Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

СЕРДИКА – Българско
математическо списание
17 (1991) 228-232

АППРОКСИМАЦИЯ ОДНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ИГРЫ N ЛИЦ

ТОДОР ГИЧЕВ

РЕЗЮМЕ. В работах [1,2] изучается полубесконечная задача математического программирования, причем в [1] формулируются необходимые условия оптимальности, а в [2] исследуется зависимость решения этой задачи от некоторых параметров. В настоящей работе рассматривается полубесконечная игра N лиц. Исследуется возможность аппроксимации этой игры с помощью последовательности игр множества стратегий в которых определяются конечным числом неравенств. Характеризуются аппроксимирующие свойства множеств точек равновесия по Нэшу в играх из этой последовательности. Рассматриваются игры в чистых и в смешанных стратегиях. Во втором из этих двух случаев близость двух функций распределения определяется расстоянием Хаусдорфа [3-5].

1. Пусть $M_k, k = 1, \ldots, N$ – линейные компактные метрические пространства с метрическими функционалами r_k и их прямое произведение обозначено через $M = \times_{k=1}^{N} M_k$ Пусть, далее, для каждого $s = 0, 1, \ldots$ через Z_s^k обозначены замкнутые выпуклые подмножества пространства $M_k, k = 1, \ldots, N$. Если $x_k \in M_k, k = 1, \ldots, N$, то вводится обозначение $X = (x_1, \ldots, x_N)$. На множестве M определены действительные непрерывные функции $f_k(x_1, \ldots, x_N), k = 1, \ldots, N$. Предполагается, что функция f_k вогнута по x_k при фиксированных $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N$. Через G_s обозначим игру N лиц с множествами стратегий и с функцией полезности для k-ого игрока соответственно Z_s^k и f_k.

Дальнейшие исследования проводятся в случае, когда при всех $k = 1, \ldots, N$ выполняются следующие предположения:

А. Множества Z_0^k непустые и при всех $s = 1, 2, \ldots$ имеет место включение $Z_0^k \subset Z_s^k$.

Б. Если $\{x^s\}_{s=1}^{\infty}$ последовательность точек $x^s \in Z_z^k$ и $\lim_{s\to\infty} x^s = x^0$, то $x^0 \in Z_0^k$.

Через $P_s, s = 0, 1, \ldots$, обозначим множество точек равновесия по Нэшу в игре G_s, которое при сделанных предположениях в силу теоремы Нэша непусто [6].

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения* **А** *и* **Б**. *Тогда имеет место соотношение*

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{X_s \in P_s} \inf_{X_0 \in P_0} \max_{1 \le k \le N} r_k(x_k^s, x_k^0) = 0,$$

где $X_s = (x_1^s, \ldots, x_N^s)$ *при* $s = 0, 1, \ldots$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся такие число $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{X_s\}_{s=1}^{\infty}$ точек равновесия $X_s \in P_s$, $X_s = (x_1^s, \ldots, x_N^s)$, что при $s = 1, 2, \ldots$ выполняется

$$\inf_{X_0 \in P_0} \max_{1 \leq k \leq N} r_k(x_k^s, x_k^0) > \varepsilon. \tag{1}$$

Так как X_s принадлежат компактному множеству M, то не ограничивая общности можем считат, что

$$\lim_{s \to \infty} X_s = X_0, X_0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0) \tag{2}$$

и в силу предположения **Б** $x_k^0 \in Z_0^k$.

Пусть $X = (x_1, \ldots, x_N)$, $x_k \in Z_0^k$ – любой набор стратегий играков в игре G_0. В силу предположения **А** при всех $s = 1, 2, \ldots$ выполняется $x_k \in Z_s^k$, и так как $X_s \in P_s, X_s = (x_1^s, \ldots, x_N^s)$, то

$$f_k(x_1^s, \ldots, x_{k-1}^s, x_k, x_{k+1}^s, \ldots, x_N^s) \leq f_k(X_s).$$

Сделав предельний переход $s \to \infty$ в этом неравенстве согласно (2) получим

$$f_k(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_N^0) \leq f_k(X_0).$$

Это однако означает, что $X_0 \in P_0$ и в силу (2) приходим к противоречию с (1). Этим теорема доказана.

