является 2-периодической и $h(s, p)=e^{-sp}$, если $0\leqq s<2$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 3, если* $1-\delta_1<x^2<1-\lambda^{-2/3+2\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, $y^2<x^2/2$, *то*

(19) $$E(\lambda, x, y)=\lambda^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k\geq 0}a_{kj}(\lambda^{2/3}(1-x^2))^{-3k/2}\right)e^{i\lambda\psi_j}+O(\lambda^{-2-1/3}),$$

где

(20) $$i\psi_1(x, y)=\varphi(p_+(x, y), x, y),\ i\psi_2(x, y)=\varphi(p_-(x, y), x, y),\ \psi_3=-\psi_1,\ \psi_4=-\psi_2$$

и коэффициенты $a_{kj}(\lambda, x, y)$ — гладкие по x, y и ограниченные по λ функции, вместе с производными по x.

Теорема 4 (случай $x^2 \geqq 1+\delta_1$, $|y^2-1| \geqq \delta_2$). *Для любых $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ выполнена асимптотика*

$$E(\lambda, x, y)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda, x, y)\,\lambda^{-1/2-k}, \quad \lambda \to +\infty, \tag{21}$$

равномерно в области $\{(x, y): x^2 \geqq 1+\delta_1, |y^2-1| \geqq \delta_2\}$, *где*

$$a_k(\lambda, x, y)=(x^2-1)^{-1/4}\, e^{\lambda\varphi(p(x, y), x, y)}\, a_{1k}(\lambda, x, y), \tag{22}$$

функции $a_{1k}(\lambda, x, y)$ — ограниченные по λ и гладкие по (x, y), а функция $p(x, y)$ определяется следующим образом:

Если $y^2 \leqq 1-\delta_2$, то

$$p(x, y)=\varepsilon+it, \; ch\, 2\varepsilon=|x|, \; \cos 2t=|y|\operatorname{sgn}(xy), \; \varepsilon>0, \; 0<t<\pi/2; \tag{23}$$

Если $y^2 \geqq 1+\delta_2$, то

$$p(x, y)=\varepsilon, \; ch\, 2\varepsilon=xy+\omega, \; \varepsilon>0 \quad \text{при } xy>0, \tag{24}$$

$$p(x, y)=\varepsilon+i\pi/2, \; ch\, 2\varepsilon=-xy+\omega, \; \varepsilon>0 \quad \text{при } xy<0. \tag{25}$$

Замечание 4. Главный коэффициент a_0 в асимптотике (21) можно выписать явно:

$$a_0(\lambda, x, y)=(2\pi)^{-1} g(\lambda, p(x, y)), \text{ если } y^2 \leqq 1-\delta_2,$$

$$a_0(\lambda, x, y)=(4\pi)^{-1} g(\lambda, p(x, y)), \text{ если } y^2 \geqq 1+\delta_2,$$

где $g(\lambda, p)=\operatorname{Re}\{\omega^{-1/2} e^{\lambda\varphi(p, x, y)} h(\lambda, p)(shp)^{-1}\}$. При этом,

$$\operatorname{Re}\varphi(p(x, y), x, y)=\frac{1}{2}(\operatorname{arch}|x|-|x|\sqrt{x^2-1}), \text{ если } y^2 \leqq 1-\delta_2. \tag{26}$$

Следствие 2. *Если $x^2>\lambda+\lambda^{1/3+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, $y^2<\lambda/2$, то*

$$|e(\lambda, x, y)| \leqq c_1 \lambda^{-1/3} \exp(-c\lambda^{1/3}(x^2/\lambda-1)^{1/2}).$$

Теорема 5 (случай $x^2 \leqq 1-\delta_1$, $y^2 \leqq 1-\delta_2$). *Для любых $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ имеет место асимптотика* (21), *равномерно в области*

$$\{(x, y): x^2 \leqq 1-\delta_1, y^2 \leqq 1-\delta_2\} \text{ и } |a_k(\lambda, x, y)| \leqq c_k(1-x^2)^{-1/4}|x-y|^{-1}.$$

Главный коэффициент a_0 выписывается явно:

$$a_0(\lambda, x, y)=(2\pi)^{-1}\omega^{-1/2}(h_1(\lambda, t_-, \lambda)+h_2(\lambda, t_+, \lambda)),$$

где функции $s \to h_j(s, t, \lambda)$ суть 2-периодические, $h_1(s, t, \lambda)=\sin(\lambda\varphi(t)-st)(\sin t)^{-1}$, $h_2(s, t, \lambda)=\cos(\lambda\varphi(t)-st)(\sin t)^{-1}$ при $0 \leqq s<2$ и $\cos 2t_\pm=xy\pm\omega$, $\varphi(t)=t+\frac{x^2+y^2}{2}\operatorname{ctg} 2t-\frac{xy}{\sin 2t}$.

Следствие 3. *Если $x^2<1-\delta_1$, $y^2<x^2/2$, то имеем равномерную асимптотику*

$$E(\lambda, x, y)=\lambda^{-1/2}\sum_{k=1}^{4} b_k(\lambda, x, y)e^{i\lambda\psi_k}+O(\lambda^{-3/2}|x|^{-1}), \tag{27}$$

где коэффициенты $b_k(\lambda, x, y)$ являются гладкими функциями относительно x, y с оценкой

$$b_k(\lambda, x, y)=O(|x|^{-1}), \quad |\partial_x b_k(\lambda, x, y)|=O(|x|^{-2}), \tag{28}$$

а функции ψ_k даются формулами (20).

