Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

СЛАБАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОГРАММНЫХ МАШИН

АНАТОЛИЙ О. БУДА

В работе вводится понятие слабой эквивалентности недетерминированных программных машин. Доказывается, что слабая эквивалентность разрешима. Разрешающая процедура базируется на алгоритме Килдалла для анализа графов потока данных.

1. Введение. В работе [1] введено понятие недетерминированной программной машины (нп-машины) и доказано, что функциональная эвивалентность нп-машин неразрешима. В настоящей работе мы рассматриваем другую, более слабую, эквивалентность нп-машин и доказывам, что она разрешима. Разрешающая процедура базируется на алгоритме Килдалла [4]. Для этой цели мы сводим проблему слабой эквивалентности нп-машин к проблеме построения полной системы инвариантов для графов потока данных для случая некоторой дистрибутивной информационной модели. Эта модель является обобщением свободной информационной модели, рассматриваемой в работах [2,3], и вводится впервые в настоящей работе.

2. Основные понятия. В этом разделе мы приводим для полноты и с некоторыми видоизменениями необходимые нам понятия из работ [1—3] и некоторые новые основные понятия.

Зафиксируем некоторое натуральное число $n \in N=\{1, 2, 3, \ldots\}$. Множество переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ будем обозначать через X_n. Рассмотрим некоторое конечное множество $F=F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_m$, где F_i — функциональные символы арности i (множество F_0 объединяет все функциональные константы). Функция $d: F \to N$ определяется соотношением: $d(f)=i \Leftrightarrow f \in F_i$.

Множество $T_{n,F}$ есть наименьшее множество U, такое, что:

(i) $X_n \subseteq U$; $F_0 \subseteq U$;

(ii) если $t_1, \ldots, t_k \in U$; $f \in F_k$, $k>0$, то $f(t_1, \ldots, t_k) \in U$.

Множество всех n-ок $(T_1, \ldots, T_n)$, таких, что $T_1, \ldots, T_n \subseteq T_{n,F}$, будем обозначать $\Omega_{n,F}$. Множество всех n-ок $(t_1, \ldots, t_n)$, таких, что $t_1, \ldots, t_n \in T_{n,F}$, будем обозначать $\mathcal{T}_{n,F}$, но отождествлять с подмножеством множества $\Omega_{n,F}$, которое образует все элементы $\Omega_{n,F}$ вида $(\{t_1\}, \ldots, \{t_n\})$. Если $\omega=(T_1, \ldots, T_n) \in \Omega_{n,F}$, то запись $pr_i\omega$ будет использоваться для обозначения i-ой компоненты n-ки ω, а запись $f(T_1, \ldots, T_k)$, где $f \in F_k$, $T_1, \ldots, T_k \subseteq T_{n,F}$, — для обозначения множества $\{f(t_1, \ldots, t_k) \mid t_1 \in T_1, \ldots, t_k \in T_k\}$ (если при некотором $i=1, \ldots, k$ $T_i=\emptyset$, то $f(T_1, \ldots, T_k)=\emptyset$)

Пусть $t \in T_{n,F}$, $\omega \in \Omega_{n,F}$. Обобщенная подстановка $t[\omega]$ определяется по индукции:

(1) $$\text{если } t=x_i \in X_n, \text{ то } t[\omega]=pr_i\omega;$$

(2) $$\text{если } t \in F_0, \text{ то } t[\omega]=\{t\};$$

(3) $$\text{если } t=f(t_1, \ldots, t_k),\ t_1, \ldots, t_k \in T_{n,F},\ f \in F_k, \text{ то}$$
$$t[\omega]=f(t_1[\omega], \ldots t_k[\omega]).$$

Если $T \subseteq T_{n,F}$, $\omega \in \Omega_{n,F}$, то по определению полагаем

$$T[\omega]=\{t[\omega] \mid t \in T\} \text{ (если } T=\emptyset, \text{ то } T[\omega] \overset{df}{=} \emptyset).$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том. 16, 1990, с. 249—255.

