Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

НЕКО Н. ГЕОРГИЕВ

В работе рассматривается диссипативная система с периодическим решением. Оценивается снизу период этого решения. Исследуется и структура характеристического множества системы.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1=x_2-ax_1,\ \dot{x}_2=x_3-bx_1,\ \dot{x}_3=-abx_1+g(x_1), \tag{1}$$

где a и b положительные постоянные, а функция $g(x_1)$ непрерывно дифференцируемая на промежутке $(-\infty, \infty)$. Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1) $g(-x_1)=-g(x_1)$;
2) $g'(x_1)<0$ при $0<x_1<\xi_0$ и $g'(x_1)>0$ при $\xi_0<x_1<\xi_1<1$;
3) $|g(x_1)/x_1|\leqq k$, где константа $k\leqq \min\{ab, a\sqrt{b}(a^2+b)/2(\sqrt{b}+\sqrt{a^2+b})\}$;
4) $g(x_1)/x_1>0$ при $x_1\geqq\xi_1$;
5) $\lim g(x_1)/x_1=l>0$ при $x_1\to+\infty$.

Запишем систему (1) в векторной форме

$$\dot{x}=v(x), \tag{2}$$

где $x=\{x_1, x_2, x_3\}$ и $v(x)=\{x_2-ax_1, x_3-bx_1, -abx_1+g(x_1)\}$.

Система (2), очевидно, имеет единственное положение равновесия $x=0$. Эта система определяет фазовый поток, который будем обозначать через g^t, $t\in \mathbb{R}$. Известно [1], что система (2) диссипативна.

В работе [2] исследован фазовый портрет системы (2). На основании обобщенной теоремы Брауэра о неподвижной точке имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если $g(x_1)$ удовлетворяет условиям 1—5, то система (2) имеет периодическое решение $\varphi(t, x^*)$ $(\varphi(0,x^*)=x^*)$, отличающееся от положения равновесия $x=0$.*

Период периодического решения $\varphi(t, x^*)$ будем обозначать через ω. Периодическое решение $\varphi(t, x^*)$, при этом лежит в плотном топологическом торе G_r и делает в G_r один оборот до своего замыкания. Отметим еще, что положение равновесия $x=0$ не принадлежит тору G_r.

В работе [2] доказана еще следующая теорема.

Теорема 2. *Если решение $\varphi(t)$ системы (2) не стремится к началу координат $x=0$ при $t\to+\infty$, то при возрастании t траектория этого решения попадает в тор G_r и больше не покидает его.*

Теперь если линеаризуем систему (2) в точке $x=0$, то получим

$$\dot{x}=Ax \tag{3}$$

где матрица A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ h-ab & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим [2], что матрица A имеет одно отрицательное собственное значение $\lambda_1<-\alpha$ и два комплексно-сопряженных значений $\lambda_2=\overline{\lambda}_3=\beta_1+i\beta_2$ с положительной действительной частью β_1. Обозначим через $h^{(i)}$ собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям λ_i. Так как особая точка $x=0$ векторного поля $v(x)=\{x_2-ax_1,\ x_3-bx_1,\ -abx_1+g(x_1)\}$ является гиперболической, то только две фазовые кривые системы (3), описываемые решениями $\pm h^{(1)}e^{\lambda_1 t}$, стремятся к положению равновесия $x=0$ при $t\to+\infty$, а остальные,невырожденные фазовые кривые, уходят в бесконечность при возрастании t. Ясно, что фазовый поток e^{At} системы (3) есть сжатие вдоль вектора $h^{(1)}$ и растяжение с кручением в плоскости $(h^{(2)},\ h^{(3)})$.

В силу теоремы Хартмана — Гробмана системы (2) и (3) топологически эквивалентные в окрестностни начала координат $x=0$. Отсюда, в силу теоремы 2, вытекает следующее утверждение, уточняющее фазовый портрет системы (2).

Теорема 3. *Только две фазовые кривые системы* (2) *стремятся к положению равновесия $x=0$ при $t\to+\infty$, а все остальные невыражденные фазовые кривые с течением времени t входят в тор G_r ц больше не выходят из него.*

Отметим при этом, что все фазовые кривые закручиваются в торе G_r в одну и ту же сторону.

В работе [3] получена оценка сверху периода ω периодического решения $\varphi(t, x^*)$ системы (2). Сейчас оценим период ω снизу.

Существует линейное, действительное и неособенное преобразование $P:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3$ такое, что отображение $x=Py$ приводит систему (2) к виду

$$\dot{y}=By+cs(x_1),\ y=\{y_1,\ y_2,\ y_3\}, \tag{4}$$

где

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_2 & .\beta_1 \end{pmatrix}$$

действительная жордановая форма матрицы A, $c=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$ — постоянный вектор и отображение $s(x_1)=g(x_1)-hx_1$.