Замечание 5. В классическом случае, когда $x^2+y^2 \leqq A$, имеет место равномерная асимптотика

(29) $$e(\lambda, x, y)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-y)}{x-y}+O(\lambda^{-1/2}),\quad \lambda\to+\infty.$$

2. Доказательства. Доказательство теоремы 1. Как и при доказательстве теоремы А [1, стр. 264], достаточно установить равномерную оценку вида

(30) $$R_n(y)=O(1)\int_{|x|>1}|x|^{-1}|g(x)|\,dx+0(1),\quad n\to\infty,\ y^2<A/2,\ A>1,$$

где

(31) $$R_n(y)=s_n(y)-\frac{1}{\pi}\int_{y-\delta}^{y+\delta}f(x)\frac{\sin\sqrt{2n}\,(x-y)}{x-y}\,dx.$$

Из формул (2) и (29), учитывая лемму Римана — Лебега, находим соотношение

(32) $$R_n(y)=\int_{x^2>A}\exp(y^2/2)\,g(x)\,e(2n+1, x, y)\,dx+0(1),\quad n\to\infty,\ y^2<A/2,$$

поэтому остается оценить интегралы $K_j(\lambda, y)=\int a_j(\lambda, x)g(x)e(\lambda, x, y)\,dx$, $1\leq j\leq 4$, где $a_1(\lambda, x)$ — характеристическая функция множества $\{x: A<x^2<\lambda/2\}$, $a_2(\lambda, x)$ — характеристическая функция множества $\{x: \lambda/2<x^2<\lambda-\lambda^{1/3+2\varepsilon}\}$, $a_3(\lambda, x)=b(\lambda, x)$ и $a_4(\lambda, x)$ — характеристическая функция множества $\{x: x^2>\lambda+\lambda^{1/3+\varepsilon}\}$.

1. Оценка интеграла K_1. Из следствия 3 вытекает оценка $e(\lambda, x, y)=0(|x|^{-1})$, если $A<x^2<\lambda/2$, $y^2<A/2$, откуда сразу следует, что

(33) $$K_1(\lambda, y)=O(1)\int_{|x|>1}|x|^{-1}|g(x)|\,dx,\quad \lambda\to\infty,\ y^2<A/2.$$

2. Оценка интеграла K_2. Теперь будем использовать следствие 1 и теорему 5, из которых следует оценка

(34) $$e(\lambda, x, y)=(1-x^2/\lambda)^{-1/4}\,O(\lambda^{-1/2}),\ \text{если}\ \lambda/2<x^2<\lambda-\lambda^{1/3+2\varepsilon},\ y^2<A/2.$$

Поэтому (34) и (H_2) дают

(35) $$K_2(\lambda, y)=0(1),\quad \lambda\to\infty,\ y^2<A/2.$$

3. Оценка интеграла K_3. Из теоремы 3 и (H_3) вытекает

(36) $$K_3(\lambda, y)=0(\lambda^{-1/3}\int a_3(\lambda, x)|g(x)|\,dx)=0(1),\quad \lambda\to\infty,\ y^2<A/2.$$

4. Оценка интеграла K_4. Применяя следствие 2, получаем оценку

$$K_4(\lambda, y)\leq c_1\lambda^3\exp(-c\lambda^{\varepsilon/2})\int b_1(\lambda, x)|g(x)||x|^{-3}\,dx$$
$$+c_2\lambda^{-1/3}\int b_2(\lambda, x)|g(x)|\exp(-c|x|^{1/2})\,dx,$$

где $b_1(\lambda, x)$ — характеристическая функция множества $\{x: \lambda+\lambda^{1/3+\varepsilon}<x^2<\lambda^2\}$ и $b_1+b_2=a_4$. Учитывая еще (H_1), заключаем, что

(37) $$K_4(\lambda, y)=0(1),\quad \lambda\to\infty,\ y^2<A/2.$$

Из (33), (35)—(37) следует оценка (30). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Мы отправляемся от соотношений (31), (32). Сначала покажем, что из предположений (H_2') и (H_3) следует оценка

(38) $$g(x)=O(|x|^{5/3+\varepsilon/2})\ \text{при}\ |x|\to\infty.$$

Действительно, пусть $y_n\to\infty$ и $y_n^2=\lambda_n-\lambda_n^{1/3+\varepsilon}$. Согласно (H_3) и теореме о среднем найдется $x_n\in[(\lambda_n-\lambda_n^{1/3+\varepsilon})^{1/2}, (\lambda_n-\lambda_n^{1/3+\varepsilon/2})^{1/2}]$ так, чтобы $g(x_n)=O(|y_n|)$. Так как $|g(x_n)-g(y_n)|\leq\int_{y_n}^{x_n}|g'(t)|\,dt$, то, согласно (H_2'), $g(x_n)-g(y_n)=O(|y_n|^{5/3+\varepsilon/2})$, откуда получаем (38).

Теперь, как и при доказательстве теоремы 1, достаточно установить оценку типа

$$R_n(y)=O(1)\{\int\limits_{|x|>1}|x|^{-3}|g(x)|\,dx+\int\limits_{x^2>A}|x|^{-2}|g'(x)|\,dx\}+0(1), \tag{39}$$
$$n\to\infty,\ y^2<A/2.$$

Для этого будем оценивать интегралы $K_j(\lambda,\ y)$, $1\leq j\leq 4$. Оценка интегралов K_3 и K_4 остается прежней. Что касается интегралов K_1 и K_2, то удобнее рассматривать величины:

$$B_j(\lambda,\ y)=K_j(\lambda,\ \sqrt{\lambda}\,y)=\sqrt{\lambda}\int a_j(\lambda,\ \sqrt{\lambda}\,x)\,g(\sqrt{\lambda}\,x)\,E(\lambda,\ x,\ y)\,dx,\quad j=1,\ 2.$$

