Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ИДЕАЛ И РАДИКАЛ ДЖЕКОБСОНА СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

КИРИЛ Х. КОЛИКОВ

1. Введение. Пусть

$$K_\rho^\sigma G=\{\sum_{g\in G}\alpha_g t_g \mid \alpha_g\in K\} \text{ —}$$

скрещенное произведение [1] группы G и поля K при системе факторов ρ и отображении σ. Тогда $\sigma g\in AutK$, $\rho_{gh}\in K\setminus\{0\}$ и

$$t_g\alpha=\alpha^{\sigma g}t_g, \quad t_g t_h=\rho_{g,h}t_{gh}$$

для всех g, $h\in G$ и $\alpha\in K$.

В силу ассоциативного закона, в $K_\rho^\sigma G$ выполняется соотношение

$$(1) \qquad \rho_{g_1,g_2}\rho_{g_1g_2,g_3}=\rho_{g_2,g_3}^{\sigma g_1}\rho_{g_1,g_2g_3}.$$

Кроме того. из равенства $t_{g_1}t_{g_2}\alpha=\rho_{g_1,g_2}t_{g_1g_2}\alpha$ следует, что

$$\alpha^{\sigma g_2\sigma g_1}=\alpha^{\sigma(g_1g_2)},$$

т. е. отображение σ является антигомоморфизмом.

В случае, когда σ отображает группу G на единичный автоморфизм поля K (т. е. $\sigma=1$), то скрещенное произведение $K_\rho G$ называется скрещенным групповым кольцом. Если, кроме того, система факторов ρ единична, т. е. $\rho_{g,h}=1$ для всех g, $h\in G$, то скрещенное произведение совпадает с групповым кольцом KG.

Пусть в скрещенном произведении $K_\rho^\sigma G$ выбран такой базис, что $\rho_{1,1}=1$. Тогда элемент t_1 является единицей кольца $K_\rho^\sigma G$, $t_g^{-1}=t_{g^{-1}}\rho_{g,g^{-1}}^{-1}$ и

$$\rho_{g,1}=\rho_{1,g}=\rho_{1,1}=1$$

для всех $g\in G$.

Если

$$G_{\text{ker}}=\{g\in G \mid \sigma g=1\} \text{ —}$$

ядро антигомоморфизма σ и

$$F=F(G)=\{f\in G \mid \rho_{f,g}=\rho_{g,f}=1 \text{ для всех } g\in G\},$$

то, очевидно, G_{ker} — нормальная подгруппа группы G, а F — подгруппа группы G [2].

Пусть H — подгруппа группы F и $A_r(H,G)$ — правый идеал кольца $K_\rho^\sigma G$, порожденный элементами t_h-t_1 $(h\in H)$. В [2] доказано, что идеал $A_r(H,G)$ является двусторонним тогда и только тогда, когда H — нормальная подгруппа группы G и $H\subseteq G_{\text{ker}}$. В этом случае

$$K_\rho^\sigma G/A_r(H,G)\cong K_{\bar\rho}^{\bar\sigma}(G/H).$$

СЕРДИКА Българско математическо списание, Т. 17, 1991, с. 92-98.

Поэтому существенно установить, когда группа F является нормальной подгруппой G и когда $F \subseteq G_{\text{кег}}$. Эта одна из целей настоящей работы (лемма 1 и лемма 2). Используя эти леммы, в § 2 находим условия, при которых идеал $A_r(F, G)$ является нильпотентным или обобщенно нильпотентным. Кроме того, если $\mathscr{S}(K_\rho^\sigma G)$ — радикал Джекобсона скрещенного произведения $K_\rho^\sigma G$, то в § 3 устанавливаем, когда $A_r(F, G) \subseteq \mathscr{S}(K_\rho^\sigma G)$ или $A_r(F, G) = \mathscr{S}(K_\rho^\sigma G)$.

