Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СЕРДИКА – Българско
математическо списание
18 (1992) 90-98

ОДИН КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЕФИЦИЕНТАМИ
2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТОДОР Р. ГИЧЕВ РОСИЦА К. АНГЕЛОВА

Резюме. Полученные в первой части этой работы (1992) свойства линейной системы дифференциальных уравнений с неограниченной правой частью применяются для дискретной аппроксимации одной задачи оптимального управления, в законе движения которой имеется управляющий параметр. Эта задача является обобщением классической задачи оптимального управления, при которой минимизируется функция зависящая от конечного состояния. В конце работы рассматриваются модели двух быстропротекающих процессов – включение одной электрической цепи и прямое центральное соударение двух материальных точек – и уточняется смысл, в котором эти два процесса эквивалентны.

Пусть Λ – компактное подмножество пространства R_m. При каждом $\lambda \in \Lambda$ на отрезке $[t_0, T] \times \Lambda$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t, \lambda)x + f(t, \lambda), \tag{1}$$

где $x \in R_m$ и размеры непрерывных на множестве $[t_0, T] \times \Lambda$ функций определяются вектором x. Решение системы (1) с начальным условием

$$x(t_0) = v_0 \tag{2}$$

обозначим через x_λ. Если $\Phi(t, x, \lambda)$ скалярная функция, которая определена и непрерывна на множестве $[t_0, T] \times R_n \times \Lambda$ и Δ – компактное подмножество отрезка $[t_0, T]$, через F_0 обозначим экстремальную задачу определения

$$\delta_0 = \min_{\lambda \in \Lambda} \max_{t \in \Delta} \Phi(t, x_\lambda(t), \lambda).$$

Пусть, далее, при $N = 1, 2, \ldots$ для $k = 0, 1, \ldots, (\nu_n - 1)$ определены положительные числа h_k^N и числа τ_k^N из отрезка $[t_0, T]$, для которых выполняются соотношения

$$t_0 + \sum_{k=0}^{\nu_N - 1} h_k^N = T$$

(3) $$\tau_0^N = t_0, \qquad \tau_{k+1}^N = \tau_k^N + h_k^N.$$

Через $x_{\lambda k}^N$, $k = 0, 1, \ldots, \nu_N$, обозначим решение системы

(4) $$x_{k+1} = x_k + h_k^N (A(\tau_k^N, \lambda) + f(\tau_k^N, \lambda))$$

с начальным условием

(5) $$x_0 = v_0$$

При фиксированном N множество тех точек τ_k^N из (3), которые принадлежат множеству Δ, обозначим через Δ_N. Задачу определения

$$\delta_N = \min_{\lambda \in \Lambda} \max_{\tau_k^N \in \Delta_N} \Phi(\tau_k^N, x_{\lambda k}^N, \lambda)$$

обозначим через F_N.

В случаях, когда множества Δ и Δ_N состоят из единственной точки T, задачи F_0 и F_N являются классическими задачами минимизации функции конечного состояния.

Теорема 1. *При сделанных предположениях если*

$$\lim_{N\to\infty} \left(\max_{k=0,1,\ldots,(\nu_N - 1)} h_k^N \right) = 0,$$

то имеет место соотношение

(6) $$\limsup_{N\to\infty} \delta_N = \delta_0.$$

Доказательство. Сначала установим, что

(7) $$\limsup_{N\to\infty} \delta_N \le \delta_0.$$

Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$ и

$$\delta_0 = \max_{t\in\Delta} \Phi(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0).$$

Через $\tilde{x}_k^N$, $k = 0, 1, \ldots, \nu_N$, обозначим решение задачи (4), (5) при значении параметра λ_0. Тогда выполняется

$$\delta_N = \min_{\lambda \in \Lambda} \max_{\tau_k^N \in \Delta_N} \Phi(\tau_k^N, x_{\lambda k}^N, \lambda) \le \max_{\tau_K^N \in \Delta_N} \Phi(\tau_k^N, \tilde{x}_k^N, \lambda_0)$$

и так как

$$\lim_{N\to\infty} \max_{k=0,1,\ldots,\nu_N} \|\tilde{x}_k^N - x_{\lambda_0}(\tau_k^N)\| = 0,$$

то при произвольном числе $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших N имеет место

$$\delta_n \leq \max_{\tau_k^N \in \Delta_n} \Phi(\tau_k^N, x_{\lambda_0}(\tau_k^N), \lambda_0) + \varepsilon$$

$$\leq \max_{t\in\Delta} \Phi(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0) + \varepsilon = \delta_0 + \varepsilon$$

Из этого неравенства, принимая введу, что число $\varepsilon > 0$ выбрано произвольным образом, следует неравенство (7).