1. Оценка интеграла K_1. Существование производной $g'(x)$ и асимптотика (27) позволяют провести интегрирование по частям в интервале B_1. Учитывая оценку

$$|\partial_x\psi_k(x,\ y)|\geq C|x|,\ \text{есел}\ y^2<x^2/2 \tag{40}$$

и неравенства (28), получаем

$$K_1(\lambda,\ y)=O(1)\{\int\limits_{|x|>1}|x|^{-3}|g(x)|\,dx+\int\limits_{x^2>A}|x|^{-2}|g'(x)|\,dx\},\ \lambda\to\infty,\ y^2<A/2. \tag{41}$$

2. Оценка интеграла K_2. Теперь интегрируем по частям в интеграле B_2. Если $1/2<x^2<1-\delta_1$, то будем пользоваться асимптотикой (27). Если $1-\delta_1<x^2<1-\lambda^{-2/3+2\varepsilon}$, то тогда используем асимптотику (19). Учитывая еще (38), находим

$$B_2(\lambda,\ y)=O(1)\{\int\limits_{|x|>1}|x|^{-3}|g(x)|\,dx+\int\limits_{x^2>A}|x|^{-2}|g'(x)|\,dx\} \tag{42}$$
$$+O(\lambda^{-\varepsilon/4+\lambda-1/6+\varepsilon/4})+C(\lambda,\ y),$$

где

$$C(\lambda,\ y)=\lambda^{-1}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=0}^{N}\int a_2(\lambda,\ \sqrt{\lambda}\,x)\frac{\partial}{\partial x}[g(\sqrt{\lambda}x)(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \tag{43}$$
$$a_{kj}(\lambda^{\frac{2}{3}}(1-x^2)]^{-\frac{3k}{2}}(\partial_x\psi_j)^{-1}]\,e^{i\lambda\psi_j}\,dx$$

и $N=N(\varepsilon)$ — достаточно большое число. Оценка интеграла $C_1(\lambda,\ y)=\lambda^{-1}\int a_2(\lambda\ \sqrt{\lambda}\,x)\ |x|\ |g(\sqrt{\lambda}x)|\ (1-x^2)^{-5/4}|\partial_x\psi_j|^{-1}dx$ производится следующим образом. Учитывая (38) и (40), находим оценку

$C_1(\lambda,\ y)\leq\lambda^{-\frac{\varepsilon}{4}+\delta(\frac{2}{3}-2\varepsilon)}\int\limits_{x^2<1}(1-x^2)^{-1+\delta}\,dx=O(\lambda^{-\frac{\varepsilon}{8}})$, если $\delta=3\varepsilon/16(1-3\varepsilon)$. Далее, интеграл $C_2(\lambda,y)\,\lambda^{-1}\int a_2(\lambda,\ \sqrt{\lambda}\,x)|g(\sqrt{\lambda}\,x)|(1-x^2)^{-1/4}dx$ оценивается, учитывая (38), следующим образом: $C_2(\lambda,\ y)\leq C.\lambda^{-1/6+\varepsilon/4}\int\limits_{x^2<1}(1-x^2)^{-1/4}dx$. Наконец интеграл $C_3(\lambda,y)=\lambda^{-1/2}\int a_2(\lambda,\ \sqrt{\lambda}\,x)\ |g'(\sqrt{\lambda}x)|(1-x^2)^{-1/4}dx/|x|$ есть 0(1) согласно (H_2'). Таким образом оценки интегралов $C_j(\lambda,\ y)$, $j=1,\ 2,\ 3$ и (42), (43) показывают, что

$$K_2(\lambda,\ y)=O(1)\{\int\limits_{|x|>1}|x|^{-3}|g(x)|\,dx+\int\limits_{x^2>A}|x|^{-2}|g'(x)|\,dx\} \tag{44}$$
$$+0(1),\quad \lambda\to\infty,\ y^2<A/2.$$

Из (36), (37), (41), (44) следует оценка (39). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Оно основано на следующей формуле

$$e(\lambda,\ x,\ y)=1/2\pi i\int\limits_S e^{\lambda p}\,V(p,\ x,\ y)\,H(\lambda,\ p)\,dp, \tag{45}$$

где S есть отрезок $(\varepsilon-i\pi/2,\ \varepsilon+i\pi/2)$, $\varepsilon>0$, а функция $s\to H(s,\ p)$ является 2-периодической и $H(s,\ p)=e^{-sp}/shp$ при $0\leq s<2$. Далее,

(46) $$V(p, x, y)=(2\pi\, sh\, 2p)^{-1/2}\exp\left[-(x^2/2+y^2/2)\, c\, \mathrm{th}\, 2p+xy/sh\, 2p\right],$$

где $-\pi/2<\operatorname{Im} p\leqq\pi/2$, $\operatorname{Re} p>0$, представляет собой преобразование Лапласа спектральной функции:

(47) $$V(p, x, y)=p\int_0^\infty e^{-\lambda p} e(\lambda, x, y)\, d\lambda, \quad \operatorname{Re} p>0,$$

и обладает периодическим свойством

(48) $$V(p+ik\pi, x, y)=e^{ik\pi} V(p, x, y), \quad k\in \mathbf{Z}.$$

Чтобы доказать формулу (45), мы применим обратную формулу Лапласа к интегралу (47). Так как функция $\lambda\to e(\lambda, x, y)$ непрерывна только справа, то удобно перейти к ее усреднению по Стеклову: $e_h(\lambda, x, y)=\frac{1}{h}\int_0^h e(\lambda+\mu, x, y)\, d\mu$, $h>0$. Очевидно $e_h(\lambda, x, y)\to e(\lambda, x, y)$ при $h\to+0$ для любых фиксированных λ, x, y, и формула (47) может быть переписана в виде:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda p} e_h(\lambda, x, y)\, d\lambda = \frac{e^{hp}-1}{h}\,\frac{V(p, x, y)}{p^2}, \quad h>0,\ \operatorname{Re} p>0.$$