Правый идеал $A_r(F, G)$ скрещенного произведения $K_\rho^\sigma G$ будем называть (правым) относительно фундаментальным идеалом.

2. Фундаментальный идеал скрещенных произведений. Система факторов ρ называется симметрической, если $\rho_{g,h} = \rho_{h,g}$ для всех $g, h \in G$.

Лемма 1. *Если система факторов ρ симметрическая, то*

1) *$\sigma(F)$ действует тождественно на ρ:*

2) *Подгруппа F нормальная в группе G;*

3) *Идеал $A_r(F, G)$ является инвариантным относительно внутренних автоморфизмов кольца $K_\rho^\sigma G$, порожденными элементами t_g $(g \in G)$.*

Доказательство. Пусть система факторов ρ симметрическая, $f \in F$ и $g, h \in G$.

1) Из соотношения (1) и из $\rho_{f,g} = \rho_{g,f} = 1$ для каждого $g \in G$ и $f \in F$ следует, что

$$\rho_{fg,h} = \rho_{f,g}^{-1} \rho_{g,h}^{\sigma f} \rho_{f,gh} = \rho_{g,h}^{\sigma f}.$$

С другой стороны, в силу симметричности ρ,

$$\rho_{fg,h} = \rho_{h,fg} = (\rho_{f,g}^{\sigma h})^{-1} \rho_{h,f} \rho_{hf,g} = \rho_{hf,g} = \rho_{g,hf} = (\rho_{h,f}^{\sigma g})^{-1} \rho_{g,h} \rho_{gh,f} = \rho_{g,h}.$$

Следовательно, $\rho_{g,h}^{\sigma f} = \rho_{g,h}$, т. е. $\sigma(F)$ действует тождественно на системе факторов ρ,

2) Докажем, что $g^{-1}fg \in F$. Действительно,

$$\rho_{g^{-1}fg,h} = \rho_{g^{-1},fg}^{-1} \rho_{fg,h}^{\sigma g^{-1}} \rho_{g^{-1},fgh}.$$

Но

$$\rho_{g^{-1},fg}^{-1} = \rho_{fg,g^{-1}}^{-1} = \rho_{f,g} (\rho_{g,g^{-1}}^{\sigma f})^{-1} \rho_{f,gg^{-1}}^{-1} = \rho_{g,g^{-1}}^{-1}.$$

Аналогично устанавливается, что $\rho_{fg,h}^{\sigma g^{-1}} = \rho_{g,h}^{\sigma g^{-1}}$ и $\rho_{g^{-1},fgh} = \rho_{g^{-1},gh}$. Тогда

$$\rho_{g^{-1}fg,h} = \rho_{g,g^{-1}}^{-1} \rho_{g,h}^{\sigma g^{-1}} \rho_{g^{-1},gh} = \rho_{g,g^{-1}}^{-1} \rho_{g^{-1},g} \rho_{1,h} = 1\cdot$$

и, следовательно, $g^{-1}fg \in F$.

3) Рассмотрим элемент

$$x = t_g^{-1}(t_f - t_1) t_g = (\rho_{g,g^{-1}}^{-1})^{\sigma g^{-1}} \rho_{g^{-1}f,g} t_{g^{-1}fg} - t_1.$$

Согласно соотношения (1),

$$\rho_{g,g^{-1}}^{\sigma g^{-1}} = \rho_{g^{-1},g} = \rho_{g,g^{-1}}$$

и в силу симметричности системы факторов ρ,

$$\rho_{g,g^{-1}}^{-1} \rho_{g,g^{-1}f} = \rho_{1,f} (\rho_{g^{-1},f}^{\sigma g})^{-1} = 1.$$

Поэтому, $x = t_{g^{-1}fg} - t_1$ и так как $g^{-1}fg \in F$, то $x \in A_r(F, G)$. Отсюда легко видно, что $A_r(F, G)$ является инвариантным идеалом относительно внутренних автоморфизмов вида $t_g^{-1} x t g$ $(g \in G,\ x \in K_\rho^\sigma G)$.

