Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ÜBER DIE KONVERGENZORDNUNGEN EINIGER KLASSEN VON ITERATIONSVERFAHREN

N. KJURKCHIEV

Es wird eine Reihe von Interationsverfahren beschrieben und auf ihre R-Ordnung hin untersucht.

1. Einleitung. Für die einzige positive Nullstelle $\sigma_{p,q}^{(n)}$ des Polynoms

$$P_{n,p,q}(s)=s^n-(p+1)\sum_{i=0}^{n-1} q^i s^{n-i-1},\ p\geqq 0,\ q>0,\ n\geqq 2 \tag{1}$$

sind die Abschätzungen [1,2]

$$\frac{n}{n+1}(p+q+1)<\sigma_{p,q}^{(n)}<p+q+1 \quad (n>q/(p+1)), \tag{2}$$

$$p+q+1-\frac{(p+1)\,q^n}{(p+q+1)^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\sigma_{p,q}^{(n)}<p+q+1-\frac{(p+1)q^n}{(p+q+1)^n} \tag{3}$$

bekannt. Die Abschätzung (3) wurde für $p\geqq 0$, $q=1$ von Traub [3] bewiesen.

Wir betrachten die Folgen $\{x^{(k)}\}$, $\{y^{(k)}\}$ $(0\leqq x^{(k)}, y^{(k)}, k\geqq 0)$ mit

$$\begin{aligned} x^{(k+1)}&\leqq \alpha\left(y^{(k+1)}\right)^{p+1}, \quad k\geqq -1, \quad p\in N,\\ y^{(k+1)}&\leqq \beta\, x^{(k)}\left(y^{(k)}\right)^{q}, \quad k\geqq 0, \quad q\in N. \end{aligned} \tag{4}$$

Für die R-Ordnung der Folge $\{x^{(k)}\}$ ist die Abschätzung [1]

$$O_R(0, \{x^{(k)}\})>p+q+1$$

bekannt.

Satz 1. *Unter der Voraussetzung $y^{(0)}<1/\alpha\beta$ für die R-Ordnung gilt*

$$O_R(0, \{x^{(k)}\})>\sigma_{p,q}^{(n+1)}>p+q+1-\frac{(p+1)\,q^{n+1}}{(p+q+1)^{n+1}}e. \tag{5}$$

Beweis. Offensichtlich ist $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)}=0$. Für $\{x^{(k)}\}$ und $\{y^{(k)}\}$ gilt [1] $y^{(k+1)}\leqq\beta\alpha\left(y^{(k)}\right)^{p+q+1}$, woraus dann rekursiv folgt, daß

$$x^{(k+1)}\leqq\gamma(n)\prod_{i=0}^{n}\left(x^{(k-i)}\right)^{q^i(p+1)},\ n\leqq k,\ n\geqq 1$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten $\gamma(n)$.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes, Vol. 17, 1991, p. 139-143.

Aus [4] folgt $O_R(0,\{x^{(k)}\})>\sigma_{p,q}^{(n+1)}$, wobei $\sigma_{p,q}^{(n+1)}$ die einzige positive Nullstelle des Polynoms

$$s^{n+1}-(p+1\sum_{i=0}^{n} q^i s^{n-i}=0$$

ist. Es gilt dann Abschätzung (5).

Wir betrachten weiter die Folgen $\{x^{(k)}\}$, $\{y^{(k,0)}\},\ldots,\{y^{(k,s)}\}$, $s\geq 0$ mit

$$\begin{gathered}0\leq y^{(k+1,0)}\leq \alpha^{(0)}(x^{(k)})^2,\\ 0\leq y^{(k+1,i)}\leq \alpha^{(i)}y^{(k+1,i-1)}x^{(k)},\quad 1\leq i\leq s\quad (s\in N),\\ 0\leq x^{(k+1)}\leq \alpha^{(s+1)}y^{(k+1,s)}x^{(k)},\ \alpha^{(i)}>0,\quad 0\leq i\leq s+1.\end{gathered}\tag{6}$$

Für die R-Ordnung der Folge $\{y^{(k,i)}\}$ ist die Abschätzung [5]

$$O_R(0,\{y^{(k,i)}\})\geq s+3,\quad 0\leq i\leq s$$

bekannt.

