Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

П. П. МАТУС, Л. В. СТАНИШЕВСКАЯ

Работа посвящена исследованию сходимости консервативных разностных схем для линейных неоднородных многомерных параболических и гиперболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в равномерной метрике. Получены новые безусловные оценки точности метода сеток в метрике C при пониженных требованиях к дифференциальным свойствам искомого решения.

1. Введение. Центральным вопросом теории разностных схем (р. с.) является вопрос о сходимости. При оценке точности р. с. обычно предполагается, что точное решение исходного дифференциального уравнения обладает определенной гладкостью, тогда р. с. имеет точность соответствующего порядка. В случае гладких решений в теории метода конечных разностей имеются многочисленные и достаточно полные исследования сходимости [1—3]. Однако на практике часто встречаются задачи, решения которых имеют весьма ограниченную гладкость и существуют лишь в обобщенном смысле [4—5].

При понижении требований к дифференциальным свойствам искомого решения исследования существенно усложняются. И здесь, как правило, анализ сходимости проводят в некоторых слабых или негативных нормах [6—8].

В работах Р. Д. Лазарова, В. Л. Макарова, А. А. Самарского [9—16] предложен новый аппарат получения априорных оценок, в которых порядок скорости сходимости согласован с гладкостью решения исходной дифференциальной задачи. Он позволил существенно расширить представления о качествах р. с., аппроксимирующих дифференциальные уравнения с обобщенными решениями.

Целью данной работы является исследование безусловной сходимости консервативных р. с. для неоднородных двумерных и трехмерных параболических и гиперболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в равномерной метрикев предположении, что р. с. аппроксимирует исходную задачу лишь в норме L_2 с порядком $h^\lambda+\tau^\beta$, λ, $\beta<1$.

Отметим, что разработка как аппарата исследований, так и получение конкретных безусловных оценок точности в норме C, $\omega_{h\tau}$ позволит, кроме того, устранить традиционные ограничения, накладываемые на шаги сетки типа $\tau=h^\varkappa$ даже при гладких решениях, в случае изучения сходимости р. с. для нелинейных краевых задач с неограниченной нелинейностью [17—18].

2. Исследование сходимости консервативных р. с. для многомерных параболических уравнений. В цилиндре $\bar{Q}_T=\bar{\Omega}\times[0\le t\le T]$, $\bar{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$, $\Omega=\{x=(x_1, x_2, \dots, x_p), 0<x_\alpha<l_\alpha, \alpha=1, 2, \dots, p\}$, рассмотрим первую краевую задачу для p-мерного параболического уравнения ($p=2, 3$)

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u+f(x, t), \; L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big), \; (x, t)\in Q_T,$$

$$(2)\qquad u(x, 0)=u_0(x), \quad x\in\bar{\Omega}; \quad u|_\Gamma=\mu(x, t), \; x\in\Gamma, \; t\in(0, T].$$

Пусть выполнены условия параболичности и ограниченности коэффициентов: $0<m_1\le k_\alpha(x, t)\le m_2$ $|\partial k_\alpha/\partial x_\beta|$, $|\partial k_\alpha/\partial t|\le m_3$, α, $\beta=1, 2, \dots, p$.

Введем в рассмотрение следующие равномерные сетки узлов $\omega_h^{+\alpha}$, $\bar\omega_{h\tau}=\bar\omega_h\times\bar\omega_\tau$:

$$\omega_h^{+\alpha}=\{x=(i_1h_1,\ i_2h_2,\ \dots,\ i_ph_p),\ 1\leqq i_1,\ \dots,\ i_{\alpha-1},\ i_{\alpha+1},\ \dots,\ i_p\leqq N_\alpha-1;$$
$$1\leqq i_\alpha\leqq N_\alpha,\ \alpha=\overline{1,\ p}\},$$
$$\omega_h=\{x=(i_1h_1,\ i_2h_2,\ \dots,\ i_ph_p),\ 0<i_\alpha<N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha=l_\alpha,\ \alpha=1,\ 2,\ \dots,\ p\},$$
$$\bar\omega_h=\omega_h\cup\gamma_h,\ \bar\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,\ 1,\ \dots,\ j_0,\ \tau j_0=T\}.$$