Лемма 2. *Если $A_r^2(F, G) \neq A_r(F, G)$, то $F \subseteq G_{\text{кег}}$.*

Доказательство. Пусть $x \in A = A_r(F, G)$ и $x \overline{\in} A^2$. Тогда для каждого $f \in F$ и $\alpha \in K$ имеем $y = x(t_f - t_1)\,\alpha \in A^2$.

Но

$$y = x\,\alpha^{\sigma f}(t_f - t_1) + x(\alpha^{\sigma f} - \alpha)$$

и поэтому

$$y - x\,\alpha^{\sigma f}(t_f - t_1) = x(\alpha^{\sigma f} - \alpha) \in A^2.$$

Так как $x \bar{\in} A^2$, то это возможно только, если $\alpha^{\sigma f} = \alpha$ и следовательно $F \subseteq G_{\text{ker}}$.

Лемма 3. *Пусть $F \neq \langle 1 \rangle$ и правый идеал $A_r(F, G)$ нильпотентен. Тогда F — конечная p-группа, которая содержится в G_{ker} и* char $K = p$.

Доказательство. *Пусть идеал $A = A_r(F, G)$ нильпотентен. Тогда $A^2 \neq A$ и согласно леммы 2, $F \subseteq G_{\text{ker}}$.*

Далее, если $A(F, F)$ — фундаментальный идеал группового кольца KF и $A_r^n(FG) = 0$, то очевидно

$$A^n(F, F) \subseteq A_r^n(F, G) = 0.$$

Поэтому идеал $A(F, F)$ нильпотентен в групповом кольце KF. Тогда, в силу леммы 3.1.6 [3, с. 70], F является конечной p-группой и char $K = p$.

Следствие 4. *Если $K^\sigma G$ — скрещенное произведение группы G и поля K при тривиальной системе факторов и $A_r(G, G)$ — нильпотентный идеал, то $K^\sigma G = KG$ является обыкновенным групповым кольцом.*

Теорема 5. *Если H — нормальная подгруппа группы G, $\langle 1 \rangle \neq H \subseteq F$, то правый идеал $A_r(H, G)$ нильпотентен тогда и только тогда, когда H — конечная p-группа, которая содержится в G_{ker}* и char $K = p$.

Доказательство. *Если идеал $A_r(H, G)$ нильпотентен, то согласно леммы 2, $H \subseteq G_{\text{ker}}$. Тогда аналогично лемме 3 доказывается, что H — конечная p-группа и* char $K = p$.

Пусть, сейчас, H — конечная нормальная p-подгруппа группы G, $H \subseteq G_{\text{ker}}$ и char $K = p$. Тогда, по лемме 3.1.6 [3, с. 70], фундаментальный идеал $A(H, H)$ группового кольца KH является нильпотентным некоторой степени n. Кроме того, согласно [2, лемма 4], идеал $A_r(H, G)$ двусторонний и тогда

$$A_r^n(H, G) = A^n(H, H)\,K_\rho^\sigma G = 0.$$

Следовательно, $A_r(H, G)$ — нильпотентный идеал и теорема доказана.

Из этой теоремы и леммы 1 непосредственно получается следующее утверждение

Следствие 6. *Если система факторов ρ симметрическая и $F \neq \langle 1 \rangle$, то относительно фундаментальный идеал $A_r(F, G)$ нильпотентен тогда и только тогда, когда F — конечная p-группа, $F \subseteq G_{\text{ker}}$ и* char $K = p$.

