Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

REGULARITE DU PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE A CONTRAINTES SOUS FORME INTEGRALE

I. M. CONTE

Le présent travail est consacré à l'étude du problème de commande optimale à contraintes sous forme intégrale, pour lequel nous démontrons une condition nécessaire et suffisante de régularité par rapport à la fonctionnelle. Certaines propriétés Lipschitziennes de la solution du problème convexe de la commande optimale à contraintes sous forme intégrale sont également obtenues.

1. Introduction. Le présent travail est consacré à l'étude du problème de commande optimale à contraintes sous forme intégrale. Dans le paragraphe 2 nous formulons le problème originel relaxé (selon Bogolyubov) [1]; nous démontrons que ce problème est régulier par rapport à la fonctionelle si et seulement si les valeurs optimales des problèmes originel et relaxé coïncident. Ainsi, le résultat obtenu représente, dans un certain sens, une généralisation des résultats de Dontchev — Mordukhovic [4], Dontchev [3] et Zolezzi [8]. Le paragraphe 3 traite un problème convexe à contraintes sous forme intégrale. Là, nous déterminons certaines propriétés pour lesquelles la commande optimale, considérée comme fonction d'un paramètre, vérifie la condition de Lipschitz (continuité de Lipschitz). Des résultats analogues pour des problèmes à contraintes locales ont été obtenus par Dontchev [3 chapitre 2]. Remarquons que dans [2], Gičev a démontré la continuité de la commande optimale sous des hypothèses beaucoup plus faibles.

2. Régularité par rapport à la fonctionnelle. Dans ce paragraphe nous désignerons par $F\colon X \rightrightarrows Y$ une fonction multivalente de l'espace X dans l'espace Y.

Soit X_k une suite d'ensembles nous désignerons par

$\lim\sup X_k = \{x \mid$ tout ensemble ouvert contenant x intersecte un nombre infini d'ensembles $X_k\}$.

Définition 2.1. *Soient U et U^* deux espaces vectoriels mis en dualité séparante par une forme bilinéaire notée $\langle .,. \rangle$.*

Si $F\colon U \to \overline{\mathrm{R}}$, on appele fonction polaire de F et on note F^* la fonction de $U^* \to \overline{\mathrm{R}}$ définie par

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in U} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\}.$$

En réitérant le processus, on aboutit ainsi à la bipolaire F^{**}, qui est maintenant une fonction de U dans $\overline{\mathrm{R}}$:

$$F^{**}(u) = \sup_{u^* \in U^*} \{\langle u, u^* \rangle - F^*(u^*)\}.$$

On considère le problème de commande optimale dépendant du paramètre p

(L_p) $$\varphi(x(T)) \to \min$$

s. a.:

(1) $$\dot{x} \in D(t, x(t), p) + B(t, x, p)u(t), \quad x(0) = x^0,$$

(2) $$u(t) \in V,$$

pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$(3) \qquad x(t) \in H(p),$$

pour tout $t \in [0, T]$,

$$(4) \qquad \int_0^T q(t, x(t), u(t))dt \leqq 0,$$

où $x(\cdot) \in W^{1,2}(0, T)$, $u(\cdot) \in L_2(0, T)$

$$x \in \mathrm{R}^n, \ u \in \mathrm{R}^m, \ 0 < T < +\infty, \ D: [0, T] \times \mathrm{R}^n \times P \rightrightarrows \mathrm{R}^n$$

$$B: [0, T] \times \mathrm{R}^n \times P \to \mathrm{R}^n, \ x^0 \text{ est fixé}, \ V \subset \mathrm{R}^m, \ H: P \rightrightarrows \mathrm{R}^n$$

$$q: [0, T] \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \to (-\infty, +\infty], \ \varphi: \mathrm{R}^n \to (-\infty, +\infty].$$

$W^{1,2}(0, T)$ étant l'espace des fonctions absolument continues dont la première dérivée est dans $L_2(0, T)$. Le paramètre p appartient à l'espace métrique P et $0 \in P$ est l'élément fixe.

Si pour $p=0$ nous avons le problème initial (originel) alors pour $p \neq 0$ le problème est perturbé.

Dénotons par $v(p)$ la valeur optimale (minimale) de la fonction objectif.

Définition 2.2. *On dit que le problème originel* (L_p) *est régulier par rapport à la fonctionnelle dans le sens de la relaxation (selon Hadamard) si on a* $v(p) \to v(0)$ *lorsque* $p \to 0$.

Ceci étant, notre but est d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour la régularité du problème (L_p) dans le sens da la relaxation. On introduit tout d'abord le problème relaxé correspondant à $p=0$

$$(R_p) \qquad \varphi(x(T)) \to \min$$

$$(5) \qquad \dot{x} \in clco\, D(t, x(t), p) + B(t, x, p)u(t), \quad x(0) = x^0,$$

$$(6) \qquad u(t) \in clco\, V,$$

$$(7) \qquad x(t) \in H(p),$$

$$(8) \qquad \int_0^T q^{**}(t, x(t), u(t))\, dt \leqq 0,$$

où $q^{**}(t, x, u)$ est la bipolaire de la fonction $q(t, x, u)$ par rapport à u et selon Young-Fenchel [5], *clco* signifie l'enveloppe convexe formée.