Бинарную операцию произведения определим на $\Omega_{n,F}$ следующим соотношением

$$\omega_1 \circ \omega_2 \stackrel{df}{=} (pr_1\omega_2[\omega_1], \ldots, pr_n\omega_2[\omega_1]).$$

Элемент $(x_1, \ldots, x_n)$ множества $\mathscr{T}_{n,F}$, отождествляемый с элементом $(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\})$ множества $\Omega_{n,F}$, будем обозначать e_n.

Утверждение 1. *Пара* $(\Omega_{n,F}, \circ)$ *образует полугруппу, единицей которой является* e_n.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству того, что пара $(\mathscr{T}_{n,F}, \circ)$ образует полугруппу с единицей e_n (смотри [1]).

Заметим, что на множестве $\mathscr{T}_{n,F}$ определение операции произведения совпадает со старым определением этой операции [1], поэтому $\mathscr{T}_{n,F}$ можно рассматривать как подполугруппу $\Omega_{n,F}$.

Определим операцию пересечения $\omega_1 \cap \omega_2$ для произвольных ω_1, $\omega_2 \in \Omega_{n,F}$ следующим образом:

$$\omega_1 \cap \omega_2 \stackrel{df}{=} (pr_1\omega_1 \cap pr_1\omega_2, \ldots, pr_n\omega_1 \cap pr_n\omega_2),$$

где операция пересечения для компонент понимается в обычном теоретико-множественном смысле.

Будем обозначать через $\Sigma_{n,F}$ множество всех конечных непустых подмножеств множества $\Omega_{n,F}$. Если $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_{n,F}$, то операция произведения („$\circ$") определяется следующим образом:

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \{\omega_1 \circ \omega_2 \mid \omega_1 \in \sigma_1, \ \omega_2 \in \sigma_2\}.$$

Утверждение 2. *Пара* $(\Sigma_{n,F}, \circ)$ *образует полугруппу, единицей которой является* $\{e_n\}$.

Для доказательства этого утвержения достаточно отметить, что операция "$\circ$" на $\Omega_{n,F}$ является ассоциативной и при переходе к подмножествам ассоциативность сохраняется.

Операция пересечения ("$\cap$") на $\Sigma_{n,F}$ для произвольных $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_{n,F}$ определяется следующим образом:

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \{\omega_1 \cap \omega_2 \mid \omega_1 \in \sigma_1, \ \omega_2 \in \sigma_2\}.$$

Через $\Pi_{n,F}$ будем обозначать подмножество множества $\Sigma_{n,F}$, которое состоит из всех конечных подмножеств множества $\mathscr{T}_{n,F}$ (последнее, как уже отмечалось, мы отождествляем с подмножеством множества $\Omega_{n,F}$). Очевидно, что $\Pi_{n,F}$ образует по отношению к операции произведения „$\circ$" полугруппу с единицей и замкнуто относительно операции пересечения.

3. Определение слабой эквивалентности нп-машин. В данной работе мы будем использовать несколько иное, чем в [1] определение нп-машины, не ограничивая, тем не менее, общности рассмотрения слабой эквивалентности нп-машин, так как для нп-машин M_1, M_2 в старом смысле с помощью известной конструкции подмножеств мы можем построить нп-машины M_1', M_2' в новом смысле, такие, что M_1 M_2 будут слабо эквивалентны тогда и только тогда, когда M_1', M_2' слабо эквивалентны.

Пусть $(\Pi_{n,F}, \circ)$ — обобщенная полугруппа подстановок, C^* — свободная полугруппа над конечным алфавитом C с единицей e.

Недетерминированная программная машина (нп-машина) M над C, X_n, F содержит:

1) конечное множество состояний S;
2) начальное состояние $s_0 \in S$;
3) множество конечных состояний $S' \subseteq S$;
4) однозначную функцию переходов $\mu: S \times C \to S$;
5) однозначную функцию выходов $\lambda: S \times C \to \Pi_{n,F}$;

Функции μ, λ распространяются на C^* обычным образом:

(i) $\mu(s, e)=s$; $\lambda(s, e)=\{e_n\}$;
(ii) если $u=u'c \in C^*$, то

$$\mu(s, u)=\mu(\mu(s, u'), c),$$
$$\lambda(s, u)=\lambda(s, u') \circ \lambda(\mu(s, u'), c).$$