В дальнейшем допустим, что равенство (6) не выполняется. Тогда в силу (7) найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при бесконечном числе индексов

$$\delta_n \leq \delta_0 + \varepsilon_0 \tag{8}$$

Пусть λ_n такое значение параметра с соответствующим решением $\bar{x}_k^N$, $k = 0, 1, \ldots, \nu_N$, задачи (4), (5), при котором в силу (8)

$$\max_{\tau_k^N \in \Delta_N} \Phi(\tau_k^N, \bar{x}_n^N, \lambda_N) = \delta_N \leq \delta_0 - \varepsilon_0 \tag{9}$$

и, кроме того, $\lim N \to \infty \lambda_N = \lambda^*$. Через x^* обозначим решение задачи (1), (2) при значении параметра λ^*. Тогда в силу соотношения

$$\lim_{N\to\infty} \max_{k=0,1,\ldots,\nu_N} \|\bar{x}_k^N - x^*(\tau_k^N)\| = 0$$

и согласно (9) при всех достаточно больших N имеет место неравенство

$$\delta_0 \leq \max_{\tau_k^N \in \Delta_N} \Phi(\tau_k^N, x^*(\tau_k^N), \lambda^*) \leq \delta_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Из достигнутого противоречия следует неравенство (6).

Далее получем аналог теоремы 1 для рассматриваемой в первой части работы [1] линейной системы с неограниченной правой частью. Пусть снова Λ – компактное подмножество пространства R_m. При $\lambda \in \Lambda$ в интервале $\Delta = [t_0, T)$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t,\lambda)x + B(t,\lambda)y + f(t,\lambda) \\ \dot{y} &= a(t,\lambda)x + b(t,\lambda)y + g(t,\lambda), \end{aligned} \tag{10}$$

где $x \in R_n$ и $y \in R_1$. Предполагается, что

$$B(t,\lambda) = B_1(t,\lambda) + G(t)B_2(t,\lambda), \qquad b(t,\lambda) = b_1(t,\lambda) + G(t)b_2(t,\lambda)$$
$$a(t,\lambda) = a_1(t,\lambda) + G(t)a_2(t,\lambda), \qquad g(t,\lambda) = g_1(t,\lambda) + G(t)g_2(t,\lambda),$$

где G – скалярная функция, которая определена и непрерывна и $G(t) \geq 0$ для $t \in \Delta$. Матричные функции A, f и B_i, a_i, b_i, g_i при $i = 1, 2$ определены, непрерывны и имеют непрерывные первые производные по t для $(t, \lambda) \in [t_0, T] \times \Lambda$. Их размеры определяются векторами x и y. Перечислим предположения, которые предполагаются быть выполненными в дальнейшем.

Предположение A. *Пусть* $T - t_0 < 1]$ *и* $b_2(t, \lambda) < 0$ *для* $(t, \lambda) \in [t_0, T] \times \Lambda$. *Кроме того в множестве* $[t_0, T] \times \Lambda$ *выполняется по крайней мере одно из условий:*

a) функции a_2 *и* g_2 *аннулируются тождественно;*

b) функция B_2 *аннулируется тождественно.*

Предположение B3. *Функция* G *имеет непрерывную первую производную и при некоторых постоянных* $L > 0$ *и* $\alpha > 0$ *для всех* $t \in \Delta$ *выполняется неравенство*

$$G'(t) \leq L(T - t)^{-(\alpha+1)}.$$

Предположение C. *При некоторых постоянных* $C > 0$ *и* $\alpha_0 > 0$ *для всех* $t \in \Delta$ *и* $\lambda_1 \in \Lambda$, $\lambda_2 \in \Lambda$ *выполняется неравендтво*

$$|b_2(t, \lambda_1) - b_2(t, \lambda_2)| \leq C\|\lambda_1 - \lambda_2\|(T - t_0)^{\alpha_0}.$$

Пусть $z_\lambda = (x_\lambda, y_\lambda)$ –решение системы (10)с начальными условиями

$$x(t_0) = v_0, \qquad y(t_0) = w_0. \tag{11}$$

Если $\Phi(t, z, \lambda)$ –скалярная функция, которая определена и непрерывна для $(t, z, \lambda) \in [t_0, T] \times R_{n+1} \times \Lambda$, то введем обозначение

$$\varphi(\lambda) = \sup_{t \in \Delta} \Phi(t, z_\lambda(t), \lambda).$$

Через F_0^* обозначим задачу определения $\delta_0^* = \inf_{\lambda \in \Lambda} \varphi(\lambda)$.