На сетке $\bar\omega_{h\tau}$ дифференциальную задачу аппроксимируем следующей консервативной р. с. с весами

$$y_t=(\Lambda y)^{(\sigma)}+\varphi,\ (x,\ t)\in\omega_{h\tau}, \tag{3}$$

$$y(x,\ 0)=u_0(x),\ x\in\bar\omega_h;\ y\,|_{\gamma_h}=\mu(x,\ t),\ x\in\gamma_h,\ t\in\omega_\tau, \tag{4}$$

где $\Lambda y=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha y,\Lambda_\alpha y=(a_\alpha y_{\bar x_\alpha})_{x_\alpha},\ \ \Lambda y\equiv-Ay,\ \ a_\alpha=a_\alpha(x,\ t)=k_\alpha(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{\alpha-1},\ x_\alpha-0.5h_\alpha,\ x_{\alpha+1},\ \dots,\ x_p,\ t_j),\ \varphi=f^{(\sigma)}(x,\ t),\ (x,\ t)\in\omega_{h\tau}$.

Подставляя в (3)–(4) $y=z+u$, для погрешности метода z получим задачу

$$z_t=(\Lambda z)^{(0.5)}+\tau(\sigma-0.5)(\Lambda z)_t+\psi, \tag{5}$$

$$z(x,\ 0)=0,\quad x\in\bar\omega_h;\ z(x,\ t)=0,\ x\in\gamma_h,\ t\in\omega_\tau. \tag{6}$$

Здесь $\psi=(\Lambda u+f)^{(\sigma)}-u_t$ — погрешность аппроксимации схемы (3) на решении $u(x,t)$.

Для оценки сеточных функций будем пользоваться следующими нормами:

$$\|v\|_{c,\bar\omega_h}=\max_{\bar\omega_h}|v(x)|,\ \|v\|^2=\sum_{\omega_h}v^2(x)\,h_1h_2\ \dots\ h_p,$$

$$\|v\|_{(\alpha)}^2=\sum_{\omega_h^{+\alpha}}v^2(x)\,h_1h_2\ \dots\ h_p,\quad \|v\|_1^2=\sum_{\alpha=1}^{p}\|v_{\bar x_\alpha}\|_{(\alpha)}^2$$

$$\|v\|_2=\|\sum_{\alpha=1}^{p}v_{\bar x_\alpha x_\alpha}\|,\quad \|v\|_3^2=\sum_{\alpha=1}^{p}(a_\alpha,\ v^2{}_{\bar x_\alpha})_{(\alpha)}.$$

Будем предполагать, что гладкость решения и входных данных задачи (1)—(2) такова, что для погрешности аппроксимации имеет место оценка (лишь в норме L_2):

$$\|\psi^j\|\leqq R\,(h^\lambda+\tau^\beta),\quad t_j\in\omega_\tau;\quad \varepsilon_0<\lambda,\ \beta<1, \tag{7}$$

$\varepsilon_0=1/2$ при $p=2$ и $\varepsilon_0=1/2+\varepsilon/2$, $0<\varepsilon<1$ при $p=3$.

Таким классом функций, для которого верна оценка (7), является, например, множество $C^{2+\lambda,\ 1+\beta}(\bar Q_T)$. Отметим, что эта же оценка имеет место и при более слабых ограничениях на решение: $u(x,t)\in W_2^{2+\lambda,\ 1+\beta}(\omega_{h\tau})$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть для погрешности аппроксимации ψ^j верна оценка (7). Тогда при $p=2$, $\sigma\geqq0.5+\varepsilon_1$, $\varepsilon_1>0$, $h\to0$, $\tau\to0$ решение р. с. (3)—(4) сходится безусловно к точному решению дифференциальной задачи, и при достаточно малых $h<h_0$, $\tau<\tau_0$ для погрешности метода имеет место оценка*

$$\max_{t\in\bar\omega_\tau}\|z\|_{c,\ \bar\omega_h}\leqq c\,(h^{\lambda-1/2}+\tau^{\beta-1/2}).\quad c=\text{const}>0. \tag{8}$$

Доказательство. Согласно подходу к исследованию безусловной сходимости р. с. в равномерной метрике, предложенному в [19—21], вначале изучим задачу для погрешности z в полунорме $\mathring{W}_2^1$. Для этого умножим уравнение (5) скалярно на $2\tau z_t$. После применения первой разностной формулы Грина, ε-неравенства и несложных преобразований, приходим к известному рекуррентному соотношению

$$\| z^{j+1} \|_3^2 + J_1 \leq (1+\tau c) \| z^j \|_3^2 + \tau c \| \psi^j \|^2,$$
$$J_1 = \tau^2 (2(\sigma - 0.5) m_1 - \tau m_3 \sigma) \| z_t \|_1^2,$$

где c — положительная константа (в каждом конкретном случае своя), не зависящая от h, τ, y.