Поэтому обратная формула Лапласа влечет равенство

(49) $$e_h(\lambda, x, y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{\lambda p}\,\frac{e^{hp}-1}{h}\,\frac{V(p, x, y)}{p^2}\, dp, \quad \varepsilon>0.$$

Теперь свойство периодичности и теорема Вейерштрасса показывают, что

(49) $$e_h(\lambda, x, y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon-i\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon+i\frac{\pi}{2}} e^{\lambda p}\, V(p, x, y)\,\frac{g(h, p)-g(o, p)}{h}\, dp,$$

где $g(s, p)=e^{ps} f(s+\lambda, p)$ и $f(s, p)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(s+1)k\pi}(p+ik\pi)^{-2}$. Функция $s\to f(s, p)$ является непрерывной, 2-периодической функцией и $f(s, p)=e^{-sp}(cth\, p+s)(sh\, p)^{-1}$ при $0\leqq s<2$, $\operatorname{Re} p>0$. В частности, $\lim\limits_{h\to+0}\frac{g(h, p)-g(o, p)}{h}=H(\lambda, p)$ и теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла приложима. Поэтому (45) следует из (49).

Далее рассматриваем случаи $1-y^2\geqq\delta_2$ и $y^2-1\geqq\delta_2$ отдельно.

Случай $1-y^2\geqq\delta_2$. Будем предполагать, что $|x-1|<\delta_1$ (случай $|x+1|<\delta_1$ вполне аналогичен). Наша цель найти асимптотику интеграла

(50) $$E(\lambda, x, y)=\int_S e^{\lambda\varphi(p, x, y)} q(\lambda, p)\, dp, \quad \lambda\to+\infty,$$

где φ дается формулой (7) и

$$q(\lambda, p)=(2\pi i)^{-1}(2\pi\, sh\, 2p)^{-1/2} H(\lambda, p).$$

Критические точки функции $p\to\varphi(p, x, y)$, зависящие от глобальных параметров $x, y\in\mathbf{R}$, удовлетворяют соотношениям: $ch\, 2p=xy+\omega$, $\omega=[(1-x^2)(1-y^2)]^{1/2}$. Так как $1-y^2\geqq\delta_2>0$, то мы имеем четыре критические точки $p_\pm$ и $\bar p_\pm$, где $p_\pm$ определены равенствами (8), (9). Если $x=1$, то $p_\pm=p_0=it_0$, где $\cos 2t_0=y$ и $0<t_0<\pi/2$. Критические точки p_0 и $\bar p_0$ вырождены и

(51) $$\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^3}(p, x, y)=8, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial x}(p, x, y)=-2, \quad \text{если } p=p_0 \text{ или } p=\bar p_0.$$

При условии, что положительное число δ_1 достаточно мало, выполнены неравенства $0<|Im\, p_{\pm}|<\pi/2$, поэтому подынтегральная функция в (50) голоморфна вблизи критических точек. Следовательно можно применить лемму 2.3 [2, стр. 343], согласно которой существует голоморфная замена переменных $p=p(z,\ x,\ y)$, определенная в окрестности точек $z=0,\ x=1$ такая, что

$$\varphi(p(z,\ x,\ y),\ x,\ y)=A(x,\ y)-B(x,\ y)z+z^2/3,\quad p(0,\ 1,\ y)=p_0 \tag{52}$$

для каждого фиксированного $y,\ y^2\neq 1$. При этом коэффициенты A и B даются формулами (5), (6), они обладают свойствами (14), (15), (16) и $p(\pm\sqrt{B},\ x,\ y)=p_{\pm}$.

Далее, из (52), (7) следует, что

$$\varphi(\overline{p(\bar z,\ x, y)},\ x,\ y)=\overline{A(x,\ y)}-B(x,\ y)z+z^3/3,\ \overline{p(0,\ 1,\ y)}=\bar p_0 \tag{53}$$

и

$$\overline{p(\pm\sqrt{\bar B},\ x,\ y)}=\begin{cases}\bar p_{\pm}, & x^2>1\\ \bar p_{\mp}, & x^2<1.\end{cases}$$

Чтобы воспользоваться голоморфной заменой переменных (52), (53) в интеграле (50), мы сначала установим, что

$$E(\lambda,\ x,\ y)\sim\int_{\gamma} e^{\lambda\varphi(p,\ x,\ y)}\, q(\lambda,\ p)\, dp,\quad \gamma=\gamma_1\cup\gamma_2, \tag{54}$$

где γ_1 есть отрезок $(\varepsilon+i(t_0-2\varepsilon),\ \varepsilon+i(t_0+2\varepsilon))$ и γ_2 — отрезок $(\varepsilon-i(t_0+2\varepsilon),\ \varepsilon+i(-t_0+2\varepsilon))$ при условии, что $\varepsilon>0$ достаточно мало. Здесь эквивалентность „$a(\lambda,\ x,\ y)\sim b(\lambda,\ x,\ y)$" означает, что $a(\lambda,\ x,\ y)-b(\lambda,\ x,\ y)=O(e^{-c\lambda})$, $C>0$. Для доказательства (54) достаточно учесть оценку $\mathrm{Re}\,\varphi(p,\ x,\ y)\leqq -c<0$ при $p\in S\setminus\gamma$, которая легко следует из определения (7), если $\varepsilon>0$ достаточно мало. Теперь из (54), (52), (53) находим

$$E(\lambda,\ x,\ y)\sim\sum_{j=1}^{2} e^{\lambda A_j}\int_{\gamma_j^*} e^{\lambda(-Bz+z^3/3)}\, q_j(\lambda,\ z)\, dz, \tag{55}$$