Нп-машина M вычисляет частичную функцию

$$F_M: C^* \to p(T_{n,F}),$$

определяемую соотношением

$$F_M(u)=pr_1\lambda(s_0, u)$$

($p(T_{n,F})$ — множество всех конечных непустых подмножеств множества $T_{n,F}$). для всех $u \in C^*$, таких, что $\mu(s_0, u) \in S'$.
Множество

$$\mathrm{Def}(F_M)=\{u \in C^* \mid \mu(s_0, u) \in S'\}$$

называется областью определения F_M.

Говорим, что нп-машины M, M' слабо эквивалентны ($M \simeq M'$), если области определения F_M, $F_{M'}$ равны и для всех u из области определения

$$F_M(u) \cap F_{M'}(u) \neq \varnothing.$$

4. Обобщенная свободная информационная модель. В работах [2,3] рассматривается свободная информационная модель. Для построения разрешающей процедуры для слабой эквивалентности нп-машин нам потребуется обобщить это понятие. Но сначала напомним понятие дистрибутивной информационной модели, которое можно найти, например, в работе [5].

Полурешетка $(L, \wedge)$ называется ограниченной, если для произвольного $y \in L$ длина произвольной последовательности $y_1=y, y_2, \ldots, y_n$ элементов из L, такой, что

$$y_{i+1} \nsubseteq y_i \quad (i=1, \ldots, n-1),$$

ограничена некоторой зависящей от y константой.

Следуя [5], дистрибутивной информационной моделью назовем тройку $(L, \wedge, \Phi)$, где $(L, \wedge)$ — ограниченная полурешетка, которая имеет нулевой элемент, но может не иметь единичного элемента, а Φ — множество функций вида $\varphi: L \to L$, которое удовлетворяет следующим условиям:

[C1] для каждой $\varphi \in \Phi$ и каждых $y_1, y_2 \in L$ выполнено свойство дистрибутивности: $\varphi(y_1 \wedge y_2)=\varphi(y_1) \wedge \varphi(y_2)$ (таким образом, каждая функция является гомоморфизмом на L);

[C2] Φ содержит тождественную функцию, то есть такую функцию ε, что для каждого $y \in L$ $\varepsilon(y)=y$;

[C3] Φ замкнуто относительно операции суперпозиции функций, то есть, если $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, то $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \Phi$, где операция суперпозиции определяется соотношением:

$$(\forall y \in L)[\varphi_1 \circ \varphi_2(y)=\varphi_2(\varphi_1(y))].$$

[C4] L является минимальным множеством, содержащим нулевой элемент и замкнутым относительно операции $\wedge$ и функций из Φ.

Пусть теперь фиксированы некоторое множество переменных X_n и конечное множество функциональных символов F. Рассмотрим подмножество $L_{n,F}$ множества $\Omega_{n,F}$, которое выделяется следующим условием:

$\omega \in L_{n,F} \Leftrightarrow \exists \tau \in \mathscr{T}_{n,F}$, что ω — максимальное решение уравнения

$$\tau \circ X=\tau \tag{1}$$

(то есть $\tau \circ \omega=\tau$, причем для произвольного ω', такого что $\tau \circ \omega'=\tau$, $\omega' \subseteq \omega$). Если ω — максимальное решение (1), то будем говорить, что ω является характеристикой τ (писать $\chi(\tau)=\omega$), а τ является представителем ω.

Множество функций $\Phi_{n,F}$ определяется с помощью элементов из $\mathcal{T}_{n,F}$, а именно, каждому $\tau \in \mathcal{T}_{n,F}$ отвечает некоторый элемент $\varphi \in \Phi_{n,F}$ — функция из $L_{n,F}$ в $L_{n,F}$. Когда такое соответствие известно, будем писать $\varphi = \langle\tau\rangle$.

Пусть $\tau \in \mathcal{T}_{n,F}$, $\omega \in L_{n,F}$. Тогда по определению положим, что $\langle\tau\rangle(\omega)$ есть максимальное решение уравнения

$$\tau' \circ \tau \circ X = \tau' \circ \tau,$$

где τ' произвольный представитель ω, то есть $\chi(\tau') = \omega$.