Из полученного неравенства, в силу леммы Гронуолла и (7), приходим к оценке

$$\sum_{\alpha=1}^{2} [a_\alpha(x, t_j), z_{\bar{x}_\alpha}^{j2}] \leq c^2 (h^{2\lambda} + \tau^{2\beta}), \quad j = 0, 1, \ldots, j_0,$$

которую, учитывая условие параболичности, можно переписать в виде

(9) $$\| z^j \|_1^2 \leq c^2 (h^{2\lambda} + \tau^{2\beta}), \quad j = 0, 1, \ldots, j_0.$$

В силу очевидного вложения $\| v \|_{c, \bar{\omega}_h} \leq M_1 h^{-1/2} \| v \|_1$, $M_1 = \sqrt{l}/2$, $l = \max_\alpha l_\alpha$, справедливого для любой сеточной функции v, заданной на прямоугольной сетке $\bar{\omega}_h$ $(p=2)$ и обращающейся в нуль на границе γ_h, из (9) получаем условную равномерную оценку точности $\| z^j \|_{c, \bar{\omega}_h}^2 \leq c^2 (h^{2\lambda-1} + \tau^{2\beta} h^{-1})$. Из последнего неравенства при $\tau \leq h$ следует, что

(10) $$\max_{0 \leq t_j \leq T} \| z \|_{c, \bar{\omega}_h} \leq c (h^{\lambda - 1/2} + \tau^{\beta - 1/2}).$$

Итак, с использованием сеточной нормы W_2^1, мы получили нужную нам оценку, но условную (при $\tau \leq h$).

На втором этапе исследований получим аналогичную оценку при обратных соотношениях на шаги сетки. Для этого проведем исследование сходимости р. с. в полунорме W_2^2. Умножим уравнение (5) скалярно на $2\tau (Az) t$. Рассмотрим скалярное произведение, содержащее погрешность аппроксимации: $2\tau |((Az)_t, \psi)| \leq 2\tau^2 \varepsilon_1 \| (Az)_t \|^2 + (2\varepsilon_1)^{-1} \| \psi \|^2$, $\varepsilon_1 > 0$. Ввиду отсутствия достаточной гладкости в соответствующем рекуррентном соотношении для погрешности метода слагаемое $\| \psi \|^2$ не будет содержать обычного множителя τ, что порождает и в данной норме ограничения на шаги сетки. Оценивая остальные скалярные произведения обычным образом и складывая полученные результаты, приходим к неравенству

$$\| (\Lambda z)^{j+1} \|^2 + J_2 \leq \| (\Lambda z)^j \|^2 + \tau c \| z^j \|_3^2 + (2\varepsilon_1)^{-1} \| \psi^j \|^2, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1,$$

где $J_2 = 2\tau^2 (\sigma - 0.5 - \varepsilon_1) \| (Az)_t \|^2 + 2\tau (m_1 - \varepsilon_2) \| z_t \|_1^2$.

Из последнего неравенства при $\varepsilon_2 \leq m_1$ ($\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ вводятся при применении ε-неравенств) следует оценка

(11) $$\| \Lambda z \|^2 \leq c^2 (h^{2\lambda} \tau^{-1} + \tau^{2\beta - 1}), \quad j = 0, 1, \ldots, j_0.$$

В силу вложений [22]

(12) $$\| v \|_{c, \bar{\omega}_h} \leq M_1 \| v \|_2, \quad M_1 = l^2/\sqrt{\bar{l}}, \quad \bar{l} = \prod_{\alpha=1}^{p} l_\alpha, \quad p = 2, 3,$$
$$\frac{m_1^2}{2} \| v \|_2^2 - M_2 \| v \|_1^2 \leq \| \Lambda v \|^2, \quad M_2 = \mathrm{const} > 0,$$

согласно (11), приходим к следующей условной оценке точности в равномерной метрике: $\| z^j \|_{c, \bar{\omega}_h} \leq c (h^\lambda \tau^{-1/2} + \tau^{\beta - 1/2})$, которую при $\tau \geq h$ перепишем в виде

(13) $$\max_{0 \leq t_j \leq T} \| z \|_{c, \bar{\omega}_h} \leq c (h^{\lambda - 1/2} + \tau^{\beta - 1/2}).$$

Объединяя оценки (10), (13), приходим к утверждению теоремы. В качестве величин h_0, τ_0, фигурирующих в условии теоремы, могут быть выбраны следующие значения: $h_0=\tau_0=1/c$.