где $A_1=A,\ A_2=\bar A$,

$$q_1(\lambda,\ z)=q(\lambda,\ p(z,\ x,\ y))\,\frac{\partial p}{\partial z}(z,\ x,\ y),\ q_2(\lambda,\ z)=q(\lambda,\overline{p(\bar z,\ x,\ y)})\,\frac{\partial}{\partial z}\,\overline{p(\bar z,\ x,\ y)} \tag{56}$$

и ориентированная дуга γ_j^* есть образ сегмента γ_j. Отметим, что $\gamma_j^*\subset\{z:\ \mathrm{Re}\, z>0\}$ и γ_j^* имеет крайние точки $\alpha_j,\ \beta_j$, для которых $\arg\alpha_j\in(-\pi/2,\ -\pi/6)$, $\arg\beta_j\in(\pi/6,\ \pi/2)$.

Далее, согласно подготовительной теореме Вейерштрасса [3], можно написать

$$q_j(\lambda,\ z)=r_j+\tilde r_j z+(z^2-B)\,\tilde q_j(\lambda,\ z). \tag{57}$$

С другой стороны, функция Эйри допускает представление

$$Ai(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-sz+z^3/3}\, dz,\quad \Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2,$$

где

$$\Gamma_1:\ z=\rho\, e^{i\varphi_1},\quad \rho\in(+\infty,\ 0),\quad \varphi_1\in(-\pi/2,\ -\pi/6),$$
$$\Gamma_2:\ z=\rho\, e^{i\varphi_2},\quad \rho\in(0,\ +\infty),\quad \varphi_2\in(\pi/6,\ \pi/2).$$

Поэтому асимптотика (4) следует из (55), (56), (57), так как оценка остатка производится ровно так же, как и в [2, стр. 348].

Чтобы подсчитать главные коэффициенты a_0 и b_0, мы используем соотношения:

$$a_0(\lambda,\ x,\ y)=2\pi i\,(r_1 e^{\lambda A}+r_2 e^{\lambda\bar A}), \tag{58}$$

(59) $$b_0(\lambda, x, y) = -2\pi i(\tilde{r}_1 e^{\lambda A} + \tilde{r}_2 e^{\lambda \bar{A}}).$$

Поскольку

(60) $$r_j = \frac{1}{2}[q_j(\lambda, \sqrt{B}) + q_j(\lambda, -\sqrt{B})], \ \tilde{r}_j = \frac{1}{2\sqrt{B}}\ [q_j(\lambda, \sqrt{B}) - q_j(\lambda, -\sqrt{B})]$$

и

(61) $$\frac{\partial p}{\partial z}(\pm\sqrt{B}, x, y) = (\sqrt{B}\, sh\, 2p_{\pm}(2\omega)^{-1})^{1/2},$$

то формулы (17), (18) следуют из (58)—(61).

Случай $y^2 - 1 \geqq \delta_2$.

Если $xy > 0$, то критические точки фазовой функции $\varphi(p)$ удовлетворяют соотношениям (10), (11), и подынтегральная функция в (50) голоморфна вблизи них. Пусть $x = 1$. Тогда $p_{\pm} = \varepsilon_0$, где $ch\, 2\varepsilon_0 = |y|$ и свойства (51) выполняются при $p = \varepsilon_0$. Кроме того, $\operatorname{Re}\varphi(p) < \operatorname{Re}\varphi(\varepsilon_0)$, если $p \in S \setminus \varepsilon_0$. Поэтому прежний метод доказательства применим, и мы получаем асимптотику (4).

Если $xy < 0$, то критические точки даются формулами (12), (13). При $x = 1$ имеем равенства $p_{\pm} = p_0 = \varepsilon_0 + i\pi/2$, где $ch\, 2\varepsilon_0 = |y|$ и свойство (51) выполнено. Пользуясь периодичностью (48), мы можем написать, что

(62) $$E(\lambda, x, y) = \frac{1}{2}\int\limits_{S_1 \cup S_2} e^{\lambda\varphi(p, x, y)} q(\lambda, p)\, dp,$$

где S_1 есть отрезок $(\varepsilon_0 + i0, \varepsilon_0 + i\pi)$ и S_2 — отрезок $(\varepsilon_0 - i\pi, \varepsilon_0 + i0)$. Так как $\operatorname{Re}\varphi(p) < \operatorname{Re}\varphi(p_0)$ при $p \in S_1 \setminus p_0$ и $\operatorname{Re}\varphi(p) < \operatorname{Re}\varphi(\bar{p}_0)$ при $p \in S_2 \setminus \bar{p}_0$, то заключаем, что прежний метод снова применим. Таким образом теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Достаточно в асимптотике (4) выделить первые два члена (соответствующие $k = 0$ и $k = 1$) и воспользоваться асимптотикой функции Эйри, учитывая свойства (14), (5), (6).

Доказательство теоремы 4. Случай $y^2 - 1 \geqq \delta_2$.

Если $xy > 0$, то будем использовать формулу (50), где $\varepsilon = p(x, y)$ взято из равенства (24). Очевидно, $p(x, y) \geqq C(\delta_1, \delta_2) > 0$. Критическая точка $p(x, y)$ невырождена и

(63) $$(\partial^2\varphi/\partial p^2)(p(x, y), x, y) = 4\omega(sh\, 2p(x, y))^{-1}.$$

С другой стороны, $\operatorname{Re}\varphi(p, x, y) < \operatorname{Re}\varphi(p(x, y), x, y)$, если $p \in S \setminus p(x, y)$. Поэтому можно применить метод перевала, и асимптотика (21) следует из теоремы 1.3 [2, стр. 170] с точностью до оценки остатка. Следуя за методом доказательства теоремы 1.3, нетрудно убедиться, что все оценки равномерны относительно параметров x, y, где $x^2 \geqq 1 + \delta_1$, $y^2 \geqq 1 + \delta_2$ и $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Таким образом асимптотика (21) доказана.