Soit $\widehat{v}$ la valeur minimale du problème relaxé (R_p). Il est clair que $\widehat{v} \leqq v(0)$.

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

1°) — la fonctionnelle φ est semicontinue inférieurement (s. c. i) dans R^n.

2°) — Pour chaque $p \in P$, il existe $u(\cdot) \in L_2([0, T])$ satisfaisant (2) telle qu'au moins une solution $x(\cdot)$ du système (1) vérifie avec $u(\cdot)$ les contraintes (3) et (4).

3°) — la fonction multivalente $(t, x) \rightrightarrows D(t, x, p)$ possède des images compactes; elle est mesurable par rapport à t pour tout $x \in \mathrm{R}^n$ et $p \in P$, semicontinue supérieurement (s. c. s.) par rapport à x pour presque tout $t \in [0, T]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact $L \subset \mathrm{R}^n$, il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque p: dist $(p, 0) < \delta$ et pour tout $x, y \in C^0([0, T])$, $\| x - y \|_C < \delta$, on a $\| B(\cdot, x(\cdot), p) - B(\cdot, y(\cdot), 0) \|_{L_2} < \varepsilon$.

En outre, il existe $a_p \in L_1(0, T)$ telle que, pour chaque $x \in H(p) \cap L$ et presque pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$(9) \qquad D(t, x, p) \subset D(t, x, 0) + a_p(t)\bar{B},$$

$$\int_0^T a_p(t)dt \leqq \varepsilon, \tag{10}$$

où $\bar{B}$ est la boule unité fermée de R^n.

Il existe $B_1(\cdot) \in L\infty(0, T)$ telle que $|B(t, x, p)| \leqq B_1(t)$ pour tout $x \in L$ et pour tout $p \in P$ et presque pour tout $t \in [0, T]$.

Il existe des fonctions $A_1, A_2 \in L_2(0, T)$ telles que

$$|w| \leqq A_1(t)|x| + A_2(t)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in R^n$ lorsque

$$w \in D(t, x, p), \quad p \in P.$$

4°) — pour tout $p_n \to 0$, $\limsup_{n\to\infty} H(p_n) \subset H(0)$.

5°) — la fonction q est continue par rapport à (x, u) pour presque tout $t \in [0, T]$ mesurable par rapport à t pour tout $(x, u) \in R^n \times R^m$. Il existe une constante $a > 0$ et une fonction intégrable a_1 telles que

$$q(t, x, u) \geqq a|u|^2 + a_1(t) \text{ pour tout } x \in R^n, \quad u \in R^m$$

et pour presque tout $t \in [0, T]$.

6°) — $\limsup_{p\to 0} v(p) \leqq \bar{v}$.

Théorème 2.1. *Si les hypothèses* 1°)—6°) *sont satisfaites, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\hat{v} = v(0)$,

(ii) $\lim_{p\to 0} v(p) = v(0)$.

Démonstration. Soient $p_n \in P$, $p_n \neq 0$ et $\varepsilon_n \to 0$. Alors, selon la 2ème hypothèse il existe $u_n \in L_2$, $u_n(t) \in V$ telle que la solution x de

$$\dot{x} \in D(t, x, p_n) + B(t, x, p_n)u_n(t), \quad x(0) = x^0 \tag{12}$$

vérifie (3), (4) et en plus

$$\varphi(x_n(T)) \leqq v(p_n) + \varepsilon_n \text{ pour tout } n.$$

De l'hypothèse 5°), il suit

$$0 \geqq \int_0^T q(t, x_n, u_n)dt \geqq a\int_0^T |u_n(t)|^2 dt + \int_0^T a_1(t)dt,$$

d'où $\int_0^T |u_n(t)|^2 dt \leqq -\frac{1}{a}\int_0^T a_1(t)dt$.

Par conséquent, u_n possède un point d'adhérence u_0 dans la topologie faible de $L_2(0, T)$. Il est clair que, $u_0(t) \in clco\, V$ pour presque tout $t \in [0, T]$.