Рассмотрим в трехмерном пространстве с координатами y_1, y_2, y_3 цилиндр

$$y_2^2+y_3^2=\delta^2, \tag{5}$$

где δ положительный параметр. Известно (см. [2]), что если δ достаточно малый параметр, то все замкнутые фазовые кривые системы закручиваются около цилиндра (5).

Так как понятие диссипативность системы инвариантно относительно линейного отображения, то и система (4) диссипативна. Пусть r^* радиус шара диссипативности системы (4) и $l=\sup|S(x_1)|$ при $|x_1|\leq\|P\|r^*$.

Положим

$$N^2=[\lambda_1^2+2(\beta_1^2+\beta_2^2)]\,r^{*2}+l^2\,\|c\|^2+2l\,\|c\|\,r^*\sqrt{\lambda_1^2+2(\beta_1^2+\beta_2^2)},\ N>0.$$

Теперь докажем следующую теорему:

Т е о р е м а 4. *Период* ω *периодического решения* $\varphi(t, x^*)$ *системы* (2) *удовлетворяет неравенство*

$$2\pi\delta/N \leqq \omega. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, длина γ траектории периодического решения $y(t)=P^{-1}\varphi(t, x^*)$ удовлетворяет неравенство

$$\gamma = \int_0^{\omega} \sqrt{\mathring{y}_1^2+\mathring{y}_2^2+\mathring{y}^2}\, dt \geqq 2\pi\delta\,. \tag{7}$$

Теперь в силу (4) легко получаем, что

$$\begin{aligned}\dot{v}_1^2+\dot{y}_2^2+\mathring{y}_3^2 &= \|\mathring{y}\|^2=(\lambda_1 y_1+c_1 s)^2+(\beta_1 y_2-\beta_2 y_3+c_2 s)^2+(\beta_2 y_2+\beta_1 y_3+c_3 s)^2\\ &=\lambda_1^2 y_1^2+(\beta_1 y_2-\beta_2 y_3)^2+(\beta_2 y_2+\beta_1 y_3)^2+\|c\|^2 s^2+2[\lambda_1 y_1 c_1+(\beta_1 y_2-\beta_2 y_3)c_2\\ &\quad+(\beta_2 y_2+\beta_1 y_3)c_3]s(x_1)\,.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу неравенства Коши — Шварца, имеем

$$\begin{aligned}\|\mathring{y}\|^2 &\leqq \lambda_1^2 y_1^2+2(\beta_1^2+\beta_2^2)(y_2^2+y_3^2)+\|c\|^2 l^2\\ &\quad+2\|c\|\, l\sqrt{\lambda_1^2 y_1^2+(\beta_1 y_2-\beta_2 v_3)^2+(\beta_2 y_2+\beta_1 y_3)^2}\\ &\leqq \lambda_1^2 y_1^2+2(\beta_1^2+\beta_2^2)(y_2^2+y_3^2)+2l\,\|y\|\,\|c\|\sqrt{\lambda_1^2+2(\beta_1^2+\beta_2^2)}\\ &\quad+l^2\|c\|^2 \leqq [\lambda_1^2+2(\beta_1^2+\beta_1^2)]\,\|y\|^2+2l\,\|c\|\,\|y\|\sqrt{\lambda_1^2+2(\beta_1^2+\beta_2^2)}+l^2\|c\|^2\\ &\leqq[\lambda_1^2+2(\beta_1^2+\beta_2^2)]r^{*2}+2l\,\|c\|\,r^*\sqrt{\lambda_1^2+2(\beta_1^2+\beta_2^2)}+l^2\|c\|^2=N^2\,.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу (7), окончательно получаем $N\omega \geqq 2\pi\delta$, что и требовалось доказать.

Теперь обозначим через r радиус шара диссипативности $R=\{\|x\|<r\}$ системы (2). Как известно, (см. [4]) существует такой шар $H=\{\|x\|<h\}$, что $(g^{\omega})^k R\subset H$, для любого натурального числа k, где $g^{\omega}=(g^t)|_{t=\omega}$ отображение Пуанкарэ фазового пространства R^3 системы (2) в себя. Пусть шар $Q=\{\|x\|<q\}\supset\overline{H}$, где $\overline{H}$ замыкание шара H. Тогда существует такое натуральное число $k(q)$, что для любого натурального числа $m\geqq k(q)$ имеем $(g^{\omega})^m Q\subset\overline{H}$. Выберем и зафиксируем какое-нибудь натуральное число $m\geqq k(q)$. Тогда, (см. [4]) множество $L=\bigcap_{l=0}^{\infty}(g^{\omega})^{lm}Q$, называемое характеристическим, является компактным и не зависит от m и $Q\supset\overline{H}$. Множество L инвариантно относительно отображения $g^{\omega}: g^{\omega}L=L$.

Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 5. *Характеристическое множество* L *содержит по крайней мере три фазовые кривые потока* g^t.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из самого определения множества L вытекает, что любая неподвижная точка отображения g^{ω} принадлежит L. Так как x^*, определяющая периодическое движение $\varphi(t, x^*)=g^t x^*$, является неподвижной точкой отображения g^{ω}, то $x^*\in L$. Пусть $t_1\in\mathrm{R}$ произвольное число. Тогда, в силу того, что поток g^t является коммутативной группой, имеем $g^{\omega}(g^{t_1}x^*)=g^{t_1}(g^{\omega}x^*)=g^{t_1}x^*$. Следовательно, $g^{t_1}x^*$ тоже является неподвижной точкой g^{ω}. Отсюда вытекает, что $g^t x^*\in L$ для любого $t\in\mathrm{R}$, Очевидно, положение равновесия $x=0$ потока g^t, как неподвижная точка отображения g^{ω}, тоже принадлежит L.

Покажем теперь, что L связное множество и следовательно, является континуумом. Допустим, что L несвязно. Тогда существуют два непустых, непересекающихся и замкнутых множества L_1 и L_2, такие, что L есть сумма L_1 и L_2, т. е

$$L=L_1\cup L_2,\ L_1\cap L_2=\varnothing,\ \overline{L}_i=L_i,\quad L_i\neq\varnothing\,. \tag{8}$$

В таком случае, расстояние $d=\rho(L_1L_2)$ между множествами L_1 и L_2 положительно. Рассмотрим множества $k_i=\{x\in\mathrm{R}^3,\ \rho(L_i,\ x)<d/3\}$, $i=1{,}2$. Очевидно, объединение $K_1\cup K_2$ является окрестностью L. Но тогда при достаточно большом l имеем $(g^{\omega})^{lm}Q\subset K_1\cup K_2$. С другой стороны, $(g^{\omega})^{lm}Q$ континуум, как непрерывный образ континуума Q. Тогда $(g^{\omega})^{lm}Q$ содержится только в одном из двух множеств K_1 и K_2. Пусть, например, $(g^{\omega})^{lm}Q\subset K_1$. Отсюда следует, что $L\subset K_1$, и, следовательно, $L\cap K_2=\varnothing$, что противоречит (8).

Теперь из связности множества L вытекает, что L содержит и точки, отличные от положения равновесия, которые не принадлежат периодической траектории. Пусть $\widetilde{x}$ является такой точкой. Докажем, что траектория движения точки $\widetilde{x}$ под действием потока g^t тоже принадлежит множеству L.

Пусть $x(t,\ t_0,\ x_0)$ решение системы (2) с начальным условием t_0, x_0. Через S будем обозначать множество точек $x,\ t$ расширенного фазового пространства $\mathrm{R}^3\times\mathrm{R}$ системы (2), представимое в виде $(g^tx_0,\ t)$, где $x_0\in L$, $t\in(-\infty,\infty)$. Множество S устойчиво в целом (см. [4]). Это означает, что по любому $\varepsilon>0$ можно найти $\delta>0$, такое, что из неравенства $\rho(x_0,\ S_{t_0})<\delta$ вытекает неравенство

$$\rho\,(x(t,\ t_0,\ x_0),\ S_t)<\varepsilon,\ \text{при}\ 0\leqq t<\infty \tag{9}$$

и

$$\lim\ \rho\,(x(t,\ t_0,\ x_0),\ S_t)=0,\ \text{при}\ t\to\infty\,, \tag{10}$$

где S_τ пересечение множества S с гиперплоскостью $t=\tau$.

Теперь покажем, что L не зависит от ω. Рассмотрим и множество $L(\omega_1)=\bigcap\limits_{l=0}^{\infty}(g^{\omega_1})^{lm}Q$. Так как система (2) автономна, то это множество тоже является характеристическим, если радиус q шара Q и число m достаточно большие. В силу независимости $L(\omega_1)$ и L от m и Q, то мы будем считать, что они совпадают в выражении для $L(\omega_1)$ и L. Отметим, что $L(\omega_1)$ инвариантно относительно отображения $g^{\omega_1}:g^{\omega_1}L(\omega_1)=L(\omega_1)$. Отсюда следует, что $g^{-\omega_1}L(\omega_1)=L(\omega_1)$. Следовательно, $(g^{\omega_1})^mL(\omega_1)=L(\omega_1)$ для любого целого числа m.