Если $xy < 0$, то используем формулу (62), где $\varepsilon_0 = \varepsilon$ то же самое, что и в (25). Отметим, что $\varepsilon = \varepsilon(x, y) \geqq C(\delta_1, \delta_2) > 0$. Далее, критические точки $p(x, y)$ и $\overline{p}(x, y)$, где $p = \varepsilon + i\pi/2$, невырождены и выполнено свойство (63). Так как $\operatorname{Re}\varphi(p, x, y) < \operatorname{Re}\varphi(p(x, y), x, y)$, когда $p \in S_1 \setminus p(x, y)$, и $\operatorname{Re}\varphi(p, x, y) < \operatorname{Re}\varphi(\overline{p(x, y)}, x, y)$, когда $p \in S_2 \setminus \bar{p}(x, y)$, то и в этом случае применим метод перевала. В результате асимптотика (21) получается так же, как и в прежнем случае.

Случай $1 - y^2 \geqq \delta_2$.

Теперь пользуемся формулой (50) с $\varepsilon = \frac{1}{2}\operatorname{arch}|x|$, где $x^2 \geqq 1 + \delta_1$. Критические точки $p(x, y)$, $\overline{p(x, y)}$, где $p(x, y)$ дается через (23), невырождены. При этом $\operatorname{Re}\varphi(p, x, y) < \operatorname{Re}\varphi(p(x, y), x, y)$, если $0 \leqq \operatorname{Im} p \leqq \pi/2$, $p \neq p(x, y)$ и $\operatorname{Re}\varphi(p, x, y) < \operatorname{Re}\varphi(\overline{p(x, y)}, x, y)$, если $-\pi/2 \leqq \operatorname{Im} p \leqq 0$, $p \neq \overline{p(x, y)}$. Поэтому асимптотика (21) получается методом перевала как и раньше.

Доказательство следствия 2. Удобнее установить эквивалентную оценку

$$|E(\lambda, x, y)| \leqq C_1 \lambda^{-\frac{1}{3}} \exp\left(-C\lambda^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right), \text{ если } x^2 > 1+\lambda^{-\frac{2}{3}+\varepsilon}, \quad \varepsilon>0,\ y^2<1/2. \tag{64}$$

Для этого, в случае $x^2>1+\delta_1$, применяем теорему 4, свойство (26) и неравенство

$$|x|\sqrt{x^2-1}-\operatorname{arch}|x| \geqq \delta\sqrt{x^2-1}, \text{ если } x^2-1>\delta, \quad 0<\delta<1. \tag{65}$$

Пусть теперь $\lambda^{-2/3+\varepsilon}<x^2-1<\delta_1$, $\varepsilon>0$. Тогда применима теорема 3. Используя еще асимптотику функции Эйри, с учетом свойств (14), (5), (6), получим асимптотику типа (21), (22). Поэтому (64) следует из (21), (22), (26) и неравенства (65).

Доказательство теоремы 5. Начинаем с формулы (50). Фаза $\varphi(p)$ имеет критические точки $p_\pm=it_\pm$ и $\bar{p}_\pm$, где $\cos 2t_\pm = xy\mp\omega$. Если $x=y$, то $p_-=0$ и и подынтегральная функция не голоморфна в окрестности критических точек. Поэтому мы переходим к формулам:

$$E(\lambda, x, y)=\sum_{j=1}^{3} E_j(\lambda, x, y, \varepsilon), \tag{66}$$

$$E_j(\lambda, x, y, \varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_S e^{\lambda p} V(p, \sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}y)H(\lambda, p)X_j(p)\,dp, \tag{67}$$

где C^∞-функции X_j выбраны следающим образом: $X_1(p)+X_2(p)+X_3(p)=1$, если $p\in S$; $\operatorname{supp} X_1\subset\{p\colon |\operatorname{Im} p|<\frac{\pi}{4}\}$, $\operatorname{supp} X_3\subset\{p\colon 0<|\operatorname{Im} p|<\frac{\pi}{2}\}$ и X_2 является $i\pi$-периодической, $X_2=0$ в окрестности точек $\{p\colon |\operatorname{Im} p|\leq\frac{\pi}{4}\}$. Далее, гладкую функцию $V(p, x, y)$, $\operatorname{Re} p>0$ можно представить в виде

$$V(p, x, y)=\frac{\operatorname{sh} 2p}{2\pi i(x-y)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}th p\right)\int e^{-\xi^2\frac{\operatorname{sh} 2p}{2}+i(x-y)\xi}\xi\,d\xi.$$

Так как фазовая функция $\psi(p)=p-\frac{x^2+y^2}{2}th\,p-\xi^2\frac{\operatorname{sh} 2p}{2}$ удовлетворяет оценке $|\psi'(p)|\geqq C\xi^2$, если ξ^2 достаточно велико, то в интеграле $E_1(\lambda, x, y, \varepsilon)$ можно интегрировать по частям. В результате получаем

$$E_1(\lambda, x, y, \varepsilon)\sim\int_R\int_S e^{i\lambda(x-y)\xi+\lambda\psi}q_1(\lambda, p, \xi)\,dp\,d\xi, \quad p=\varepsilon+it, \tag{68}$$

где

$$q_1(\lambda, p, \xi)=-\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2}\frac{\xi\operatorname{sh} 2p}{x-y}H(\lambda, p)X_1(p)\varkappa(\xi)$$

и $\varkappa\in C_0^\infty(R)$ есть четная срезающая функция. Здесь эквивалентность „$a(\lambda, x, y, \varepsilon)\sim b(\lambda, x, y, \varepsilon)$" означает, что $|a(\lambda, x, y, \varepsilon)-b(\lambda, x, y, \varepsilon)|\leqq C_N\lambda^{-N}$ для любого $N>0$, равномерно относительно параметров x, y, ε.