Considérons une suite de solutions x_n de (12). Alors selon l'hypothèse (3°), on a

$$|x_n(t)| \leqq |x^0| + \int_0^t [A_1(\tau)|x_n(\tau)| + A_2(\tau)d\tau + \int_0^t B_1(\tau)|u_n(\tau)|d\tau.$$

Du fait que u_n soit bornée dans L_2 et en utilisant le lemme de Gronwall, on obtiendra que x_n est uniformément bornée. Ainsi pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$

$$|x_n(t_1)-x_n(t_2)| \leqq \int_{t_1}^{t_2} A_3(\tau)\,d\tau + \|B_1\|_\infty \int_{t_1}^{t_2} |u_n(\tau)|d\tau$$
$$\leqq \int_{t_1}^{t_2} A_3(\tau)d\tau + k_1\sqrt{t_2-t_1}\,\Big(\int_{t_1}^{t_2} |u_n(\tau)|^2\,d\tau\Big)^{1/2}$$
$$\leqq k_2\sqrt{t_2-t_1},$$

où A_3 est une fonction intégrable, tandis que k_1, k_2 sont des constantes convenables. Par conséquent x_n est équicontinue. Alors, selon le théorème d'Arzela-Ascoli, x_n possède une sous-suite uniformément convergente. Sans perte de généralité, prenons $x_n \to x_0$ uniformément. Selon la forme de (12) et d'après l'hypothèse 3°) il s'en suit que $\dot{x}_n$ possède une sous-suite faiblement convergente $\dot{x}_n \to y$. Ainsi on a $x_n(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}_n(\tau)\,d\tau$, d'où pour tout t, $x_0(t) = x_0 + \int_0^t y(\tau)\,d\tau$, c'est-à-dire $y(t) = \dot{x}_0(t)$ pour presque tout $t \in [0, T]$.

Notons par S le support de la fonction D, c'est-à-dire

$$S(t, x, pd) = \sup\,[D(t, x, 0), d], \quad d \in \mathrm{R}^n.$$

De (12), l'hypothèse (3°), pour tout $d \in \mathrm{R}^n$ et pour presque tout $t \in [0, T]$ on a

$$S(t, x_n(t), 0, d) - d'\dot{x}_n(t) - d'B(t, x_n(t), p_n)u_n(t) \geqq -|d|\,a_{p_n}(t).$$

Comme $D(\cdot, x, 0)$ est mesurable alors $S(\cdot, x_n(\cdot), 0, d)$ l'est également.

Choisissons $\varepsilon > 0$. Alors, pour n suffisamment grand et tout $t \in [0, 7]$,

$$\int_0^t \{S[t, x_n(\tau), 0, d] - d'\dot{x}_n(\tau) + d'B(\tau, x_n(\tau), p_n)u_n(\tau)\}d\tau \geqq -|d|\varepsilon.$$

De la semicontinuité de la $D(t, \cdot, 0)$ on a celle de $S(t, \cdot, 0, d)$ pour presque tout t et tout $d \in \mathrm{R}^n$. Alors $-|d|\,\varepsilon \leqq \limsup \int_0^t \{S[t, s_n(\tau), 0, d] - d'\dot{x}_n(\tau) + d'B(\tau, x_n(\tau), p_n)u_n(\tau)\,d\tau$

$\leqq \int_0^t \{S[t, x_0(\tau), 0, d] - d'\dot{x}_0(\tau) + d'B(\tau, x_0(\tau), 0)\,u_0(\tau) + \varepsilon|d|\sup\|u_n\|_2$ ce qui signifie que

$$\dot{x}_0(t) \in clco\, D(t, x_0(t), 0) + B(t, x_0(t), 0)u_0(t). \tag{13}$$

Puisque d'après l'hypothèse 5°) q^{**} est la plus grande minorante convexe de q par raport à u, alors $a|u|^2 + a_1(t)$ est également une minorante convexe et donc $q^{**}(t, x, u) \geqq a|u|^2 + a_1(t)$. Mais la fonctionelle intégrale

$$(x(\cdot), u(\cdot)) \to \int_0^T q^{**}(t, x(t), u(t))dt$$

est semicontinue inférieurement dans $(C^0([0, T] \times L_2$ — faible) (voir Lee-Markus [7]). Par conséquent

$$\int_0^T q^{**}(t, x_0(t), u_0(t))\,dt \leqq 0.$$

Selon l'hypothèse 4°), il est évident que $x_0(t) \in H(0)$. Ainsi (x_0, u_0) est un point admissible du problème (R_0). Donc $v \leqq \varphi(x_0)$ et ainsi

$$\hat{v} \leqq \limsup\, \varphi(x_n(T)) \leqq \limsup v(p_n).$$

Enfin, grâce à l'hypothèse 6°), on a $\lim v(p_n)=\widehat{v}$ ce qui signifie que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes.

Corollaire 2.1. *Si* $\varepsilon_n \to 0$ *et* (x_n, u_n) *est une solution* ε_n — *suboptimale du problème originel* (L_p), *alors elle possède un point d'adhérence dans* $C_0 \times L_2$ — *faible qui est une solution du problème relaxé* (R_0). *En partiqulier, l'ensemble des solutions* (x, u) *du problème originel* (L_p) *est semicontinu supérieurement pour* $p=0$ *dans la topologie* ($C^0 \times L_2$-*faible*).