Пусть числа ω_1 и ω несоизмеримые и $x_0\in L(\omega_1)$. Из инвариантности $L(\omega_1)$ относительно операторов $g^{m\omega_1}$ следует, что $g^{-m\omega_1}x_0\in L(\omega_1)$ для любого целого числа m. Тогда, в силу (9) и (10) следует, что

$$\rho\,(g^t(g^{-m\omega_1}x_0,\ S_t)<\varepsilon\quad\text{при}\quad n>t_0\,, \tag{11}$$

где t_0 достаточно большое число. При этом можем считать, что t_0 не зависит от $x_0\in L(\omega_1)$ потому что $L(\omega_1)$ — компактное множество. Если теперь в (11) положим $t=n\omega$ при $n\geqq n_0$, где n_0 достаточно большое натуральное число, то получим

$$\rho\,(g^{n\omega-m\omega_1}x_0,\ L)<\varepsilon. \tag{12}$$

С другой стороны, множество чисел $n\omega-m\omega_1$, в силу принципа ящиков Дирихле (см., например [5]), всюду плотно на отрезке $[0,\ \omega_1]$. Отсюда, в силу замкнутости множества L, вытекает, что $g^tx_0\in L$ при $0\leqq t\leqq\omega_1$. В частности, отсюда следует, что $x_0 \in L$. Итак, мы показали, что $L(\omega_1) \subset L$. Аналогично можно доказать, что $L \subset L(\omega_1)$. Отсюда получаем, что $L(\omega_1) = L$. Отметим, что в силу инвариантности $L(\omega_1)$ относительно g^{ω_1} следует, что $g^t x_0 \in L(\omega_1)$ для любого t.

Пусть ω и ω_1 соизмеримые числа, т. е. $\omega_1 = \frac{p}{q}\omega$, где p и q натуральные числа. Тогда если в $L(\omega_1)$ поменяем m на qm, то получим

$$L(\omega_1) = \bigcap_{l=0}^{\infty} (g^{\omega})^{lpm} Q = L.$$

Итак, множество L является атрактором.

Теперь перейдем к доказательству утверждения, что $g^t \tilde{x} \in L$, где $\tilde{x} \neq 0$ и $\tilde{x} \neq \varphi(t, x^*)$, $t \in \mathbb{R}$.

В силу доказанного точка $\tilde{x}$ принадлежит и множеству $L(\omega_1)$. Отсюда, в силу инвариантности $L(\omega_1)$ относительно отображения g^{ω_1}, следует что $g^{\omega_1}\tilde{x} \in L(\omega_1) = L$. Итак, как ω_1 произвольное число, то $g^t \tilde{x} \in L$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом, мы показали что L состоит из целых фазовых кривых. Следовательно, L инвариантно относительно фазового потока $g^t : g^t L = L$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Множество L содержит объединение M всех точек, лежащих на замкнутых фазовых кривых потока g^t. Мера Лебега $\mu(M)$ множества M равняется нулю.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t, x_1) = g^t x_1$ периодическое решение системы (2) с периодом ω_1. Тогда, в силу теоремы 5, следует что $g^t x_1 \in L(\omega_1) = L$.

Покажем, что мера Лебега $\sigma = \mu(L)$ множества L равняется нулю. Предположим, что это не так, т. е. что $\sigma > 0$. Тогда, на основании инвариантности L относительно дифеоморфизма, в силу теоремы Лиувилля, получаем.

$$\sigma = \int_L dx = \int_L \det (g^{\omega} y)' \, dy = \int_L e^{\int_0^{\omega} trv'(g^t y) dt} dy. \tag{13}$$

С другой стороны, так как след $trv'(g^t y)$ производной Фреше $v'(g^t y)$ является дивиргенцией векторного поля $v(x)$, то из (13) получаем

$$\sigma = \int_L e^{\int_0^{\omega} div(v) dt} dy = e^{-\alpha\omega} \sigma.$$

Отсюда следует, что $\sigma' = 0$. Наконец из соотношения $M \subset L$, в силу монотонности меры, имеем $\mu(M) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Плисс. Об ограниченности решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. *Доклады АН СССР*, 139, 1961, 302—304.
2. Н. Н. Георгиев. Исследование нелинейной дифференциальной системы третьего порядка. *Плиска*, 3, 1981, 67—74.
3. Н. Н. Георгиев. Об оценке периода периодического решения трехмерной диссипативной системы. *Сердика*, 5, 1978, 222—228.
4. В. А. Плисс. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М., 1977.
5. В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984.

Институт математики с Вычислительным центром П. Я. 373, 1090 София

Поступила 26. 1. 1990 г.