Относительно фундаментальный идеал $A_r(F, G)$ скрещенного произведения $K_\rho^\sigma G$ будем называть обобщенно нильпотентным, если

$$A_r^\omega(F, G) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^n(F, G) = 0.$$

В этом случае, согласно леммы 2, $F \subseteq G_{\text{ker}}$, т. е. $K^\sigma F = KF$ является обыкновенным групповым кольцом. Кроме того, если $A(F, F)$ — фундаментальный идеал группового кольца KF, то

$$A(F, F) \subseteq A_r(F, G)$$

и поэтому $A_r^\omega(F, G) = 0$ влечет $A^\omega(F, F) = 0$. В силу этого, если идеал $A_r(F, G)$ обобщенно нильпотентен, то можем обобщить все результаты из теории групповых колец, которые дают описание группы F в случае, когда фундаментальный идеал $A(F, F)$ группового кольца KF обобщенно нильпотентен (см. напр. [4, теоремы 65, 67] или [5]).

Кроме того, если система факторов ρ симметрическая, то согласно леммы 1, F является нормальной подгруппой группы G и имеет место следующая

Лемма 7. *Если система факторов ρ симметрическая, то $A_r^{\omega}(F, G)=0$ тогда и только тогда, когда $F \subseteq G_{\ker}$ и $A^{\omega}(F, F)=0$.*

Действительно, из $A(F, F)K_\rho^\sigma G = A_r(F, G)$ в этом случае следует, что $A^{\omega}(F\ F)K_\rho^\sigma G = A^{\omega}(F, G)$.

В силу леммы 7, можем получить и обратные утверждения вышецитированных результатов из [4] и [5].

3. Радикал Джекобсона скрещенных произведений. Пусть R — кольцо, и $M = M_R$ — правый R-модуль. Если T — подкольцо кольца R с той же самой единицей, то каждый R — модуль $M = M_R$ можно рассматривать как T-модуль $M = M_T$.

Кольцо R называется T-проективным [3, с. 273], если для произвольного модуля M_R и его подмодуля $V_R = V_T$ из $M_T = V_T \oplus U_T$ следует $M_R = V_R \oplus U'_R$, для некоторого подмодуля U'_R.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 7.2.2 [3, с. 274].

Лемма 8. *Пусть H — подгруппа группы G, которая имеет конечный индекс $[G:H]=n$ в группе G. Тогда, если n ненулевой элемент поля K, то кольцо $K_\rho^\sigma G$ является $K^\sigma H$ — проективным.*

Доказательство. Пусть $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — полная система представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H.

Если M — правый $K_\rho^\sigma G$-модуль и V — подмодуль модуля M, то пусть $M_T = V_T \oplus U_T$, для некоторого подмодуля U_T, где $T = K_\rho^\sigma H$. Тогда существует такое проективное отображение $f\colon M \to V$, что $f(v) = V$ для всех $v \in V$ и $f(my) = f(m)y$ для всех $m \in M$ и $y \in T$.

По условию имеем $\frac{1}{n} \in K$ и поэтому можем определить отображение $\bar{f}\colon M \to V$ через

$$\bar{f}(m) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(mt_{u_k}^{-1})\, t_{u_k},$$

которое имеет смысл, так как $f(mt_{u_k}^{-1}) \in V$ и V — правый $K_\rho^\sigma G$ — подмодуль.

Пусть $g \in G$. Тогда g переставляет правые смежные классы $Hu_1, Hu_2, \ldots, Hu_n$ посредством правого умножения. Поэтому, $u_k g = h_k u_{\bar{k}}$, где $h_k \in H$ и $k \to \bar{k}$ является подстановкой элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$. Так как $u_k^{-1} h_k = g u_{\bar{k}}^{-1}$ и $\rho_{g,h_k} = \rho_{h_k,g} = 1$ для каждого $g \in G$, то

$$\bar{f}(m)\, t_g = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(mt_{u_k}^{-1})\, t_{u_k} t_g = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(m\, \rho_{u_k,u_k^{-1}}^{-1} \rho_{u_k,g}^{\sigma u_k^{-1}}\, t_{u_{\bar{k}}^{-1}})\, t_{h_k u_{\bar{k}}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f[m\rho_{u_k,u_k^{-1}}^{-1} \rho_{u_k,g}^{\sigma u_k^{-1}} (\rho_{h_k,u_{\bar{k}}}^{-1})^{\sigma u_k^{-1}} \rho_{u_k^{-1},h_k} t_{g u_{\bar{k}}^{-1}}]\, t_{u_{\bar{k}}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(m\, \alpha\, t_g t_{u_{\bar{k}}}^{-1})\, t_{u_{\bar{k}}},$$