В работе [3] доказано, что тройка $(L_{n,F}, \cap, \Phi_{n,F})$ является дистрибутивной информационной моделью. Используя этот факт и некоторые результаты из [3], здесь мы определяем некоторое обобщение этой модели и доказываем ее дистрибутивность.

Рассмотрим подмножество $M_{n,F}$ множества $\Sigma_{n,F}$, которое выделяется следующим образом:

$\sigma \in M_{nF} \Leftrightarrow \exists \pi \in \Pi_{n,F}$, такое, что

$$\sigma = \{\omega \mid \omega = \chi(\tau);\ \tau \in \pi\}.$$

Такое π будем называть представителем σ, а σ — характеристикой π (писать $\chi(\pi) = \sigma$)

Множество $\Psi_{n,F}$ — множество функций из $M_{n,F}$ в $M_{n,F}$ определяется с помощью элементов π из $\Pi_{n,F}$ следующим образом. Каждому $\pi \in \Pi_{n,F}$ сопоставим функцию $\langle\pi\rangle$ такую, что по определению

(2) $$(\forall \sigma \in M_{n,F})[\langle\pi\rangle(\sigma) = \{\langle\tau\rangle(\omega) \mid \tau \in \pi;\ \omega \in \sigma\}].$$

Таким образом, $\psi \in \Psi_{n,F}$ тогда и только тогда, когда $\psi = \langle\pi\rangle$ для некоторого $\pi \in \Pi_{n,F}$. Отметим, что определение (2) корректно, так как для каждого $\tau \in \mathcal{T}_{n,F}$ функция $\langle\tau\rangle$ — однозначна ([3], утверждение 8).

Теорема 1. *Тройка $(M_{n,F}, \cap, \Psi_{n,F})$ — дистрибутивная информационная модель.*

Доказательство. Покажем сначала, что множество $M_{n,F}$ замкнуто относительно операции пересечения.

Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in M_{n,F}$. По определению операции пересечения для $\Sigma_{n,F}$ имеем $\omega \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ тогда и только тогда, когда $\omega = \omega_1 \cap \omega_2$ для некоторых $\omega_1 \in \sigma_1$, $\omega_2 \in \sigma_2$. Так как $\omega_1, \omega_2 \in L_{n,F}$ а $L_{n,F}$ замкнуто относительно операции пересечения [3, теорема 1], то $\omega \in L_{n,F}$ и $\omega = \chi(\tau)$ для некоторого $\tau \in \mathcal{T}_{n,F}$. Для каждого $\omega \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ зафиксируем произвольный представитель ω, который обозначим через τ_ω. Рассмотрим множество

$$\pi = \{\tau_\omega \mid \omega \in \sigma_1 \cap \sigma_2\}.$$

Очевидно, что π — представитель $\sigma_1 \cap \sigma_2$, то есть $\sigma_1 \cap \sigma_2 \in M_{n,F}$.

Аксиомы полурешетки для $M_{n,F}$ являются непосредственными следствиями соответствующих законов для теоретико-множественного пересечения. Нулем полурешетки $(M_{n,F}, \cap)$ является элемент $\{e_n\} = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$. Ограниченность $(M_{n,F}, \cap)$ следует из конечности каждого множества σ, принадлежащего $M_{n,F}$, и конечности $pr_i\omega$ $(i = 1, \ldots, n)$ для каждого ω, принадлежащего σ.

Докажем теперь выполнимость условий [C1]—[C4] для функций из $\Psi_{n,F}$.

$$[\text{C1}]\ \psi(\sigma_1 \cap \sigma_2) = \psi(\sigma_1) \cap \psi(\sigma_2).$$

Пусть $\psi = \langle\pi\rangle$. $\omega \in \langle\pi\rangle(\sigma_1 \cap \sigma_2) \Leftrightarrow \omega = \langle\tau\rangle(\omega')$, $\tau \in \pi$, $\omega' \in \sigma_1 \cap \sigma_2$.
Но $\omega' \in \sigma_1 \cap \sigma_2 \Leftrightarrow \omega' = \omega_1 \cap \omega_2$, $\omega_1 \in \sigma_1$, $\omega_2 \in \sigma_2$.