При $N = 1, 2, \ldots$ и $\alpha > 0$, $\sigma_N > 0$ определим числа

$$\tau_0^N = t_0, \quad h_k^N = (T - \tau_k^N)^{\alpha + \sigma_N}, \quad \tau_{k+1}^N = \tau_k^N + h_k^N,$$

причем множество точек $\tau_0^N, \tau_1^N, \ldots, \tau_k^N, \ldots$ обозначим через Δ_N. Если $T - t_0 < 1$ и $\alpha + \sigma_N > 1$ в силу леммы1 из [1] выполняется равенство

$$t_0 + \sum_{k=0}^{\infty} h_k^N = T.$$

Через $z^N_{\lambda k} = (x^N_{\lambda k}, y^N_{\lambda k})$, $k = 0, 1, \dots$ обозначим решение системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + (A(\tau^N_k, \lambda)x_k + B(\tau^N_k, \lambda)y_k + f(\tau^N_k, \lambda))h^N_k \\ y_{k+1} &= y_k + (a(\tau^N_k, \lambda)x_k + a(\tau^N_k, \lambda)y_k + g(\tau^N_k, \lambda))h^N_k \end{aligned} \tag{12}$$

с начальными условиями

$$x_0 = v_0, \quad y_0 = w_0. \tag{13}$$

При обозначении

$$\varphi_N(\lambda) = \sup_{\tau^N_k \in \Delta_N} \Phi(\tau^N_k, z^N_{\lambda k}, \lambda)$$

через F^*_N обозначим задачу определения

$$\delta^*_N = \inf_{\lambda \in \Lambda} \varphi_N(\lambda).$$

Прежде чем приступить к доказательству аналога теоремы 1 для последовательности задач $\{F^*_N\}^\infty_1$ остановимся на следуюших вспомагательных утверждениях.

Лемма 1. *Пусть выполняется предположение A и $\{\lambda^*_N\}^\infty_1$ такая последовательность чисел $\lambda_N \in \Lambda$, что $\lim_{N\to\infty} \lambda_N = \lambda_0$. Пусть кроме того, при $\alpha_0 > \max[0, \alpha - 1]$ имеют место предположения B3 и C. Тогда если $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = +\infty$, то $\lim_{N\to\infty} \varphi_N(\lambda_N) = \varphi(\lambda_0)$.*

Доказательство. Пусть ε – фиксированное положительное число. Число $\theta_0 \in \Delta$ выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varphi(\lambda_0) \geq \Phi(\theta_0, z_{\lambda_0}(\theta_0), \lambda_0) > \varphi(\lambda_0) - (\varepsilon/3).$$

Пусть число N_0 выбрано в силу теоремы 2 [1] так, чтобы если $N > N_0$ и $\theta_0 \in [\tau^N_{k_N}, \tau^N_{k_N+1})$, то

$$\Phi(\tau^N_{k_N}, z_{\lambda_0}(\tau^N_{k_N}, \lambda_0) > \varphi(\lambda_0) - (2\varepsilon/3).$$

И наконец число N_1, $N_1 \geq N_0$, выбирается согласно теореме 4 [1] так, чтобы если $N > N_1$, то

$$\varphi_N(\lambda_N) \geq \Phi(\tau^N_{k_N}, z^N_{\lambda_n k_n}, \lambda_n) > \varphi(\lambda_0) - \varepsilon.$$

Следовательно для всех достаточно больших N имеет место неравенство

$$\varphi(\lambda_0) - \varphi_N(\lambda_N) < \varepsilon. \tag{14}$$

С другой стороны для каждого натурального числа N существует такое $\tau^N_{k_N} \in \Delta_N$, что

$$\varphi_N(\lambda_N) \geq \Phi(\tau^N_{k_N}, z^N_{\lambda_N k_N}, \lambda_N) > \varphi_N(\lambda_N) - (\varepsilon/2).$$