Satz 2. *Unter der Voraussetzung*

$$0\leq x^{(0)}<1/\prod_{\nu=0}^{s+1}\alpha^{(\nu)}$$

gilt für die R-Ordnung

$$O_R(0,\ \{y^{(k,i)}\})\geq s+3-\frac{(i+2)(s-i+1)^{n+1}}{(s+3)^{n+1}}e.\tag{7}$$

Beweis. Offensichtlich gilt

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=0,\ \lim_{k\to\infty}y^{(k,i)}=0,\quad 0\leq i\leq s.$$

Für $\{x^{(k)}\}$ und $\{y^{(k+1,i)}\}$ haben wir [5]

$$0\leq x^{(k+1)}\leq \prod_{\mu=i+1}^{s+1}\alpha^{(\mu)}y^{(k+1,i)}(x^{(k)})^{s-i+1},$$

dann folgt rekursiv

$$0\leq y^{(k+1,i)}\leq\gamma(s,\ i,\ n)\prod_{j=0}^{n}(y^{(k-j,i)})^{(i+2)(s-i+1)^j},\quad 0\leq i\leq s$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten $\gamma(s,\ i,\ n)$.

Aus [4] folgt $O_R(0,\{y^{(k,i)}\})\geq\tau_{s,i}^{(n+1)}$, wobei $\tau_{s,i}^{(n+1)}$ die einfache und positive Wurzel des Polynoms

$$t^{n+1}-(i+2)\sum_{j=0}^{n}(s-i+1)^j t^{n-j}=0$$

ist. Es gilt dann die Abschätzung (7).

Wir betrachten noch die Folge $\{x_n\}$ mit

$$0\leq x_{n+1}\leq\alpha\prod_{j=0}^{s}x_{n-j}^{m_j}+\beta\prod_{j=0}^{s}x_{n-j}^{n_j}+\cdots+\delta\prod_{j=0}^{s}x_{n-j}^{P_j},\ \lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ldots,\ \delta>0,\ m_j\geq 0,\ n_j\geq 0,\ldots,\ P_j\geq 0,\ i=0,\ldots,\ s,$$

$$\sum_{k=0}^{s} m_k > 1, \ \sum_{k=0}^{s} n_k > 1, \ldots, \sum_{k=0}^{s} p_k > 1.$$

Unter der Voraussetzung $\tau < \sigma, \ldots, \tau < \omega$ für die R-Ordnung gilt [4] $O_R(0, \{\varepsilon_n\}) > \tau > 1$, wobei $\tau, \sigma, \ldots, \omega$ die positiven Nullstellen der Gleichungen

$$\tau^{s+1} = m_0 \tau^s + \cdots + m_{s-1} \tau + m_s,$$

$$\sigma^{s+1} = n_0 \sigma^s + \cdots + n_{s-1} \sigma + n_s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega^{s+1} = p_0 \omega^s + \cdots + p_{s-1} \omega + p_s$$

sind.

Es sei noch erwähnt, ohne auf Einzelheiten einzugehen, daß wir aus (3) verhältnismäßig leicht neue präzise Abschätzung für die R-Ordnung bekommen.

2. Klassen von Iterationsvorschriften. Es sei A eine nichtsinguläre $m \times m$ — Matrix und $X^{(0)}$ eine $m \times$n Intervallmatrix, so daß $A^{-1} \in X^{(0)}$ gilt. In [6] wird mit Hilfe der Intervallrechnung folgendes Iterationsverfahren betrachtet

$$X^{(k+1)} = \{m(X^{(k)}) + X^{(k)}(I - Am(X^{(k)}))\} \cap X^{(k)}. \tag{8}$$

Dabei bedeutet $m(X) = m((X_{ij})) = ((x_{ij}^1 + x_{ij}^2)/2))$ die Mittelpunktsmatrix der Intervallmatrix X. Für die R-Ordnung von (8) gilt $O_R((8), A^{-1}) \geqq 2$.