То есть $\omega = \langle\tau\rangle(\omega_1 \cap \omega_2)$, что равно, по теореме 1 из [3], $\langle\tau\rangle(\omega_1) \cap \langle\tau\rangle(\omega_2)$, то есть

$$\omega \in \langle\pi\rangle(\sigma_1 \cap \sigma_2) \Leftrightarrow \omega \in \langle\pi\rangle(\sigma_1) \cap \langle\pi\rangle(\sigma_2).$$

[C2] Единичной функцей является $\langle\{e_n\}\rangle$. По определению $\Psi_{n,F}$ $\langle\{e_n\}\rangle(\sigma) = \sigma$ для любого $\sigma \in M_{n,F}$.

[C3] Суперпозицей функций $\langle\pi_1\rangle$ и $\langle\pi_2\rangle$ является функция $\langle\pi_1 \circ \pi_2\rangle$. Действительно для произвольного $\sigma \in M_{n,F}$ имеем

$$\langle\pi_2\rangle(\langle\pi_1\rangle(\sigma))=\{\langle\tau_2\rangle(\langle\tau_1\rangle((\omega))\mid\tau_2\in\pi_2,\ \tau_1\in\pi_1,\ \omega\in\sigma\}$$

$$\langle\pi_1\circ\pi_2\rangle(\sigma)=\{\langle\tau\rangle(\omega)\mid\tau\in\pi_1\circ\pi_2,\ \omega\in\sigma\},$$

а по теореме 1 из работы [3] эти множества равны.

[С4] Очевидно, что если $\sigma\in M_{n,F}$, то σ можно получить из $\{e_n\}=0$ только с помощью одной операции из $\Psi_{n,F}$. Действительно, если π — представитель σ, то $\langle\pi\rangle(0,=\sigma$. Этим доказательство теоремы 1 завершается.

Тройку $(M_{n,F}, \cap, \Psi_{n,F})$ при фиксированных X_n, F мы будем называть обобщенной свободной информационной моделью.

Заметим, что $M_{n,F}$ не имеет единичного элемента, но для дальнейших рассмотрений удобно дополнить $M_{n,F}$ новым элементом 1 таким, что

$$(\forall\psi\in\Psi_{n,F})(\forall\sigma\in M_{n,F})[\sigma\cap 1=1\cap\sigma;\ \psi(1)=1].$$

5. Полная система инвариантов для от-графов. Пусть $I=(L, \wedge, \Phi)$ — некоторая информационная модель. Тройку $G=(Q, q_0, E)$, где Q — конечное множество вершин, $q_0\in Q$ — начальная вершина, $E\subseteq Q\times\Phi\times Q$ — конечное множество дуг, назовем графом потока данных для модели I.

Если $e=(q, \varphi, q')\in E$, то обозначим $q=\mathrm{pr}_1 e$, $\varphi=\mathrm{pr}_2 e$, $q'=\mathrm{pr}_3 e$. Обозначим также через PRED(q) множество всех таких дуг $e\in E$, что $\mathrm{pr}_3 e=q$.

Последовательность дуг $e_1 e_2 \ldots e_k$ назовем путем P от $\mathrm{pr}_1 e_1$ до $\mathrm{pr}_3 e_k$, если для $i=1, \ldots, k-1$

$$e_i\in \mathrm{PRED}\ (\mathrm{pr}_1 e_{i+1}),$$

причем будем писать $\varphi[P]$ вместо суперпозиции функций $\mathrm{pr}_2 e_1\circ \mathrm{pr}_2 e_2\circ\ldots\circ \mathrm{pr}_2 e_k$. Множество путей от начальной вершины q_0 до некоторой вершины $q\in Q$ будем обозначать PATH (q). В дальнейшем будем рассматривать только такие графы, что для любого $q\in Q$ множество PATH (q) не пусто, а также PRED $(q_0)=\varnothing$.