Аналогичная теорема имеет место и для трехмерных уравнений:

Теорема 2. *Если для погрешности аппроксимации ψ^j имеет место оценка (7), $p=3$, $\sigma\geqq 0.5+\varepsilon_1$, $\varepsilon_1>0$, тогда при $h\to 0$, $\tau\to 0$ решение р. с. сходится безусловно к точному решению задачи (1)—(2) и при достаточно малых $h<h_0$, $\tau<\tau_0$ для погрешности z имеет место оценка*

$$(14)\qquad \max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\|z\|_{c,\,\overline{\omega}_h}\leqq c\,(h^{\lambda-1/2-\varepsilon/2}+\tau^{\beta-1/2-\varepsilon/2}),\ 1/2+\varepsilon/2<\lambda,\ \beta<1.$$

Доказательство теоремы проводится по вышеуказанной методике с использованием сеточных норм W_2^1, W_2^2. Отметим, что при исследовании в W_2^1 оценка (14) при $\tau\leqq h$ следует из неравенства

$$(15)\qquad \|v\|_{c,\,\overline{\omega}_h}\leqq Mh^{-1/2}\,|\ln h^{-1}|^{1/2}\|v\|_1,\quad M=\mathrm{const}>0,$$

справедливого для любой сеточной функции v, заданной на сетке $\overline{\omega}_h$ и обращающейся в нуль на γ_h.

Замечание 1. Если потребовать дополнительную гладкость $\|\psi\|_*=\max\limits_{t\in\omega_\tau}(\|\psi\|+\|\psi_t\|)\to 0$ при h, $\tau\to 0$, то в этом случае порядок точности р. с. (3)—(4) ($p=2, 3$) в равномерной метрике совпадает с порядком аппроксимации в норме $\|\cdot\|_*$ [22] и применение вышеуказанного подхода в этом случае нецелесообразно.

2. Оценки точности р. с. для многомерных гиперболических уравнений второго порядка. Рассмотрим начально-краевую задачу для гиперболического уравнения

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u+f(x,\ t),\quad L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big),\quad (x,\ t)\in Q_T,$$

$$(17)\qquad u(x,\ 0)=u_0(x),\quad \partial u/\partial t\,(x,\ 0)=\overline{u}_0(x),\quad x\in\overline{\Omega};\quad u\,|_\Gamma=\mu(x,\ t),\quad t>0,$$
$$0<m_1\leqq k_\alpha(x,\ t)\leqq m_2;\quad |\partial k_\alpha/\partial x_\beta|,\quad |\partial^2 k_\alpha/\partial t^2|\leqq m_3,\quad \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ задачу (16)—(17) аппроксимируем р. с. с весами

$$(18)\qquad y_{t\bar{t}}=(\Lambda y)^{(\sigma_1,\ \sigma_2)}+\varphi,\quad \varphi=f^{(\sigma_1,\ \sigma_2)},$$

$$(19)\qquad y(x,\ 0)=u_0(x),\quad y_t(x,\ 0)=u_1(x),\quad x\in\overline{\omega}_h;\quad y\,|_{\gamma_h}=\mu(x,\ t),\quad x\in\gamma_h,\quad t\in\omega_\tau,$$

$$u_1=\overline{u}_0(x)+0.5\tau\Big(\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u_0+f(x,\ 0)\Big),\quad v^{(\sigma_1,\ \sigma_2)}=\sigma_1\hat{v}+(1-\sigma_1-\sigma_2)\,v+\sigma_2\check{v}.$$