L'hypothèse 6°) est "presque" une condition nécessaire dans le sens suivant:

Corollaire 2.2. *Si deux des conditons* 6°), (*i*) *ou* (*ii*) *sont vérifiées, la troisième l'est également.*

Exemple. On considère le problème suivant: $\varphi(x(1)) \to \min$

$$\dot{x}=u+p, \quad x(0)=0, \quad \int_0^1 u^2(t)dt \leqq 1,$$
$$u \geqq 0, \qquad x \leqq 0.$$

Il est évident que ce problème originel coïncide avec son relaxé. En plus, l'hypothèse 6°) n'est pas satisfaite puisque $v(p)=+\infty$ pour $p>0$ et $v(0)=\widehat{v}=0$. Ainsi la régularité par rapport à la fonctionnelle n'est pas vérifiée. Cependant, si la contrainte d'état est de la forme $x(t) \leqq p$, alors la solution est $u=0$, $x=tp$ pour $t \in [0, 1]$ et $v(p)=p \to 0$ lorsque $p \to 0$.

Remarque. Il est clair qu'à la place de la fonction objectif du droblème originel, on peut considérer la fonction $f(x, u)$ où $f: L_2(0, T) \times C^0(0, T) \to (-\infty, +\infty]$ est une fonctionnelle semicontinue inférieurement dans $C^0([0, T]) \times L_2$-faible.

3. Propriétés lipschitziennes de la solution. Dans ce paragraphe nous étudions les propriétés de la continuité de Lipschitz de la solution du problème de commande optimale suivant dépendant du paramètre p au voisinage de $p=0$

$$(\Gamma_p) \qquad J_p(x, u)=\int_0^T f(t, x(t), u(t), p)dt \to \min$$

s. a.

$$(14) \qquad \dot{x}(t)=A(t, p)x(t)+B(t, p)u(t), \quad x(0)=x^0,$$

$$(15) \qquad u(\cdot) \in L_2(\mathrm{R}^m, [0, T]),$$

$$(16) \qquad x(\cdot) \in W^{1,2}(\mathrm{R}^n, [0, T]),$$

$$(17) \qquad \int_0^T q(t, x(t), u(t), p)dt \leqq 0,$$

où p est de l'espace linéaire normé P, $0<T<+\infty$.

Dénotons par $(\widehat{x}_0, \widehat{u}_0)$ la solution du problème (Γ_0). Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

7°) Les éléments des matrices $A(t, p)$ et $B(t, p)$ avec les dimensions convenables sont bornées dans $[0, T] \times P$; $B(\cdot, p) \in L_1$ et $A(\cdot, p) \in L_1$ pour tout p et vérifient la condition de Lipschitz par rapport à p et $p=0$, c'est-à-dire

$$\| A(\cdot, p)-A(_{L_1}\ 0) \| L_1 \leqq c \| p \| ; \ \| B(\cdot, p)-B(\cdot, 0) \|_{L_1} \leqq c \| p \|.$$

8°) Les fonctions $f(t, x, u, p)$ et $q(t, x, u, p)$ sont convexes et deux fois différentiables au point (x, u) de $[0, T] \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \times P$ pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $p \in P$. En plus, elles-mêmes et leurs dérivées sont continues par rapport à tous leurs arguments dans $[0, T] \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \times P$. Les dérivées vérifient la condition de

Lipschitz, c'est-à-dire:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial(x, u)} f(\cdot, \widehat{x}_0, \widehat{u}_0, p) - \frac{\partial}{\partial(x, u)} f(\cdot, \widehat{x}_0, \widehat{u}_0, 0) \right\|_{L_2} \leqq c \| p \|,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial(x, u)} q(\cdot, \widehat{x}_0, \widehat{u}_0, p) - \frac{\partial}{\partial(x, u)} q(\cdot, \widehat{x}_0, \widehat{u}_0, 0) \right\|_{L_2} < c \| p \|,$$

$$\sup_p \left(\left\| \frac{\partial}{\partial u} f(\cdot, \widehat{x}_0, \widehat{u}_0, p) \right\|_{L_2} \right) < +\infty, \sup \left(\left\| \frac{\partial}{\partial u} q(\cdot, \widehat{x}_0, \widehat{u}_0, p) \right\|_{L_2} \right) < +\infty.$$

En outre, supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $x \in R^n$, $u \in R^m$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^T \frac{\partial^2}{\partial(x, u)^2} f(t, x, u, 0) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \geqq \alpha | u |^2.$$

9°) Il existe une commande continue $\overline{u} \in L_2$ et $\beta < 0$ telle que

$$\int_0^T q_j(t, \overline{x}, \overline{u}, 0) dt < \beta,$$

où $j = 1, \ldots, N$; $\overline{x}$ est la trajectoire correspondante à la commande $\overline{u}$.

10°) La matrice

$$M(0) = \int_0^T \frac{\partial}{\partial u} q(t, \widehat{x}_0(t), \widehat{u}_0(t), 0) \frac{\partial}{\partial u} q(t, \widehat{x}_0(t), \widehat{u}_0(t), 0) dt$$

est définie positive.