где $\alpha=\rho^{-1}_{u_k,u_k^{-1}}\rho^{\sigma u_k^{-1}}_{u_k,g}(\rho^{-1}_{h_k,u_{\overline{k}}})^{\sigma u_k^{-1}}\rho_{u_k^{-1},h_k}\rho^{-1}_{g,u_{\overline{k}}^{-1}}\rho^{\sigma g}_{u_{\overline{k}},u_{\overline{k}}^{-1}}$. Но $\rho_{g,g^{-1}}=\rho_{g^{-1},g}$ для каждого $g\in G$ и тогда, согласно соотношения (1), $\rho^{-1}_{u_k,u_k^{-1}}\rho^{\sigma u_k^{-1}}_{u_k,g}=\rho^{-1}_{u_k^{-1}u_kg}$, $(\rho^{-1}_{h_k,u_{\overline{k}}})^{\sigma u_k^{-1}}\rho_{u_k^{-1},h_k}=\rho^{-1}_{u_k^{-1}\,h_ku_{\overline{k}}}$ $\rho_{u_k^{-1},hu_{\overline{k}}}=\rho^{-1}_{gu_{\overline{k}}^{-1},u_{\overline{k}}}\rho_{u_k^{-1}u_kg}$ и $\rho^{-1}_{g,u_{\overline{k}}^{-1}}\rho^{\sigma g}_{u_{\overline{k}},u_{\overline{k}}^{-1}}=\rho_{gu_{\overline{k}}^{-1},u_{\overline{k}}^{-1}}$. Следовательно, $\alpha=1$ и

$$\overline{f}(m)\,t_g=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(mt_gt^{-1}_{u_{\overline{k}}})\,t_{u_{\overline{k}}}=\overline{f}(mt_g).$$

Кроме того, легко видно, что $g(m)\alpha=g(m\alpha)$ для каждого $\alpha\in K$ и поэтому $g(m)x=g(mx)$, где x — произвольный элемент кольца $K^\sigma_\rho G$.

Далее, если $v\in V$, то $vt^{-1}_{u_k}\in V$, т. е. $f(vt^{-1}_{u_k})=vt^{-1}_{u_k}$ и

$$g(v)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}vt^{-1}_{u_k}t_{u_k}=v.$$

Наконец, пусть $U=\{m\in M\mid g(m)=0\}$. Тогда легко следует, что U является $K^\sigma_\rho G$-модулем и $M=V\oplus U$. Лемма доказана.

Пусть R — кольцо и T — подкольцо кольца R с той же самой единицей. Тогда множество элементов $\{u_1=1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\}$ называется нормальным базисом для R над T [3, с. 276], если

1) Каждый элемент $x\in R$ записывается в виде

$$x=y_1u_1+y_2u_2+\cdots+y_nu_n,$$

гре $y_i\in T$.

2) Существуют такие автоморфизмы $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n$ в T, что

$$u_iy=\sigma(y)\,u_i$$

для всех $y\in T$. Так как $u_1=1$, то σ_1 — тождественный автоморфизм.

Через $\mathscr{J}(R)$ будем обозначать радикал Джекобсона кольца R.

Теорема 9. *Пусть H — нормальная подгруппа группы G и $[G\colon H]=n<\infty$. Тогда*

$$\mathscr{J}^n(K^\sigma_\rho G)\subseteq\mathscr{J}(K^\sigma_\rho H)\,K^\sigma_\rho G\subseteq\mathscr{J}(K^\sigma_\rho G).$$

В частности, если $n\neq 0$ в K, то $\mathscr{J}(K^\sigma_\rho H)\,K^\sigma_\rho G=\mathscr{J}(K^\sigma_\rho G)$.