Для погрешности метода $z=y-u$ из (18), (19) получим следующую задачу

$$(20)\qquad z_{t\bar{t}}=(\Lambda z)^{(\sigma_1,\ \sigma_2)}+\psi,\quad \psi=(\Lambda u+f)^{(\sigma_1,\ \sigma_2)}-u_{t\bar{t}},$$

$$(21)\qquad z(x,\ 0)=0,\quad z_t(x,\ 0)=\psi_0,\quad x\in\omega_h;\quad z\,|_{\gamma_h}=0,\quad x\in\gamma_h,\ t\in\omega_\tau,$$

$$\psi_0=u_1(x)-u_t(x,\ 0)=\overline{u}_0(x)+0.5\tau\Big(\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u_0+f(x,0)\Big)-u_t(x,\ 0).$$

Используя тождество $v^{(\sigma_1,\ \sigma_2)}=v+\tau(\sigma_1-\sigma_2)\,v_{\overset{\circ}{t}}+\frac{\tau^2}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\,v_{t\bar{t}}$, уравнение (20) запишем в виде, удобном для дальнейших исследований:

$$(22)\qquad z_{t\bar{t}}=\Lambda z+\tau(\sigma_1-\sigma_2)(\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}}+\frac{\tau^2}{2}(\sigma_1+\sigma_2)(\Lambda z)_{t\bar{t}}+\psi.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть гладкость решения $u(x, t)$ и входных данных задачи (16)—(17) такова, что*

$$\|\psi_j\|^2,\quad \|\psi^0\|_*^2 \leqq R^2(h^{2\lambda}+\tau^{2\beta}),\quad \varepsilon_0<\lambda,\quad \beta<1,$$

$\varepsilon_0=1/2$ *при* $p=2$ *и* $\varepsilon_0=1/2+\varepsilon/2$, $0<\varepsilon<1$ *при* $p=3$,

$$\|\psi^0\|_*^2=\tau^2(\sigma_1+\sigma_2)\|\Lambda\psi_0\|^2+\tau^2\|\psi_{\circ\bar{x}}\|^2+\|\psi_{\circ\bar{x}}\|_3^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\|(a_\alpha^{1/2}+\tau a_{\alpha t}a_\alpha^{-1/2})_{t=0}\psi_{\circ\bar{x}_\alpha}\|_{(\alpha)}^2.$$

Тогда при $p=2, 3$, $\sigma_1\geqq\sigma_2+\varepsilon_2$, $\varepsilon_2>0$, $\sigma_1+\sigma_2\geqq 1$, $h, \tau\to 0$ *решение р. с. (18)—(19) сходится безусловно к точному решению дифференциальной задачи и при достаточно малых* $h<h_0$, $\tau<\tau_0$ *для погрешности метода верны оценки*

$$\max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\|z\|_{c,\,\overline{\omega}_h}\leqq c\,(h^{\lambda-1/2}+\tau^{\beta-1/2})\quad \text{при } p=2,$$

$$\max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\|z\|_{c,\,\overline{\omega}_h}\leqq c\,(h^{\lambda-1/2-\varepsilon/2}+\tau^{\beta-1/2-\varepsilon/2})\quad \text{при } p=3.$$

Доказательство. Как и в предыдущем случае, воспользуемся двойным подходом к анализу сходимости р. с. в сеточных нормах W_2^1, W_2^2 соответственно. Ограничимся рассмотрением трехмерного случая.

Для получения оценок точности в сеточной полунорме W_2^1 уравнение для погрешности метода (22) умножим скалярно по внутренним точкам сетки $\overline{\omega}_h$ на $4\tau z_{\mathring{t}}$. Применяя разностные формулы Грина, неравенство Коши—Буняковского и ε-неравенство, нетрудно получить следующие оценки:

$$4\tau(z_{\mathring{t}},\ z_{t\bar{t}})=2\tau(\|z_t\|^2)_{\bar{t}},$$

$$4\tau(z_{\mathring{t}},\ \Lambda z)\leqq-(1-\tau c)\|\hat{z}_{\bar{x}}\|_3^2+(1+\tau c)\|\check{z}_{\bar{x}}\|_3^2+\tau^3(\|z_{t\bar{x}}\|_3^2)_{\bar{t}},$$

$$4\tau^2(\sigma_1-\sigma_2)(z_{\mathring{t}},\ (\Lambda z)_{\mathring{t}})\leqq\tau c\,(\|\hat{z}_{\bar{x}}\|_3^2+\|\check{z}_{\bar{x}}\|_3^2+\tau^2(\sigma_1+\sigma_2)(\|z_{t\bar{x}}\|_3^2+\|z_{\bar{t}\bar{x}}\|_3^2)),$$