Introduisons la fonctionnelle de Lagrange du problème (Γ_p):

$$(18) \qquad L_p(x, u, \gamma, \lambda, p) J_p(x, u) + \int_0^T \gamma(t) (\dot{x}(t) - A(t, p) x(t) - B(t, p) u(t)) dt + \lambda^T \int_0^T q(t, x(t), u(t), p) dt,$$

où

$$\gamma(\cdot) \in L_2(R^n, [0, T]), \lambda \in R^N, \lambda \geqq 0.$$

Lemme 3.1. *Il existe un voisinage de zéro N, tel que pour tout $p \in N$ il existe une solution unique $(\widehat{x}_p, \widehat{u}_p)$ du problème (Γ_p) et les multiplicateurs de Lagrange $\widehat{\gamma}_p$, $\widehat{\lambda}_p$ sont tels que*

$$(19) \qquad J_p(\widehat{x}_p, \widehat{u}_p) = \min \{ L_p(x, u; \widehat{\gamma}_p, \widehat{\lambda}_p, p), x(\cdot) \in W^{1/2}(R^n, [0, T]), x(0) = x^0, u(\cdot) \in L_2(R^m, [0, T]) \}.$$

En outre, les relations suivantes sont vérifiées

$$(20) \qquad \frac{\partial}{\partial u} f(t, \widehat{x}_p(t), \widehat{u}_p(t), p) - B^T(t, p) \widehat{\gamma}_p(t) + \frac{\partial}{\partial u} q^T(t, \widehat{x}_p(t), \widehat{u}_p(t), p) \widehat{\lambda}_p = 0$$

$$(21) \qquad \dot{\widehat{\gamma}}_p(t) = -A^T(t, p) \widehat{\gamma}_p(t) + \frac{\partial}{\partial x} f(t, \widehat{x}_p(t), \widehat{u}_p(t), p) + \frac{\partial}{\partial x} q^T(t, \widehat{x}_p(t), \widehat{u}_p(t), p) \widehat{\lambda}_p; \quad \widehat{\gamma}_p(T) = 0.$$

$$(22) \qquad \widehat{\lambda}_p^T \int_0^T q(t, \widehat{x}_p(t), \widehat{u}_p(t), p) dt = 0.$$

Démonstration. L'existence de la solution unique du problème (Γ_p) résulte du fait que la fonctionnelle $J_p(u)=J_p(x_n, u)$ est fortement convexe (hypothèse 8°). Pour le reste de la démonstration, nous utiliserons le schéma universel basé sur le théorème de séparation des ensembles convexes (par exemple le théorème de Hahn-Banach) comme cela a été fait dans l'article de Hager et Mitter [6]. Ainsi nous obtiendrons l'existence des multiplicateurs de Lagrange

$$\widehat{\gamma}_p(\cdot)\in L_2([0,\ T]),\ \widehat{\lambda}_p\in \mathrm{R}^N,\ \widehat{\lambda}_p\geqq 0 \quad \text{tels que } L_p(\widehat{x}_p, \widehat{u};\ \widehat{\lambda}_p,\ p)\geqq J_p(\widehat{x}_p, \widehat{u}_p)$$

et

$$\widehat{\lambda}_p^T \int_0^T q(t,\ \widehat{x}_p(t),\ \widehat{u}_p(t),\ p)dt=0.$$

De là, en combinant ce résultat avec le théorème de la faible dualité, nous déduirons la relation (19). En ce qui concerne (20) et (21), on les obtient en calculant la différentielle de la fonctionnelle de Lagrange (18) par raport à x et u.

Soit p un élément fixé. En définissant la fonction d'Hamilton du problème (Γ_p) on aura

$$H_p(t,\ u,\ p) = -f(t,\ \widehat{x}_p(t),\ u,\ p)+\widehat{\gamma}_p^T(t)B(t,\ p)u-q^T(t,\ \widehat{x}_p(t),\ u,\ p)\widehat{\lambda}_p. \tag{23}$$

Nous constatons qu'elle est fortement convexe par raport à u, uniformément en t dans l'intervalle $[0,\ T]$. En exprimant la condition d'optimalité (20) en fonction de (23) on aura

$$\frac{\partial}{\partial u}H_p(t,\ \widehat{u}_p(t),\ p)=0 \qquad \text{pour presque tout } t\in[0,\ T].$$

La convexité forte de $H_p(t, \cdot, p)$ uniformément en t nous conduit à: $\alpha/\widehat{u}_p(t)-\overline{u}(t)/ \leqq / \frac{\partial}{\partial u}H_p(t, \overline{u}(t), p)/$. Ainsi, de la continuité de $\overline{u}$, il suit que $\widehat{u}_p\in L_\infty(0,\ T)$ pour tout $p\in N$.

Pour la suite, nous dénotons par c toutes les constantes indépendantes de p et t, pouvant être différentes dans différents cas.