Доказательство. Пусть $\{u_1-1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\}$ — полная система представителей смежных классов группы G по нормальной подгруппе H. Докажем, что t_{u_1}, $t_{u_2},\ \ldots,\ t_{u_n}$ является нормальным базисом для $K^\sigma_\rho G$ над $K^\sigma_\rho H$. Действительно, каждый элемент $x\in K^\sigma_\rho G$ представляется в виде

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_{u_i}t_{u_i}\quad(x_{u_i}\in K^\sigma_\rho H).$$

Кроме того, подгруппа H нормальна, и поэтому для любого u_i можем определить отображение σ_i в $K^\sigma_\rho H$ следующим образом:

$$\sigma_i(x)=t_{u_i}xt^{-1}_{u_i}\quad(x\in K^\sigma_\rho H).$$

Тогда, если $x,\ y\in K^\sigma_\rho H$, то

$$\sigma_i(xy)=t_{u_i}xyt^{-1}_{u_i}=t_{u_i}xt^{-1}_{u_i}t_{u_i}yt^{-1}_{u_i}=\sigma_i(x)\,\sigma_i(y).$$

Следовательно, σ_i является автоморфизмом кольца $K_\rho^\sigma H$.

Так как $t_{u_i}x = t_{u_i}xt_{u_i}^{-1}t_{u_i} = \sigma_i(x)t_{u_i}$, то утверждение теоремы следует из леммы 8 и теоремы 7.2.5 [3, с. 276].

Доказательство леммы 10 и леммы 11 аналогично доказательству леммы 7.1.5 [3, с. 273] и леммы 7.2.9 [3, с.279].

Лемма 10. *Если H — подгруппа группы G, то*

$$\mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)\bigcap K_\rho^\sigma H \subseteq \mathcal{J}(K_\rho^\sigma H).$$

Лемма 11. *Пусть H — подгруппа группы G и $\mathcal{L}$ — такое семейство групп, что*

1) $G \supseteq L \supseteq H$ для всех $L \in \mathcal{L}$.

2) Для каждого конечного подмножества $M \subseteq G$ существует такое $L \in \mathcal{L}$, что $M \subseteq L$.

Тогда, если $x \in K_\rho^\sigma H$, то $x \in \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{J}(K_\rho^\sigma L)$ для всех $L \in \mathcal{L}$.

При помощи леммы 10 и леммы 11 получается теорема 12, которая доказывается аналогично теореме 7.2.10 [3, с. 279].

Напомним, что p'-группа эта группа, которая не содержит элементы порядка p.

Теорема 12. *Пусть H — нормальная подгруппа группы G и G/H — локально конечная группа. Тогда*

$$\mathcal{J}(K_\rho^\sigma H)K_\rho^\sigma G \subseteq \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G).$$

Кроме того, если 1) $\operatorname{char} K = 0$ *или* 2) $\operatorname{char} K = p$ *и* G/H — *p'-группа, то* $\mathcal{J}(K_\rho^\sigma H)K_\rho^\sigma G = \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}$ — семейство из всех групп L, для которых $G \supseteq L \supseteq H$ и L/H — конечная группа. Тогда, так как G/H — локально конечная, то $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) леммы 11.

Если $x \in \mathcal{J}(K_\rho^\sigma H)$, то, по теореме 9, $x \in \mathcal{J}(K_\rho^\sigma L)$ для каждого $L \in \mathcal{L}$ и согласно леммы 11, $x \in \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$. Следовательно, $\mathcal{J}(K_\rho^\sigma H)K_\rho^\sigma G \subseteq \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$.