Остальная часть работы посвящена некоторым приложениям этой теоремы в случае, когда множества стратегий Z_0^k, $k = 1, \ldots, N$, игроков в игре G_0 определяются бесконечным множеством неравенств.

2. Пусть снова M_k, $k = 1, \ldots, N$, - линейные компактные метрические пространства с метрическими функционалами r_k и чрез H_k обозначено прямое произведение $[0, 1] \times M_k$. Пусть, далее, $A_k(t, y)$, $k = 1, \ldots, N$, определенные на H_k непрерывные действительные функции, которые выпукли по y а $a_k(t)$, $k = 1, \ldots, N$, действительные функции, которые определены и непрерывны на отрезке $[0, 1]$. Через Z_0^k, $k = 1, \ldots, N$, обозначим множество тех $y \in M_k$, для которых при всех $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$A_k(t, y) \leq a_k((t). \tag{3}$$

В дальнейшем предполагается, что множества Z_0^k непустые.

Пусть для каждого $s = 1, 2, \ldots$ фиксировано множество $T_s = \{t_i^s | = 0, 1, \ldots, \alpha_s\}$ чисел t_i^s для которых

$$0 = t_0^s < t_1^s < \ldots < t_{\alpha_s}^s = 1$$

и кроме того $t_{i+1}^s - t_i^s \leq s^{-1}$. Через Z_0^k, $s = 1, 2, \ldots$ обозначим множество тех $y \in M_k$, для которых при всех $t \in T_s$ имеет место неравенство (3).

При всех $s = 0, 1, \ldots$ множества Z_s^k выпукли и компактны и кроме того выполняется предположение **А**. В следующей лемме доказывается, что выполняется и предположения **Б**.

Лемма 1. *Если при фиксированном $k = 1, \ldots, N$ для последовательности точек $\{x_k^s\}_{s=1}^{\infty}$ имеем $x_k^s \in Z_s^k$ и $\lim_{s \to \infty} x_k^s = x_k^0$, то $x_k^0 \in Z_0^k$.*

Доказательство. Из компактности множества M_k следует, что $x_k^0 \in M_k$. Для доказательства леммы достаточно показать, что если $t \in [0,1]$, то выполняется неравество $A_k(t, x_k^0) \leq a_k(t)$. Допустим противное. Тогда найдутся такие $t \in [0,1]$, и число $\varepsilon > 0$ что $A_k(t_0, x_k^0) > a_k(t_0) - \varepsilon$. Из этого неравенства, из непрерывности функций A_k и a_k и из свойств множества T_s следует, что при всех достаточно больших s найдется такое число $t_s \in T_s$ что

$$A_k(t_s, x_k^s) > a_k(t_s) - (\varepsilon/2).$$

Это неравенство однако означает, что $x_k^s \notin Z_s^k$. Достигнутое противоречие доказывает лемму.

При $s = 0, 1 \dots$ рассмотрим игру N лиц G_s с множествами стратегий - введеные в этой части работы множества Z_s^k и с функциями полезности $f_k(x_1, \dots x_N)$, $k = 1, \dots, N$, которые удовлетворяют всем перечисленным в первой части работы требованиям. Для последовательности игр $\{G_s\}_{s=1}^{\infty}$ выполняются все предположения теоремы 1 и следовательно имеет место ее заключение. В этом случае теорема 1 предоставляет возможнсть аппроксимировать игру G_0, множества стратегий отдельных игроков в которой описывается бесконечным множеством неравенств, с последовательностей игр, в каждой из которых множества стратегий отдельных игроков определяются конечным числом неравенств.