$$\begin{aligned}2\tau^3(\sigma_1+\sigma_2)(z_{\mathring{t}},\ (\Lambda z)_{t\bar{t}})\leqq&-\tau^2(\sigma_1+\sigma_2)(1-\tau c)\|z_{t\bar{x}}\|_3^2\\&+\tau^2(\sigma_1+\sigma_2)(1+\tau c)\|z_{\bar{t}\bar{x}}\|_3^2+\tau c\|z_{\bar{x}}\|_3^2,\end{aligned}$$

$$4\tau(z_{\mathring{t}},\ \psi)\leqq 2\tau(\|z_t\|^2+\|z_{\bar{t}}\|^2)+\tau\|\psi\|^2.$$

Суммируя полученные оценки, относительно нормы

$$Q_{1j}=\{2\|z_{\bar{t}}\|^2+\|z_{\bar{x}}\|_3^2+\|\check{z}_{\bar{x}}\|_3^2+\tau^2(\sigma_1+\sigma_2-1)\|z_{\bar{t}\bar{x}}\|_3^2\}^{1/2}$$

приходим к рекуррентному соотношению

$$Q_{1j+1}^2\leqq(1+\tau c)\,Q_{1j}^2+\tau c\|\psi^j\|^2\leqq\exp(ct_j)(Q_1^2(\tau)+t_j\ c\max_{1\leqq k\leqq j}\|\psi^k\|^2), \tag{23}$$

справедливому для всех $j=1, 2, \ldots, j_0-1$.

В силу условий теоремы, $Q_1^2(\tau)=2\|\psi_0\|^2+\tau^2(\sigma_1+\sigma_2)\|\psi_{0\bar{x}}\|_3^2\leqq R^2(h^{2\lambda}+\tau^{2\beta})$. Следовательно, согласно (23), получаем, что $\|z^j\|_1^2\leqq c^2(h^{2\lambda}+\tau^{2\beta})$, $j=\overline{0, j_0}$. Используя вложение (15), из последней оценки получаем следующую условную оценку скорости сходимости в равномерной метрике ($\tau<\tau_0$, $\tau_0=1/c$)

$$\max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\|z\|_{c,\,\overline{\omega}_h}\leqq c\,(h^{\lambda-1/2-\varepsilon/2}+\tau^{\beta-1/2-\varepsilon/2})\quad \tau\leqq h. \tag{24}$$

Перейдем к исследованию сходимости р. с. (18)—(19) в норме C с использованием сеточной нормы w_2^2. Для этого уравнение (22) умножим скалярно на $-4\tau(\Lambda z)_{\mathring{t}}$ и рассмотрим следующее скалярное произведение:

$$-4\tau((\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}},\ z_{t\bar t})=2\|z_{t\bar x}\|_3^2-2\|z_{\bar t\ \bar x}{}^x\|_3^2$$
$$-2\tau\sum_{\alpha=1}^{3}(a_{\alpha\bar t},\ z^2_{\bar t\ \bar x_\alpha})_{(\alpha)}+2\tau\sum_{\alpha=1}^{3}(a_{\alpha t}\widehat{z}_{\bar x_\alpha}+a_{\alpha\bar t}\check{z}_{\bar x_\alpha},\ z_{t\bar t\ \bar x_\alpha})_{(\alpha)}. \tag{25}$$

Нетрудно заметить, что

$$\|z_{t\bar x}\|_3^2-\|z_{\bar t\ \bar x}\|_3^2+2\sum_{\alpha=1}^{3}(a_{\alpha t}\widehat{z}_{\bar x_\alpha}+a_{\alpha\bar t}\check{z}_{\bar x_\alpha},\ z_{t\bar x_\alpha}-z_{\bar t\ \bar x_\alpha})_{(\alpha)}$$
$$=\tau(\|z\|_4^2)_t-\tau\Big(\sum_{\alpha=1}^{3}\|\varphi_\alpha(z)\|^2_{(\alpha)}\Big)-q_1,$$

где

$$\|z\|_4^2=\sum_{\alpha=1}^{3}\|\check{a}_\alpha^{1/2}z_{\bar t\ \bar x_\alpha}+\varphi_\alpha(z)\|^2_{(\alpha)},\ \ \varphi_\alpha(z)=a_{\alpha\bar t}\check{a}_\alpha^{-1/2}(z_{\bar x_\alpha}+\check{z}_{\bar x_\alpha}),$$

$$q_1=2\tau\sum_{\alpha=1}^{3}[((a_{\alpha\bar t}z_{\bar x_\alpha})_t,\ z_{\bar t\ \bar x_\alpha})_{(\alpha)}+((a_{\alpha\bar t}\check{z}_{\bar x_\alpha})_t,\ z_{t\bar x_\alpha})_{(\alpha)}],$$