Lemme 3.2. $\|\widehat{x}_p-\widehat{x}_0\|_C\leqq c(\|\widehat{u}_p-\widehat{u}_0\|_{L_2}+\|p\|)$.

Démonstration. Dénotons par $x_p(t)$ et $x_0(t)$ les solutions du système d'état (14) pour p et l'élément fixe $p=0$. Alors, selon la formule de Cauchy, on a

$$x_p(t)=\Phi(t,\ 0,\ p)x^0 + \int_0^t \Phi(t,\ s,\ p)B(s,\ p)\widehat{u}_p(s)\,ds,$$

$$x_0(t)=\Phi(t,\ 0,\ 0)x^0 + \int_0^t \Phi(t,\ s,\ 0)B(s,\ 0)\widehat{u}_0(s)ds,$$

où $\Phi(t,\ p)$ est la solution fondamentale du système d'état (14). Ainsi

$$x_p(t)-x_0(t)=(\Phi(t,\ 0,\ p)-\Phi(t,\ 0,\ 0))x^0$$

$$+\int_0^t (\Phi(t,\ s,\ p)\,B(s,\ p)\widehat{u}_p(s)-\Phi(t,\ s,\ 0)B(s,\ 0)\widehat{u}_0(s))\,ds.$$

D'ici, en utilisant l'hypothèse (7°) nous obtenons

$$x_p(t)-x_0(t)=k_1\|p\|+\int_0^t k_2\,|\widehat{u}_p(s)-\widehat{u}_0(s)|ds,$$

où k_1 et k_2 sont des constantes convenables.

Ainsi en appliquant le lemme de Gronwall nous aurons le résultat désiré.

Lemme 3.3. $\limsup_{p\to 0}(\|\widehat{u}_p\|_{L_\infty}+\|\widehat{\gamma}_p\|_C+|\widehat{\lambda}_p|)<+\infty$.

Démonstration. Soit $p\to 0$. De l'inégalité $J_p(\widehat{x}_p,\widehat{u}_p)\leqq L_p(\bar{x},\bar{u},\gamma_p,\lambda_p,p)$ on a:
$J_p(\widehat{x}_p,\widehat{u}_p)-J_p(\bar{x},\bar{u})\leqq\lambda_p^T\int_0^T q(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),p)\,dt$. De l'hypothèse (9°) nous obtenons

$$J_p(\widehat{x}_p,\widehat{u}_0)-J_p(\bar{x},\bar{u})\leqq B\sum_{j=1}^N\lambda_p^T j\leqq 0,$$

d'où

$$\sup_p(|\widehat{\lambda}_p|)<+\infty.$$

D'autre part, de (21), on a

$$\widehat{\gamma}_p(t)=-\int_t^T\Phi(T,s,p)\Big(\frac{\partial}{\partial x}f(s,\widehat{x}_p(s),\widehat{u}_p(s),p)+\frac{\partial}{\partial x}q^T(s,\widehat{x}_p(s),\widehat{u}_p(s),p)\widehat{\lambda}_p\Big)ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient:

$$\sup_p(\|\widehat{\gamma}_p\|_C)<+\infty.$$

On sait aussi que $\frac{\partial}{\partial u}H_p(t,\widehat{u}_p(t),p)=0$ pour presque tout $t\in[0,T]$. La convéxité forte de la fonction d'Hamilton $H_p(t,\cdot,p)$ uniformément en t et p nous conduit à l'inégalité

$$\alpha|\widehat{u}_p(t)-\bar{u}(t)|\leqq\Big|\frac{\partial}{\partial u}H_p(t,\bar{u}(t),p)\Big|.$$

Par conséquent

$$\sup_p(\|\widehat{u}_p\|_{L_\infty})<+\infty.$$

Lemme 3.4.

$$\|\widehat{u}_p-\widehat{u}_0\|_{L_2}\leqq c(\|p\|^{0.5}).$$

Démonstration. Du théorème de dualité, on sait qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange $\widehat{\gamma}_p$, $\widehat{\lambda}_p$, $\widehat{\lambda}_p\geqq 0$, tels que l'unique solution $(\widehat{x}_p,\widehat{u}_p)$ du problème (Γ_p) soit caractérisée par le point selle de la fonctionnelle de Lagrange, c'est-à-dire

$$L_p(\widehat{x}_p,\widehat{u}_p,\gamma,\lambda,p)\leqq L_p(\widehat{x}_p,\widehat{u}_p,\widehat{\gamma}_p,\widehat{\lambda}_p,p)\leqq L_p(x,u,\widehat{\gamma}_p,\widehat{\lambda}_p,p)\tag{24}$$

pour tout $u\in L_2$, $x\in W^{1,2}(0,T)$, $x(0)=x^0$ et pour tout $\gamma\in L_2$, $\lambda\in\mathbb{R}^N$, $\lambda\geqq 0$.