Чтобы представить $E_2(\lambda, x, y, \varepsilon)$, мы используем периодическое свойство (48) и формулу

$$V(p, x, y)=(2\pi)^{-1}(\operatorname{ch} 2p)^{-1/2}\int e^{-\frac{x^2+\xi^2}{2}th\,2p+i\left(\frac{x}{ch\,2p}-y\right)\xi}d\xi,$$

если $\operatorname{Re} p>0$, $0<\operatorname{Im} p<\pi$. Аналогично (68) получаем

$$E_2(\lambda, x, y, \varepsilon)\sim\int_R\int_{\varepsilon+i0}^{\varepsilon+i\pi} e^{\lambda\varphi}q_2(\lambda, p, \xi)\,dp\,d\xi, \quad p=\varepsilon+it, \tag{69}$$

где $q_2(\lambda,\ p,\ \xi)=\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2 i}(ch\,2p)^{-1/2}H(\lambda,\ p)X_2(p)\varkappa(\xi)$.

Наконец, так как подынтегральная функция в (67) при $j=3$ является гладкой для всех $\varepsilon\geqq 0$, то из (66)—(69) следуют основные формулы: $E(\lambda,\ x,\ y)=\sum_{j=1}^{3}E_j(\lambda,x,y)$, где

$$E_j(\lambda,\ x,\ y)\sim\iint e^{i\lambda\varphi_j(t,\ \xi,\ x,\ y)}\,q_j(t,\ \xi,\ \lambda,\ x,\ y)\,dt\,d\xi,\quad j=1,\ 2,$$

$$E_3(\lambda,\ x,\ y)\sim\int e^{i\lambda\varphi(t,\ x,\ y)}\,q(t,\ \lambda)\,dt$$

и

$$\varphi_1(t,\ \xi,\ x,\ y)=t-\frac{\xi^2}{2}\sin 2t-\frac{x^2+y^2}{2}\operatorname{tg}t+(x-y)\,\xi,$$

$$\varphi_2(t,\ \xi,\ x,\ y)=t-\frac{x^2+\xi^2}{2}\operatorname{tg}2t+\left(\frac{x}{\cos 2t}-y\right)\xi,$$

$$\varphi(t,\ x,\ y)=t+\frac{x^2+y^2}{2}\operatorname{ctg}2t-\frac{xy}{\sin 2t},$$

$$q_1(t,\ \xi,\ \lambda,\ x,\ y)=\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2}\ \frac{\xi\sin 2t}{x-y}H(\lambda,\ it)X_1(it)\varkappa(\xi),$$

$$q_2(t,\ \xi,\ \lambda,\ x,\ y)=\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2}(\cos 2t)^{-1/2}H(\lambda,\ it)X_2(it)\varkappa(\xi),$$

$$q(t,\ \lambda)=\frac{1}{2\pi}(2\pi i\sin 2t)^{-1/2}H(\lambda,\ it)\,X_3(it).$$

Для вычисления асимптотики интегралов $E_j(\lambda,\ x,\ y)$ при $\lambda\to+\infty$ будем применять метод стационарной фазы [2].

В случае интеграла E_1 фазовая функция $(t,\ \xi)\to\varphi_1(t,\ \xi,\ x,\ y)$ имеет критические точки $(t_\pm,\ \xi_\pm)$ и $(-t_\pm,\ -\xi_\pm)$, где $\cos 2t_\pm=xy\mp\omega$, $\xi_\pm\sin 2t_\pm=x-y$. При этом, $\det\varphi_1''(t_\pm,\ \xi_\pm,x,y)=\pm 4\omega$, где φ_1'' — гессиан функции $(t,\xi)\to\varphi_1(t,\ \xi,\ x,\ y)$ и $\operatorname{sgn}\varphi_1''(\pm t_-,\ \pm\xi_-)=0$, $\operatorname{sgn}\varphi_1''(t_+,\ \xi_+)+\operatorname{sgn}\varphi_1''(-t_+,\ -\xi_+)=0$. Поэтому

$$(70)\qquad E_1(\lambda,\ x,\ y)\sim\frac{1}{2\pi}\lambda^{-1/2}\omega^{-1/2}[h_1(\lambda,\ t_-,\ \lambda)X_1(it_-)\varkappa(\xi_-)$$
$$+h_2(\lambda,\ t_+,\ \lambda)\,X_1(it_+)\varkappa(\xi_+)],$$

учитывая еще равенство $\varphi_j(t_\pm,\ \xi_\pm,\ x,\ y)=\varphi(t_\pm,\ x,\ y)$, $j=1,\ 2$.