Согласно теореме 4 [1] существует такое число N_2, $N_2 \geq N_1$, что если $N > N_2$, то

$$\varphi(\lambda_0) \geq \Phi(\tau^N_{k_N}, z(\tau^N k_N), \lambda_0) > \varphi_N(\lambda_N) - \varepsilon.$$

Следовательно для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших N кроме (14) выполняется и неравенство

$$\varphi_N(\lambda_N) - \varphi(\lambda_0) < \varepsilon.$$

Этим утверждение леммы доказано.

В качестве непосредственного следствия из теоремы 3 из [1] получается

Лемма 2. *Пусть выполняется предположение A и $\{\lambda_s\}_1^\infty$ такая последовательность чисел $\lambda_s \in \Lambda$, что $\lim_{s\to\infty} \lambda_s = \lambda_0$. Тогда если при $\alpha_0 > \max[0, \alpha - 1]$ имеют место предположения B3 и C, то $\lim_{s\to\infty} \varphi(\lambda_s) = \varphi(l_0)$.*

Теорема 2. *Пусть выполняется предположение A и при $\alpha_0 > \max[0, \alpha - 1]$ имеют место предположения B3 и C. Тогда если $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = +\infty$, то $\lim_{N\to\infty} \delta^*_N = \delta^*_0$.*

Доказательство. Пусть ε – произвольное положительное число и $\{\lambda_s\}_1^\infty$ – последовательность чисел $\lambda_s \in \Lambda$, для которой выполняется $\lim_{s\to\infty} \lambda_s = \lambda_0$, $\lim_{s\to\infty} \varphi(\lambda_s) = \delta^*_0$. Из этих соотношений в силу леммы 2 следует, что $\varphi(\lambda_0) = \delta^*_0$. Тогда согласно лемме 1 найдется такое натуральное число N_0, что если $N > N_0$, то

$$\delta^*_N \leq \varphi_N(\lambda_0) < \varphi(\lambda_0) + \varepsilon = \delta^*_0 + \varepsilon \tag{15}$$

Если последовательность $\{\lambda_N\}_1^\infty$ чисел $\lambda_N \to \Lambda$ такая, что

$$\varphi_N(\lambda_N) < \delta^*_N + (\varepsilon/2), \qquad \lim_{N\to\infty} \lambda_N = \lambda^*,$$

то в силу леммы 1 для всех достаточно больших N выполняется

$$\delta^*_0 \leq \varphi(\lambda^*) \leq \varphi_N(\lambda_N) + (\varepsilon/2) < \delta^*_n + \varepsilon. \tag{16}$$

Тогда из (15) и (16) следует утверждение теоремы.

В дальнейшем полученные в [1] результаты применяются при моделировании быстропротекающих процессов. На самом деле стремление уточнить существующие модели этих процессов является первопричиной проведения представленных в [1] исследований. Первый из этих процессов – коммутация в электических цепях. Уточнению модели мгновенной коммутации [3] и связанным с ний проблемам определения начальных условий и вычисления коммуникационных потерь энергии посвящены работы [5,6]. При этих проблемах существенным оказываются теорема 1 и следствие 1 из [1]. Исследование с помощью компьютеров коммутационных процессов и связанных с ними явлений обратный ток, остаточных ток, перенапряжения в реальные интервалы времени основано на использовании аппроксимационной теоремы 4 из [1]. Публикование этих результатов, которые получены вместе с коллективом, предусматривается в специализированных журналах.

Второй класс процессов, при моделировании которых полезными оказываются результаты из [1], это процессы соударения тел [4]. В качестве примера рассмотрим прямое центральное соударение двух материальных точек A_1 и A_2 с массами соответственно m_1 и m_2. Пусть движение этих точек происходит по прямой, где введена система координат с началом в точке O. Через $v_1(t)$ и $v_2(t)$ обозначим скорость точек в момент t. В момент t_0 эти точки всречаются и начинается процесс соударения, который заканчивается в момент T. Введем обозначения $v_1(t_0) = v_1^0$, $v_2(t_0) = v_2^0$. Пусть R –фискированное положительное число из интервала $[0,1]$ и $G_T(t)$, $t \in [t_0, T)$ – непрерывная неотрицательная функция, для которой

$$G_T(t_0) = 0, \qquad \lim_{t\to T} G_T(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to T} \int_{t_0}^{T} G_T(t)dt = +\infty.$$