3. Пусть, далее, пространства M_k, $k = 1, \dots, N$ из второй части работы совпадают с отрезком $[0,1]$. В этом случае при $k = 1, \dots, N$ снова тем же способом конструируются множеств Z_s^k, $s = 0, 1, \dots$. Предполагается, что все эти множества непустые. Через $\mathcal{L}_s^k$ обозначим множество вероятностных распределений в Z_s^k. Будем считать, что функции $\varphi \in \mathcal{L}_s^k$ определены на всем отрезке $[0,1]$ следующим образом:

$$\varphi(y) = \begin{cases} \inf\limits_{u \in Z_s^k, u \geq y} \varphi(u) & y \in [0, y_0) \\ 1 & y \in [y_0, 1] \end{cases}$$

где $y_0 = \sup\{v | v \in Z_s^k\}$.

Для каждых двух определенных на отрезке $[0,1]$ вероятностных разпределений φ_1, φ_2 вводится согласно $[3-5]$ расстояние Хаусдорфа $R(\varphi_1, \varphi_2)$. Если $\varphi(t)$, $t \in [0,1]$, - вероятностное распределение, положим

$$I_\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(0) & t = 0 \\ \sup\limits_{\tau < t} \varphi(\tau) & t \in (0,1]; \end{cases} \qquad S_\varphi(t) = \begin{cases} \inf\limits_{\tau > t} \varphi(\tau) & t \in [0,1) \\ \varphi(1) & t = 1, \end{cases}$$

$$\bar{\varphi} = \{(t, \alpha) | t \in [0,1],\ \alpha \in [I_\varphi(t), S_\varphi(t)]\}.$$

Для вероятностных распределений $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $t \in [0,1]$ введем отклонение

$$\varphi_i(t) \dot{-} \varphi_j = \min_{(\tau, \alpha) \in \bar{\varphi}_j} \max[|t - \tau|, |\varphi_i(t) - \alpha|],\ i \neq j,$$

и наконец определим расстояние Хаусдорфа по формуле

$$R(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in [0,1]} \max[\varphi_1(t) \dot{-} \varphi_2,\ \varphi_2(t) \dot{-} \varphi_1].$$

Относительно метрического функционала R множество всех вероятностных распределений на отрезке [0,1] является компактным [5]. Кроме того имеет место и следующая

Лемма 2. *При всех $k = 1, \ldots, N$ множества $\mathcal{L}_s^k$, $s = 0, 1, \ldots$ компактны относительно расстояния Хаусдорфа.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_p\}_{p=1}^{\infty}$ - последовательность функций $\varphi_p \in \mathcal{L}_s^k$ и $\lim\limits_{p\to\infty} R(\varphi_p, \varphi_0) = 0$. В силу леммы 2 из [5] функция φ_0 неубывающая. Допустим, что $\varphi_0 \in \mathcal{L}_s^k$. Тогда найдется точка τ_1, которая принадлежат открытому множеству $U = (0,1) \setminus Z_s^k$, вместе с своей окрестности $\mathcal{U}$ и для которой кроме того выполняется: τ_1 является точкой непрерывности функции φ_0; существует такая вторая точка τ_2 непрерывности функции φ_0 в $\mathcal{U}$, что $\tau_1 < \tau_2$ и

$$\varphi_0(\tau_1) < \varphi_0(\tau_2). \tag{4}$$

С другой стороны так как $\tau_1 \in U$ и $\tau_2 \in U$, то

$$\varphi_p(\tau_1) = \varphi_p(\tau_2), p = 1, 2, \ldots .$$

После предельного перехода $p \to \infty$ в этом равенстве в силу леммы 3 из [5] получается равенство $\varphi_0(\tau_1) = \varphi_0(\tau_2)$, которое противоречит (4). Этим лемма доказана.