В случае интеграла E_2 имеем следующие критические точки: $(t_\pm,\ \xi_\pm)$ и $(\pi-t_\pm,\ -\xi_\pm)$, где $\cos 2t_\pm=xy\mp\omega$, $\xi_\pm\sin 2t_\pm=x-y\cos 2t_\pm$. Так как $\det\varphi_2''(t_\pm,\ \xi_\pm)=\pm 4\omega(\cos 2t_\pm)^{-1}$ и $\operatorname{sgn}\varphi_2''(t_+,\ \xi_+)=\operatorname{sgn}\varphi_2''(\pi-t_+,-\xi_+)=0$, $\operatorname{sgn}\varphi_2''(t_-,\xi_-)+\operatorname{sgn}\varphi_2''(\pi-t_-,\ -\xi_-)=0$, то по методу стационарной фазы получаем

$$(71)\qquad E_2(\lambda,\ x,\ y)\sim\frac{1}{2\pi}\lambda^{-1/2}\omega^{-1/2}[h_1(\lambda,\ t_-,\ \lambda)\,X_2(it_{-1})\varkappa(\xi_-)$$
$$+h_2(\lambda,\ t_+,\ \lambda)\,X_2(it_+)\varkappa(\xi_+)].$$

Остается рассмотреть интеграл E_3. Теперь фазовая функция $t\to\varphi(t,\ x,\ y)$ имеет критические точки $t_\pm$ и $-t_\pm$, где $\cos 2t_\pm=xy\mp\omega$. Так как $\varphi''(t_\pm)=\mp\frac{4\omega}{\sin 2t_\pm}$, то метод стационарной фазы приводит к асимптотике

$$(72)\qquad E_3(\lambda,\ x,\ y)\sim\frac{1}{2\pi}\lambda^{-1/2}\omega^{-1/2}[h_1(\lambda,\ t_-,\ \lambda)\,X_3(it_-)+h_2(\lambda,\ t_+,\ \lambda)\,X_3(it_+)].$$

Наконец, теорема 5 является следствием (70)—(72).

Доказательство замечания 5. Проще применить метод Хермандера [4]. С этой целью отметим, что из (46) вытекает формула

(73) $$U(t, x, y) = V(it, x, y) = a(t, x, y) \int e^{-i\xi^2 t + i(x-y)\xi} đ\xi, \quad đ\xi = \frac{d\xi}{2\pi},$$

где $a(0, x, y) = 1$. Далее, положим

$$e_\rho(\lambda, x, y) = \int \rho(\lambda-\mu) e(\mu, x, y) d\mu, \quad e'_\rho(\lambda, x, y) = \int \rho(\lambda-\mu) de(\mu, x, y),$$

где ρ — четная, положительная, гладкая, быстро убывающая функция. Так как $e'_\rho(\lambda, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda t} \widehat{\rho}(t) U(t, x, y) dt$, то формула (73) приводит к представлению

(74) $$e'_\rho(\lambda, x, y) = \int e^{i(x-y)\xi} R(\lambda-\xi^2, x, y) đ\xi,$$

где $R(\mu, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\mu t} \widehat{\rho}(t) a(t, x, y) dt$. Ясно, что

(75) $$\int R(\mu, x, y) d\mu = 1, \quad |R(\mu, x, y)| \leqq C_N (1+|\mu|)^{-N}, \text{ если } x^2+y^2 < A.$$

Отсюда следует оценка

(76) $$\int R(\lambda-\xi^2, x, y) d\xi = O(\lambda^{-1/2}), \text{ если } x^2+y^2 < A.$$

В частности,

(77) $$e'_\rho(\lambda, x, x) = O(\lambda^{-1/2}), \text{ если } x^2 \leqq A.$$

Положим

$$R_1(\mu, x, y) = \int_{-\infty}^{\mu} R(\sigma, x, y) d\sigma, \text{ если } \mu < 0$$

78) $$R_1(\mu, x, y) = -\int_{\mu}^{\infty} R(\sigma, x, y) d\sigma, \text{ если } \mu > 0.$$

Тогда $|R_1(\mu, x, y)| \leqq C_N (1+|\mu|)^{-N}$, поэтому для функции $R_1(\lambda-\xi^2, x, y)$ имеет место оценка (76). Далее, интегрируя равенство (74) и учитывая (75), (76), получаем

$$e_\rho(\lambda, x, y) = \int_{\xi^2<\lambda} e^{i(x-y)\xi} đ\xi + \int e^{i(x-y)\xi} R_1(\lambda-\xi^2, x, y) đ\xi,$$

откуда,

(79) $$e_\rho(\lambda, x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-y)}{x-y} + O(\lambda^{-1/2}), \text{ если } x^2+y^2 < A.$$

Теперь, используя известную оценку [5] $e(\lambda, x, y) = O(\lambda^{1/2})$, получаем

(80) $$e(\lambda, x, y) - e_\rho(\lambda, x, y) = \int_0^{\lambda/2} [2e(\lambda, x, y) - e(\lambda+\mu, x, y) - e(\lambda-\mu, x, y)] \rho(\mu) d\mu + O(\lambda^{-\infty}).$$

С другой стороны, из (77) следует, что $e(\lambda+1, x, x) - e(\lambda, x, x) = O(\lambda^{-1/2})$, если $x^2 < A$, откуда $|e(\lambda, x, y) - e(\lambda \pm \mu, x, y)| \leqq C(1+|\mu|)\lambda^{-1/2}$ при $x^2+y^2 < A$, $0 < \mu < \frac{\lambda}{2}$. Поэтому (80) влечет оценку

(81) $$e(\lambda, x, y) - e_\rho(\lambda, x, y) = O(\lambda^{-1/2}), \text{ равномерно при } x^2+y^2 < A.$$

Наконец, (79) и (81) доказывают асимптотику (29).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Szegö. Orthogonal polynomials. Providence, 1959.
2. М. В. Федорюк. Метод перевала. М., 1977.
3. Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, Т. 1, М., 1986.
4. М. А. Шубин. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М., 1978.
5. G. F. Karadzhov. Asymptotic behaviour of the spectral function for harmonic oscillator. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 37, 1984, 725-728.

Математический институт
Болгарской академии наук
София 1090
П. Я. 373
Болгария

Поступила 12. 03. 1990