Проблема построения полной системы инвариантов (ПСИ-проблема) для графа потока данных G состоит в нахождении для каждого $q\in Q$ множества

$$\chi(q)=\bigcap_{P\in\mathrm{PATH}\,(q)}\varphi[P]\ (0),$$

где 0 — нулевой элемент полурешетки L информационной модели I для графа G.

Если I — обобщенная свободная информационная модель над X_n, F, то граф потока данных для I будем называть от-графом над X_n, F. Элемент $\chi(q)\in M_{n,F}$, определяемый соотношением (3), будем называть полной системой инвариантов для $q\in Q$.

Рассмотрим следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

Вход: от-граф $G=(Q, q_0, E)$ над X_n, F

Начальные значения:

$$\forall q\in Q\ \ A[q]=\begin{cases}\{e_n\}, & \text{если } q=q_0\\ 1, & \text{если } q\neq q_0.\end{cases}$$

В список активных дуг ACTIVE включаем все дуги e, выходящие из q_0 (то есть такие, что $\mathrm{pr}_1 e=q_0$).

Итерационный шаг: Выбираем произвольную дугу $e=(q', \psi, q)$ из списка ACTIVE

$$A[q]=A[q]\cap\psi(A[q'])$$

$$\mathrm{ACTIVE}=\mathrm{ACTIVE}\setminus\{e\}.$$

Если полученное значение $A[q]$ отличается от старого, то в список активных дуг ACTIVE включаем все дуги e, выходящие из q (то есть такие, что $\mathrm{pr}_1 e=q$).

Останов: Алгоритм заканчивает свою работу, если список активных дуг пуст.

Теорема 2. *Алгоритм 1, примененный к некоторому от-графу G над X_n, F, дает решение ПСИ-проблемы.*

Для доказательства достаточно отметить, что обобщенная свободная информационная модель является дистрибутивной (теорема 1), алгоритм 1 является простой модификацией алгоритма Килдалла [4], а время выполнения операций $\cap$ и ψ конечно, так как они применяются к конечным объектам.

6. Эквивалентность нп-машин. Введем некоторые обозначения. Если $\pi_1, \pi_2 \in \Pi_{n,F}$, то элемент $\pi \in \Pi_{2n,F}$ такой, что π — множество всех таких $\tau \in \mathscr{T}_{2n,F}$, что существуют $\tau_1 \in \pi_1$, $\tau_2 \in \pi_2$, для которых

$$\mathrm{pr}_i \tau = \begin{cases} \mathrm{pr}_i \tau_1, & i=1, \ldots, n \\ \mathrm{pr}_i \tau_2, & i=n+1, \ldots, 2n, \end{cases}$$

будем обозначать (π_1, π_2). Обозначим также через r_n набор $\{(x_{n+1}, \ldots, x_{2n})\}$ и через v_n элемент $\{(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n)\} \in \Pi_{2n,F}$.

Пусть $M_1=(A, a_0, A', \mu_1, \lambda_1)$,
$M_2=(B, b_0, B', \mu_2, \lambda_2)$
— нп-машины над C, X_n, F.

Построим от-граф $G=(Q, q_0, E)$ над X_{2n}, F, которой определяется следующим образом:

1) $Q=A \times B \cup \{q_0\}$;
2) $e \in E$ если и только если:
(а) $\mathrm{pr}_1 e = q_0$, $\mathrm{pr}_2 e = v_n$, $\mathrm{pr}_3 e = (a_0, b_0)$;
(б) $\mathrm{pr}_1 e = (a, b)$, $\mathrm{pr}_2 e = \langle \pi \rangle \in \Psi_{2n,F}$, $\mathrm{pr}_3 e = (a', b')$,

причем существует $c \in C$, что

$$\mu_1(a, c)=a', \quad \mu_2(b, c)=b',$$
$$\pi=(\lambda_1(a, c), \quad r_n \circ \lambda_2(b, c))$$

(в этом случае будем говорить, что e отвечает тройке (a, b, c)).

Будем обозначать через G_{12} от-граф, который получается из G удалением всех дуг и вершин, не принадлежащих ни одному пути из q_0.