Ainsi grâce à la convexité de L_p et en utilisant le développement en série de Taylor en $\widehat{u}_0$ nous aurons

$$\begin{aligned}J_p(\widehat{x}_p,\widehat{u}_p)&\geqq J_p(\widehat{x}_0,\widehat{u}_0)+<\gamma_0,(A(t,p)-A(t,0))x_0+(B(t,p)\\&-B(t,0))\widehat{u}_0>+\lambda_0^T\int_0^T(q(t,\widehat{x}^0(t),\widehat{u}_0(t),p)-q(t,\widehat{x}_0(t),\widehat{u}_0(t),0))\,dt\\&+<\frac{\partial}{\partial u}f(\cdot,\widehat{x}_0(\cdot),\widehat{u}_0(\cdot),p)-B^T(\cdot,p)\widehat{\gamma}_0(\cdot)+\frac{\partial}{\partial u}q^T(\cdot,\widehat{x}_0(\cdot),\widehat{u}_0(\cdot),p)\lambda_0,\\&\widehat{u}_p-\widehat{u}_0>+<\frac{\partial}{\partial x}f(\cdot,\widehat{x}_0(\cdot),\widehat{u}_0(\cdot),p)-A^T(\cdot,p)\widehat{\gamma}_0(\cdot)+\frac{\partial}{\partial x}q^T(\cdot,\widehat{x}_0(\cdot),\end{aligned}\tag{25}$$

$$\widehat{u}_0(\cdot),\ p)\widehat{\lambda}_p,\ \widehat{x}_p-\widehat{x}_0> + <\gamma_0,\ \widehat{\dot{x}}_p-\widehat{\dot{x}}_0>+\alpha\|\widehat{u}_p-\widehat{u}_0\|^2_{L_2}.$$

D'autre part, on a

$$J_p(\widehat{x}_p,\ \widehat{u}_p)\leqq J_p(\widehat{x}_0,\ \widehat{u}_0)+<\gamma_p,\ (A(t,\ p)-A(t,\ 0))x_0+(B(t,\ p) \tag{26}$$

$$-B(t,\ 0))\widehat{u}_0> + \lambda_o^T\int_0^T (q(t,\ \widehat{x}_0(t),\ \widehat{u}_0(t),\ p)-q(t,\ \widehat{x}_0(t),\ \widehat{u}_0(t),\ 0))\,dt.$$

De là, en combinant (25) et (26) après avoir integré par partie le terme $\langle\gamma_0,\ \widehat{\dot{x}}_p-\widehat{\dot{x}}_0\rangle$ dans (25) et en tenant compte de la condition d'optimalité, nous aurons

$$\|\widehat{u}_p-\widehat{u}_0\|^2_{L_2}\leqq c\{\|p\|(\|\widehat{u}_p-\widehat{u}_0\|_{L_2}+\|\widehat{x}_p-\widehat{x}_0\|_C+\|\gamma_p-\gamma_0\|)\} \tag{27}$$

$$+(\lambda_p^T-\lambda_0^T)\int_0^T (q(t,\ \widehat{x}_0(t),\ \widehat{u}_0(t),\ p)-q(t,\ \widehat{x}_0(t),\ \widehat{u}_0(t),\ 0))\,dt.$$

En appliquant les lemmes 3.2 et 3.3 à (27) nous aboutissons au résultat désiré.

L e m m e 3.5.

$$|\widehat{\lambda}_p=\widehat{\lambda}_0|\leq c(\|\widehat{u}_p-u_0\|_{L_2}+\|p\|). \tag{28}$$

D é m o n s t r a t i o n. Dénotons par $\Delta u=\widehat{u}_p-\widehat{u}_0$, $\Delta x=\widehat{x}_p-\widehat{x}_0$, $\Delta\gamma=\widehat{\gamma}_p-\widehat{\gamma}_0$, $\Delta\lambda=\widehat{\lambda}_p-\widehat{\lambda}_0$, $\Delta\frac{\partial}{\partial u}f=\frac{\partial}{\partial u}f(t,\widehat{x}_p(t),\widehat{u}_p(t),p)-\frac{\partial}{\partial u}f(t),\ \widehat{x}_0(t),\ \widehat{u}_0(t),0)$, $\Delta\frac{\partial}{\partial u}q=\frac{\partial}{\partial u}q(t),\widehat{x}_p(t),\ \widehat{u}_p(t),\ p)-\frac{\partial}{\partial u}q(t,\ \widehat{x}_0(t),\ \widehat{u}_0(t),\ 0)$.