Wir betrachten eine Modifikation eines Verfahrens aus [6] (s. also [7,8]) zur iterativen Verbesserung der Einschließung für die Inverse einer Matrix

$$\begin{aligned} &Y^{(0)} = X^{(0)}, \\ &Y^{(k+1)} = \{m(Y^{(k)}) + X^{(k)}(I - m(Y^{(k)}))\} \cap X^{(k)}, \\ &X^{(k+1)} = \{m(Y^{(k+1)}) + Y^{(k+1)}(I - Am(Y^{(k+1)}))\} \cap Y^{(k+1)}, \quad k \geqq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Unter der Voraussetzung $A^{-1} \in X^{(0)}$ gelten für die Folge der Iterierten $X^{(0)} \supseteq X^{(1)} \supseteq \ldots$ die Aussagen (Herzberger [8]):

$$A^{-1} \in X^{(k)}, \quad k \geqq 0$$

$$\rho(|I - AX|) < 1 \text{ für alle } X \in X^{(0)} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} X^{(k)} = A^{-1},$$

$$O_R((9), A^{-1}) \geqq 3 \frac{n}{n+1}.$$

Bemerkung I. Für die Abschätzung der Konvergenzordnung von (9) ist nach [6] nun die, nach der Descartesschen Vorzeichenregel eindeutig existierende, einfache und positive Nullstelle $\sigma^{(n)}$ des Polynoms

$$P_n(s) = s^{n+1} - 2 \sum_{i=0}^{s} s^i = 0$$

maßgeblich. Es gilt dann dafür die Abschätzung $O_R((9), A^{-1}) \geqq \sigma^{(n)}$, $n \geqq 1$. Aus (3) folgt aber die Ungleichung

$$O_R((9), A^{-1}) \geqq 3 - \frac{2}{3^{n+1}} e. \tag{10}$$

Wir betrachten die Modifikation [6, Ch. 18]

$$Y^{(0)} = X^{(0)},$$

(11) $$Y^{(k+1)} = \{m(Y^{(k)} \sum_{i=0}^{r-2} (I - Am(Y^{(k)}))^i + X^{(k)} (I - Am(Y^{(k)}))^{r-1}\} \cap X^{(k)},$$

$$X^{(k+1)} = \{m(Y^{(k+1)} \sum_{i=0}^{r-2} (I - Am(Y^{(k+1)}))^i + Y^{(k+1)}(I - Am(Y^{(k+1)}))^{r-1}\} \cap Y^{(k+1)}.$$

Für die R-Ordnung des Verfahrens (11) gilt [1]

$$O_R((11), A^{-1}) \geqq \frac{n+1}{n+2}(2r-1).$$

Bemerkung 2. Unter der Voraussetzung $A^{-1} \in X^{(0)}$ und $n > (r-1)/r$ für die R-Ordnung gilt (siehe (3))

(12) $$O_R((11), A^{-1}) \geqq 2r - 1 - \frac{r(r-1)^{n+1}}{(2r-1)^{n+1}} e.$$

Wir betrachten noch die Modifikation [6, Ch, 18]

(13) $$\begin{aligned} Y^{(k+i)} &= m(X^{(k)}) + X^{(k)}(I - Am(X^{(k)})), \\ Y^{(k+1,\, i)} &= m(X^{(k)} + Y^{(k+1,\, i-1)} (I - Am(X^{(k)})), \quad 1 \leqq i \leqq s, \\ X^{(k+1)} &= m(X^{(k)}) + Y^{(k+1,\, s)}(I - Am(X^{(k)})). \end{aligned}$$

Für die R-Ordnung des Verfahrens (13) gilt [5]

$$O_R(A^{-1}, \{X^{(k)}\}) \geqq \frac{n+1}{n+2}(s+3),$$

$$O_R(A^{-1}, \{Y^{(k,\, i)}\}) \geqq \frac{n+1}{n+2}(s+3).$$

Bemerkung 3. Aus (3) folgt

(14) $$O_R(A^{-1}, \{Y^{(k,\, i)}\}) \geqq s + 3 - \frac{(i+2)(s-1+1)^{n+1}}{(s+3)^{n+1}} e.$$

Weitere Untersuchungen zur Frage der Konvergenz des Iterationsverfahrens sind von Herzberger [9-20] durchgeführt worden. Es sei erwähnt, daß man aus (3) verhältnismäßig leicht neue präzise Abschätzungen für die R-Ordnung des Iterationverfahrens erhält.

Betrachtet sei hier noch die Problemstellung

$$f(\xi) = 0,$$

wobei ein Ausgangsintervall $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] \ni \xi$ gegeben sei. Zur Berechnung einer monoton fallenden Folge $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ von verbesserten Einschließungsintervallen kann man nun das intervallmäßige Newton-Verfahren

$$X^{(k+1)} = \{m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{f'(X^{(k)})}\} \cap X^{(k)}, \quad k \geqq 0$$

mit $m(X^{(k)}) = (x_1^{(k)} + x_2^{(k)})/2$ benutzen (s. [6]). Die R-Ordnung der Folge $\{d(X^{(k)})\}_{k=0}^{\infty}$ der Durchmesser ist größer gleich 2.