Пусть либо $\operatorname{char} K = 0$, либо $\operatorname{char} K = p$ и G/H — p'-группа и пусть $y \in \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$. Тогда, для некоторого $L \in \mathcal{L}$ имеем $y \in K_\rho^\sigma L \bigcap \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$. Но, согласно леммы 10, $\mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)\bigcap K_\rho^\sigma L \subseteq \mathcal{J}(K_\rho^\sigma L)$ и поэтому $y \in \mathcal{J}(K_\rho^\sigma L)$. Отсюда, и из теоремы 9 следует, что

$$y \in \mathcal{J}(K_\rho^\sigma H)K_\rho^\sigma L \subseteq \mathcal{J}(K_\rho^\sigma H)K_\rho^\sigma G,$$

т. е. $\mathcal{J}(K_\rho^\sigma G) = \mathcal{J}(K_\rho^\sigma H)K_\rho^\sigma G$.

Теорема 13. *Пусть K — поле характеристики p, и система факторов ρ симметрическая. Тогда, если F — локально конечная p-группа и $F \subseteq G_{\text{ker}}$, то $A_r(F, G) \subseteq \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$. Кроме того, если G/F — локально конечная p'-группа, то $A_r(F, G) = \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$.*

Доказательство. Так как система факторов ρ симметрическая, то согласно леммы 1, F является нормальной подгруппой группы G. Но $K^\sigma F = KF$ — обыкновенное групповое кольцо, и тогда, по лемме 8, 1.17 [3, с. 314], $\mathcal{J}(KF) = A(F, F)$. Следовательно,

$$\mathcal{J}(KF)K_\rho^\sigma G = A(F, F)K_\rho^\sigma G = A_r(F, G).$$

Отсюда, в силу теоремы 12, $A_r(F, G) \subseteq \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$ и, в случае когда G/F — локально конечная p'-группа, $A_r(F, G) = \mathcal{J}(K_\rho^\sigma G)$. Теорема доказана.

Группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathscr{R}$, если для каждого $1 \neq g \in G$ существует такая нормальная подгруппа N группы G, что $g \bar{\in} N$ и $G/N \in \mathscr{R}$.

Теорема 14. *Пусть K — поле характеристики p и система факторов ρ симметрическая. Тогда, если F — конечнопорожденная группа и $\mathscr{J}(K_\rho^\sigma G) = A_r(F, G)$, то F — конечная p-группа или F имеет бесконечный гомоморфный образ, который аппроксимируется конечными p-группами.*

Доказательство. Пусть $A_r(F, G) = \mathscr{J}(K_\rho^\sigma G)$. Тогда $A_r(F, G)$ — двусторонний идеал, и согласно [2, лемма 4], группа F нормальная и $F \subseteq G_{\mathrm{ker}}$. Поэтому $K^\sigma F = KF$ обыкновенное групповое кольцо и, очевидно,

$$A(F, F) = A_r(F, G) \cap KF = \mathscr{J}(K_\rho^\sigma G) \cap KF.$$

Но, по лемме 10, $\mathscr{J}(K_\rho^\sigma) \cap KF \subseteq \mathscr{J}(KF)$. Следовательно, $A(F, F) = \mathscr{J}(KF)$ и утверждение теоремы следует из теоремы 10.1.14 [3, с. 416].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Бовди. Скрещенные произведения полугруппы и кольца. *Сиб. матем. ж.*, **4**, 1963, № 3, 481—499.
2. А. А. Бовди, К. Х. Коликов. Лиевая нильпотентность и идеалы скрещенных произведений. *Докл. Болг. Акад. наук.*, **37**, 1984, № 11, 1447—1449.
3. D. S. Passman. The Algebraic Structure of Group Rings. N. Y., 1977.
4. А. А. Бовди. Групповые кольца. Ужгород, 1974.
5. Б. Л. Кираль. Обобщенная нильпотентность фундаментального идеала группового кольца. Укр. НИИНТИ 1987, № 1488 — Ук. 87, с 22.

Поступила 4. 12. 1989

Пловдивский университет
Факультет математики
4000 Пловдив
Болгария