Des conditions d'optimalité pour les problèmes (Γ_p) et (Γ_0) nous obtenons

$$\Delta\frac{\partial}{\partial u}f+B^T(t,\ p)\Delta\gamma+(B^T(t,\ p)-B^T(t,\ 0))\widehat{\gamma}_0+\frac{\partial}{\partial u}q^T(t,\ \widehat{x}_0(t),\ \widehat{u}_0(t),\ 0) \tag{29}$$

$$\Delta\lambda+\Delta\frac{\partial}{\partial u}q^T\widehat{\lambda}_p=0.$$

Multiplions l'expression (29) par $\frac{\partial}{\partial u}q(t,\ \widehat{x}_0(t),\ \widehat{u}_0(t),\ 0)$ et intégrons sur l'intervalle $[0,\ T]$. En utilisant les hypothèses 7°)—10°) et les lemmes 3.2 et 3.3 on trouve

$$|\Delta\lambda|\leqq c(\|\Delta u\|_{L_2}+\|\Delta\gamma\|_C+\|p\|). \tag{30}$$

D'une manière similaire, de (21), nous obtenons

$$\|\Delta\gamma\|_C\leqq c(\|\Delta u\|_{L_2}+\|p\|). \tag{31}$$

Par conséquent, en remplaçant (31) dans (30) nous obtenons le résultat désiré.

L e m m e 3.6. $|\Delta\lambda|+\|\Delta\gamma\|_C+\|\Delta x\|_C\leqq c\|p\|$.

D e m o n s t r a t i o n. En remplaçant (28) et (31) dans (27) et en utilisant l'hypothèse 8°), le lemme 3.2 nous obtiendrons

$$\|\widehat{u}_p-\widehat{u}_0\|_{L_2}\leqq c\|p\|. \tag{32}$$

Alors grâce aux lemmes 3.2 et 3.5 nous avons

$$|\Delta\lambda|+\|\Delta\gamma\|_C+\|\Delta x\|_C\leqq c\|p\|.$$

Théorème 3.1. *Si les hypothèses* 7°)—10°) *sont satisfaites alors, on a*

$$\| \Delta u \|_C \leqq c \| p \|.$$

Démonstration. De la convexité forte de la fonction d'Hamilton on a

$$\alpha |\widehat{u}(t) - \widehat{u}_0(t)| \leqq | \frac{\partial}{\partial u} H_p(t, \widehat{u}_p(t), p) - \frac{\partial}{\partial u} H_p(t, \widehat{u}_p(t), 0)|.$$

D'après le lemme 3.6, le second membre de l'inégalité s'évalue avec $c \| p \|$ ce qui termine la démonstration.

Exemple. $\int_0^1 u^2(t)dt \to \min$

(33) $$\dot{x}(t) = A(t, p)x(t) + B(t, p)u(t), \quad x(0) = x^0,$$

(34) $$x(1) \geqq 0, \ u \in L_2(0, 1),$$

où $A(\cdot, p)$ et $B(\cdot, p)$ vérifient l'hypothèse 7°). Il est aussi évident que la fonctionnelle (fonction objectif) satisfait l'hypothèse 8°) tandis que la contrainte d'état peut s'écrire comme

$$\Phi(1, 0, p)x^0 + \int_0^1 \Phi(1, t, p) B(t, p)u(t)dt \geqq 0.$$

Quant à l'hypothèse 9°), elle nous conduit à l'existence de la commande $\bar{u} \in L_2$ telle que $x[1, \bar{u}] > 0$. Pour terminer, l'hypothèse 10°) a la forme suivante: La matrice

$$M(0) = \int_0^1 B^T(t, 0)\Phi^T(1, t, 0)\Phi(1, t, 0)B(t, 0)dt$$

doit être inversible. Mais cette hypothèse est équivalente à la controlabilité du système (33). Au cas où les matrices A et B ne dépendent pas du temps, l'hypothèse de controlabilité est équivalente à la condition algébrique suivante:

$$\text{rang}\,[B(0), A(0)B(0), \ldots, A^{n-1}(0)B(0)] = n,$$

ce qui signifie que l'hypothèse 10°) est naturelle dans le cadre du problème considéré.

BIBLIOGRAPHIE

1. N. N. Bogolubov. Sur quelques méthodes nouvelles dans le calcul des variations. *Ann. di math. pura e appl.*. ser. 4, 7, 1930, 249-271.
2. Т. Гичев. Корректность задач оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества. *Сердика*, 2, 1976, 334-342.
3. L. A. Dontchev. Perturbations. approximations and sensitivity analysis of optimal control systems' *Lecture notes control Inf. Sci.*, 52, Berlin, 1983.
4. L. A. Dontchev, B. Mordukhovic. Relaxation and well-posedness of nonlinear optimal processes. *Systems and control letters*, 3, 1983, 177-179.
5. I. Ekeland, R. Temam. Analyse convexe et problèmes varitionnnels. Paris, 1974.
6. W. Hager, S. K. Mitter. Lagrange duality theory; for convex control problems. *SIAM J. Contr. Optim.*, 14, 1976, 856-883.
7. Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М., 1972.
8. T. Zolezzi. Well-posedness and stability analysis in optimization. *Proc. Journées Fermat*, Toulouse, 1985.

Institute of Mathematics
P. O. Box 373
1090 Sofia, Bulgaria

Received 5. 12. 1989
Revised 15. 03. 1990