причем $-\tau\Big(\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\|\varphi_\alpha(z)\|^2_{(\alpha)}\Big)-q_1\geqq-\tau c q_2,\ \ q_2=\|\widehat{z}\|_1^2+\|z\|_1^2+\|\check{z}\|_1^2+\|z_{t\bar x}\|_3^2+\|z_{\bar t\ \bar x}\|_3^2.$

Так как $-2\tau\sum\limits_{\alpha=1}^{3}(a_{\alpha\bar t},\ z^2_{\bar t\ \bar x_\alpha})_{(\alpha)}\geqq-\tau c\|z_{\bar t\ \bar x}\|_3^2$, то, с учетом приведенных выкладок из (25) получим

$$-4\tau((\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}},\ z_{t\bar t})\geqq\tau(\|z_{\bar t\ \bar x}\|_3^2+\|z\|_4^2)_t-\tau c q_2.$$

Остальные скалярные произведения оценим следующим образом:

$$-4\tau((\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}},\ \Lambda z)=-\tau(\|\Lambda z\|^2-\tau^2\|(\Lambda z)_{\bar t}\|^2)_t,$$
$$-4\tau^2(\sigma_1-\sigma_2)((\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}},\ (\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}})=-4\tau^2(\sigma_1-\sigma_2)\|(\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}}\|^2,$$
$$-2\tau^3(\sigma_1+\sigma_2)((\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}},\ (\Lambda z)_{t\bar t})=-\tau^3(\sigma_1+\sigma_2)(\|(\Lambda z)_{\bar t}\|^2)_t,$$
$$-4\tau((\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}},\ \psi)\leqq4\tau^2\varepsilon_2\|(\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}}\|^2+\varepsilon_2^{-1}\|\psi\|^2.$$

Складывая полученные оценки, с учетом очевидного неравенства $\|\widehat{z}\|_1^2\leqq\|z\|_1^2(1+\tau c)+\tau c\|z_{t\bar x}\|_3^2$, справедливого для произвольной сеточной функции, относительно нормы

$$Q_{2j}=\{\|z\|_1^2+\|\check{z}\|_1^2+\|\Lambda z\|^2+\|\check{\Lambda}\check{z}\|^2+\|z_{t\bar x}\|_3^2+\|z\|_4^2+\tau^2(\sigma_1+\sigma_2-1)\|(\Lambda z)_{\bar t}\|^2\}^{1/2}$$

при $\tau<\tau_0,\ \tau_0=1/c$ получим энергетическое соотношение

$$Q^2_{2j+1}+J_3\leqq(1+\tau c)\,Q^2_{2j}+\tau c\|\psi^j\|^2, \tag{26}$$
$$J_3=4\tau^2(\sigma_1-\sigma_2-\varepsilon)\|(\Lambda z)_{\overset{\circ}{t}}\|^2\geqq0.$$

Применяя последовательно неравенство (26) для всех $j=1,\ 2,\ \ldots,\ j_0-1$ приходим к оценке

$$Q^2_{2j+1}\leqq\exp(ct_j)(Q_2^2(\tau)+t_jc\varepsilon_2^{-1}\max_{1\leqq k\leqq j}\tau^{-1}\|\psi^k\|^2),\ Q_2^2(\tau)=\|\psi^0\|_*^2, \tag{27}$$

из которой, в силу условий теоремы, сразу же получаем

$$\|(\Lambda z)^j\|\leqq c\,(h^\lambda\tau^{-1/2}+\tau^{\beta-1/2}),\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ j_0.$$

Отсюда, на основании вложений (12), при $\tau\geqq h$, следует, что

$$\max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\|z\|_{c,\ \overline{\omega}_h}\leqq c\,(h^{\lambda-1/2}+\tau^{\beta-1/2}). \tag{28}$$

Суммируя оценки (24), (28) и выбирая $h_0=\tau_0=1/c$, приходим к утверждению теоремы.