Wir betrachten auch ein etwas modifiziertes Verfahren [7]

$$Y^{(0)}=X^{(0)},$$

$$(15)\qquad Y^{(k+1)}=\{m(X^{(k)})-\frac{f(m(X^{(k)}))}{f'(Y^{(k)})}\}\cap X^{(k)},$$

$$X^{(k+1)}=\{m(Y^{(k+1)})-\frac{f(m(Y^{(k+1)}))}{f'(Y^{(k+1)})}\}\cap Y^{(k+1)},$$

für welcher [7]

$$O_R((15),\ \xi)\geqq\sigma^{(n)}>\frac{3n}{n+1}$$

gilt.

Bemerkung 4. Aus (3) folgt wieder

$$(16)\qquad O_R((15),\ \xi)>3-\frac{2}{3^{n+1}}e.$$

* This work has been partially supported by the Ministry of Science and Higher Education — National Fund Science Researches under contract № 91 010 MM.

LITERATUR

1. J. Herzberger. On the R-order of some recurrences with applications to inclusion methods. *Computing*, **36**, 1986, 175-180.
2. N. Kjurkchiev. Note on the estimation of the order of convergence of some iterative methods. BIT, 1991 (in print).
3. J. Traub. Iterative methods for the solution of equations. N. Y., 1982.
4. J. Schmidt. On the R-order of coupled sequences. *Computing*, **26**, 1981, 333-342.
5. J. Herzberger. On the R-order of some recurrences with applications to inclusion methods. II. *Computing*, **37**, 1986, 255-259.
6. G. Alefeld, J. Herzberger. Introduction to Interval Computations. New York, 1983.
7. J. Herzberger. Über ein intervallmäßiges Newton-Verfahren. *ZAMM*, **66**, 1986, T413-T415.
8. J. Herzberger. Über ein Iterationsverfahren zur Einschließung der inversen Matrix. *Computing*, **35**, 1985, 185—188.
9. J. Herzberger. Some aspects of iterative methods for finding the inverse matrix. Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai, 50. Numerical methods, Miskolc, 1986, 191-205.
10. J. Herzberger. Ein effizienter Algorithmus zur iterativen Einschließung der inversen Matrix. *Applikace Matematiky*, **4**, 1987, 271—275.
11. J. Herzberger. On the efficiency of iterative methods for bounding the inverse matrix. Numerical Methods and Approximation Theory. III (Nis, August 18-21, 1987), 251-256.
12. J. Herzberger. Zur Monotonie der intervallmäßigen Schulz-Verfahren höherer Ordnung. *ZAMM*, **67**, 1987, 137—138.
13. J. Herzberger. Bemerkungen über ein Iterationsverfahren zur Einschließung der inversen Matrix. *ZAMM*, **67**, 1987, T479-T480.
14. J. Herzberger. Monotone Einschließungsalgorithmen für die inverse Matrix mit Hilfe von PASCAL-SC. *Angewandte Informatik*, **5**, 1988, 207—212.
15. J. Herzberger. On the monotonicity of higher-order interval iterations for bounding the inverse matrix. *Computing*, **40**, 1988, 367-372.
16. J. Herzberger. On the convergence of an iterative method for bounding the inverses of an interval matrix. *Computing*, **41**, 1989, 153-162.
17. J. Herzberger. Iterationsverfahren höherer Ordnung zur Einschließung der Inversen einer Matrix. *ZAMM*, **69**, 1989, 115—120.
18. J. Herzberger. A class of efficient iterative methods of bounding the inverse of a linear bounded operator. *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, 10, 1989, 947-959.
19. J. Herzberger, L. Petkovic. Efficient iterative algorithms for bounding the inverse of a matrix. *Computing*, **44**, 1990, 237-244.
20. J. Herzberger. Using error-bounds for hyperpower methods to calculate inclusions for the inverse of a matrix. *BIT*, **30**, 1990, 508-515.
21. J. Herzberger. Über die Konvergenzordnungen einiger Klassen intervallmäßiger Iterationsverfahren, *ZAMM*, 66, 1986, 509—511.

Institute of Mathematics with
Computer Centre
P. O. Box 373
Sofia, Bulgaria

Received 12. 01. 1991