Путь $P=e_0 e_1 \ldots e_k$ из q_0 в (a, b) в от-графе G_{12} отвечает $u=c_1 \ldots c_k \in C^*$, если выполнены следующие условия:

(а) $e_0=(q_0, v_n, (a_0, b_0))$; e_{i+1} отвечает (a_i, b_i, c_i), $i=0, 1, \ldots, k-1$;
(б) в нп-машине M_1 $\mu_1(a_i, c_i)=a_{i+1}$; $i=0, \ldots, k-1$; $a_k=a$;
(в) в нп-машине M_2 $\mu_2(b_i, c_i)=b_{i+1}$; $i=0, \ldots, k-1$; $b_k=b$.

(Отметим, что путь $(q_0, v_n, (a_0, b_0))$ отвечает единице полугруппы C^*).

Индукцией по длине слова $u \in C^*$ можно доказать следующее

Утверждение 3. *Если*

$$M_1=(A, a_0, A', \mu_1, \lambda_1),$$
$$M_2=(B, b_0, B', \mu_2, \lambda_2)$$

— нп-машины над C, X_n, F, а G_{12} — от — граф над X_{2n}, F, построенный по M_1, M_2 то для произвольного $u \in C^*$ элемент $\varphi[P](0)$, где P — путь в G_{12}, отвечающий u, является характеристикой элемента $\pi=(\lambda_1(a_0, u), \lambda_2(b_0, u))$.

Из утверждения 3 следует

Утверждение 4. *Для произвольных $i=1, \ldots, n$; $u \in C$ пересечение*

$$\mathrm{pr}_i \lambda_1(a_0, u) \cap \mathrm{pr}_i \lambda_2(b_0, u)$$

не пусто тогда и только тогда, когда существует $\omega \in \varphi[p](0)$, такое, что $x_{i+n} \in \mathrm{pr}_i \omega$, где p — путь в G_{12}, отвечающий u.

Рассмотрим следущий алгоритм.

Алгоритм 2.

Вход: нп-машины $M_1=(A, a_0, A', \mu_1, \lambda_1)$,
$M_2=(B, b_0, B', \mu_2, \lambda_2)$

над X_n, F.

Шаг 1. Проверяем равенство $\mathrm{Dom}(M_1)=\mathrm{Dom}(M_2)$. Если оно не выполняется, то $M_1 \neq M_2$, останов. Иначе переходим к шагу 2.

Шаг 2. По алгоритму 1 вычисляем полные системы инвариантов $\chi(q)$ для всех вершин от-графа G_{12}, построенного для нп-машин M_1, M_2.

Шаг 3. Для всех вершин q от-графа G_{12}, принадлежащих множеству $Q'=\{a, b) \mid a \in A', b \in B'\}$, проверяем выполнение условия

$$(\exists \omega \in \chi(q))[x_{n+1} \in \mathrm{pr}_1 \omega].$$

Если это условие выполнено для всех вершин из Q', то $M_1 \simeq M_2$, иначе $M_1 \neq M_2$.

Останов.

Теорема 3. *Алгоритм 2, примененный к некоторой паре нп-машин M_1, M_2, распознает слабую эквивалентность M_1 и M_2.*

Доказательство следует из утверждения 4, теоремы 2 и конечности множества $\chi(q)$ для всех $q \in Q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Буда. Абстрактные машины программ. Препринт № 108, 1978, ВЦ СОАН СССР. 45 с.
2. А. О. Буда, В. К. Сабельфельд. Анализ потока данных и эквивалентность программных машин. Сб. „Математическая теория и практика систем программного обеспечения", 1982, ВЦ СОАН СССР, 45—63.
3. А. О. Буда. Свободная информационная модель. *Сердика*, 16, 1990, № 2, 94—103.
4. G. A. Kildall. A unified approach to global program optimization, Conf. Rec. ACM Symposium of principles of programming languages, Boston, 1973, October 1—3, 194—206.
5. J. B. Kam, J. D. Ullman. Monotone data flow analysis frameworks. *Acta Informatica*, 7, 1977, 305-318.

Математический институт
Болгарской академии наук
София 1090, П. Я. 373
Болгария

Поступила 3. 04. 1990