Замечание 2. Мы уже отмечали, что ограничения на шаги сетки типа $\tau\geqq h$ при исследовании в сеточной норме W_2^2 являются следствием недостаточной гладкости искомого решения. В противном случае, вместо неравества (27), нетрудно получить априорную оценку вида

$$Q_{3j+1}^2\leqq\exp\ (ct_j)(Q_3^2(\tau)+ct_j\max_{1\leq j\leq j_0-1}(\|\psi^{j+1}\|^2+\|\psi^j\|^2+\|\psi_t\|^2),$$

$$Q_3^2=Q_2^2-\frac{1}{4}(\|\Lambda z\|^2+\|\widetilde{\Lambda z}\|^2)+\|\frac{1}{2}\Lambda z+2\psi\|^2+\|\frac{1}{2}\widetilde{\Lambda z}+2\psi\|^2.$$

Отсюда следует, что, при соответствующей гладкости решения и входных данных дифференциальной задачи, р. с. (18)—(19) сходится безусловно в норме C, $\bar\omega_{h\tau}$, причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

В заключение выражаем благодарность Р. Д. Лазарову за полезные обсуждения и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Самарский. Теория разностных схем. М., 1983.
2. А. А. Самарский. Некоторые результаты по теории разностных методов. *Дифф. уравн.*, **16**, 1980, 7, 1155—1171.
3. А. А. Самарский. Некоторые вопросы общей теории разностных схем. Дифф. уравн. с частн. производными: Тр. симпоз., посвящ. 60-летию акад. С. Л. Соболева. М., 1970, 191—223.
4. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
5. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
6. А. А. Самарский, И. В. Фрязинов. О сходимости разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **1**, 1961, 5, 806—824.
7. А. А. Амосов, А. А. Злотник. Разностная схема для уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа, ее свойства и оценки погрешности „в целом". *Докл. АН СССР*, **288**, 1986, 2, 270—275.
8. А. А. Амосов, А. А. Злотник. Семейство разностных схем для уравнений одномерной магнитной газовой динамики: свойства и оценки погрешности „в целом". *Докл. АН СССР*, **299**, 1988, 6, 1295—1299.
9. Р. Д. Лазаров. О сходимости разностных схем для некоторых осесимметричных задач математической физики в классах обобщенных решений *Докл. АН СССР*, **258**, 1981, 6, 1301—1304.
10. Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решений. *Докл. АН СССР*, **259**, 1981, 2, 282—286.
11. Р. Д. Лазаров. К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона. *Дифф. уравн.*, **17**, 1981, 7, 1285—1294.
12. Р. Д. Лазаров. О сходимости разностных решений к обобщенным решениям уравнений четвертого порядка. *Дифф. уравн.*, 17,7, 1981, 1295—1303.
13. Р. Д. Лазаров. Оценки сходимости разностных схем для параболических уравнений на обобщенных решениях. *Докл. БАН*, 35, 1982, 1, 7—10.
14. Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, А. А. Самарский. Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях. *Математический сборник*. Новая серия. **117**(159), 1982, 4, 469—480.
15. А. А. Самарский. Исследование точности разностных схем для задач с обобщенными решениями. Актуальные пробл. мат. физики и вычисл. математики. М., 1984, 174—183.
16. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М., 1987.
17. В. Н. Абрашин. Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений. II. *Дифф. уравн.*, **11**, 1975, 2, 294—308.
18. А. Д. Ляшко, Е. М. Федотов. Корректность одного класса консервативных нелинейных операционно-разностных схем. *Известия вузов*, 1985, 10, 47—55.
19. П. П. Матус. О безусловной сходимости некоторых разностных схем задач газовой динамики. *Дифф. уравн.*, **21**, 1985, 7, 1227—1238.
20. П. П. Матус. О точности разностных схем в равномерной метрике. *Докл. АН БССР*, **33**, 1989, 11, 965—968.
21. П. П. Матус, Л. В. Станишевская. О безусловной сходимости разностных схем для параболических и гиперболических уравнений с кусочно-непрерывными решениями. 1989. 32с. (Препринт/АН БССР. Ин-т математики, 24(374)).
22. В. Б. Андреев. О равномерной сходимости некоторых разностных схем. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **6**, 1966, 2, 238—250.

Институт математики АН БССР
220604 Минск, ул. Сурганова 11
СССР

Поступила 21. 12. 1989
В переработанном виде 2. 05. 1990