Лемма 3. *Если при фиксированном $k = 1, \ldots, N$ для последовательности функций $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$ имеем $\varphi_s \in \mathcal{L}_s^k$ и $\lim\limits_{s\to\infty} R(\varphi_s, \varphi_0 = 0$, то $\varphi_0 \in \mathcal{L}_0^k$.*

Доказательство. В силу леммы 2 из [5] функция φ_0 неубывающая. Допустим, что $\varphi_0 \notin \mathcal{L}_0^k$. Тогда найдется точка τ_1, которая принадлежит октрытому множеству $U = (0,1) \setminus Z_s^k$ вместе с своей окрестности $\mathcal{U}$ и для которой кроме того выполняется: τ_1 является точкой непрерывности функций φ_0; существует такая вторая точка τ_2 непрерывности функции φ_0 в $\mathcal{U}$, что $\tau_1 < \tau_2$ и $\varphi_0(\tau_1) < \varphi_0(\tau_2)$. Из этого неравенства согласно лемме 3 из [5] следует, что для всех достаточно больших s имеет место неравенство $\varphi_s(\tau_1) < \varphi_s(\tau_2)$. Следовательно, для каждого такого s найдется точка $\tau_s \in [\tau_1, \tau_2]$, которая принадлежит множеству Z_s^k. Не ограничивая общности можем считать, что $\lim\limits_{s\to\infty} \tilde{\tau}_s \tilde{\tau}$. Тогда в силу леммы 1 имеем $\tilde{\tau} \in Z_0^k$. Это однако противоречит включению

$$\tilde{\tau} \in [\tau_1, \tau_2] \subset \mathcal{U} \subset U.$$

Достигнутое противоречие доказывает лемму.

Пусть введено обозначение $M = \times_{k=1}^{N} M_k$ и $f_k(x_1, \ldots, x_N)$, $k = 1, \ldots, N$ - действительные функции, которые определены и непрерывны на множестве M. При $s = 0, 1, \ldots$ через G_s^* обозначим игру N лиц с множеством стратегий и с функцией полезности для k-ого игрока соответственно $\mathcal{L}_s^k$ и

$$F_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_N) = \int\int_M \cdots \int f_k(x_k, \ldots, x_N) d\varphi_1(x_1) \ldots d\varphi_N(x_N).$$

Пусть P_s^*, $s = 0, 1, \ldots$ - множество точек равновесия по Нэшу в игре G_s^* которое в силу теоремы Нэша непусто. Множества $\mathcal{L}_s^k, s = 0, 1, \ldots,$ при $k = 1, \ldots, N$ удовлетворяют условию **А** и кроме того в силу леммы 3 выполняется и условие **Б**. Тогда в качестве непосредственного следствия из теоремы 1 получается

Теорема 2. *При сделанных предположения имеет место соотношение*

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{\phi_s \in P_s^*} \inf_{\phi_0 \in P_0^*} \max_{1\le k\le N} R(\varphi_k^s, \varphi_k^0) = 0,$$

где $\phi_s = (\varphi_1^s, \dots, \varphi_N^s)$ *при* $s = 0, 1, \dots$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А.В. Балакришнан. Прикладной функциональный анализ. М., 1980.

[2] B.Brosowski. Parametric semi-infinite optimization: prperties of the parametrer space. Сб. Матем. методы в исследов. операц., С., 1980, 17-38.

[3] Б.Сендов. Некоторые вопросы теории приближения функций множеств в хаусдорфовой метрике. *Усп.мат.наук.* **24** *5* (1969) 141-178.

[4] Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Москва-Ленинград, 1949.

[5] Т.Р. Гичев. Исследование корректности непрерывных игр, рассматриваемых на квадрате. *Сердика.* **2** (1976) 29-34.

[6] Э. Мулен. Теория игр. М., 1985.

УАСГ
Бул.Хр. Смирненски 1
София 1000
Болгария

Поступило 12.07.1991