Для точек A_i, $i = 1,2$, рассмотрим силы

$$F_i(t) = -G_T(t)v_i(t), \qquad H_i(t) = -G_T(t)Rv_i^0,$$

первая, из которых вызвана пластической деформацией, а вторая – упругая сила. При обозначениях

$$u_T(t) = v_1(t) - v_2(t), \qquad M = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

в интервале удара $[t_0, T)$ скорости обеих точек удовлетворяют уравнениям

$$\dot{v}_i = \frac{1}{m_i}\Big[(-1)^i G_T(t)u_T(t) + (-1)^i G_T(t)R(v_1^0 - v_2^0)\Big]. \tag{17}$$

Вычитая почленно второе из первого уравнения при введенных обозначениях получим уравнение

$$\dot{u}_T = -G_T(t)Mu_T - G_T(t)RM(v_1^0 - v_2^0), \tag{18}$$

для которого имеется начальное условие

$$u_T(t_0) = v_1^0 - v_2^0.$$

Тогда в силу следствия 1 из [1] получим

$$u_T(t_0^+) = \lim_{T\to t_0}\lim_{t\to T} u_T(t) = -R(v_1^0 - v_2^0). \tag{19}$$

Так как из сравнения уравнений (17) и (18) следует, что

$$m_i M\dot{v}_i = (-1)^{i+1}\dot{u}_T,$$

то интегрируя обе стороны этого равенства от t_0 до t находим, что

$$m_i M(v_1(t) - v_1^0) = ({}_1)^{i+1}(u_T(t) - u_T(t_0)). \tag{20}$$

Тогда из (19) и (20) для скорости обеих точек после мгновенного удара получается

$$v_i(t_0^+) = \frac{m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0}{m_1 + m_2} + (-1)^i \frac{R(v_1^0 - v_2^0)}{Mm_i}.$$

Из этих формул следуют равенства

$$\begin{aligned} &m_1 v_1(t_0^+) + m_2 v_2(t_0^+) = m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0, \\ &|v_1(t_0^+) - v_2(t_0^+)| = R|v_1^0 - v_2^0)|, \end{aligned} \tag{21}$$

первое из которых выражает закон сохранения количества движения, а второе раскрывает смысл постоянной R как коэффициент востановления Ньютона. При традиционном изложении теории процесса равенства (21) служат исходным пунктом [4]. Предлагаемая модель позволяет рассматривать этот процесс в реальное время вместе с многочисленными возможностями, которые определяются специальным выбором функции G_T, причем при сжимании интервала удара получаются классические результаты мгновенного удара

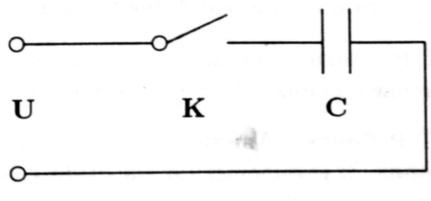

Рис. 1

Наконец рассмотрим процесс включения электрической цепи на рис. 1 [3]

В цепь включены емкость и источник постоянного напряжения U. Включение цепи через элемент коммутации K происходит в интервал времени (t_0, T). Для определенности будем считать, что сопротивление $R(t)$ в элементе коммутации имеет вид

$$R(t) = \left(\frac{T-t}{t-t_0}\right)^\alpha = \frac{1}{G_T(t)}, \quad \alpha \geq 1.$$

В силу законов Кирхгоффа напряжение емкости u_c удовлетворяет уравнению

$$c\frac{du_c}{dt} = -G_T(t)u_c + UG_T(t), \qquad u_c(t_0) = u_c^0 \tag{22}$$

и согласно следствию 1 из [1] имеет место равенство $u_c(t_0^+) = U$.

Сравнивая уравнение (22) с уравнением (18) приходим к выводу, что напряжение емкости u_c при включении цепи на рис. 1 и разность скоростей обеих точек при прямом центральном соударении моделируются одинаковыми уравнениями.

Результаты численного исследования процесса включения цепи на рис. 1 в реальный интервал времени содержатся в [7].

REFERENCES

[1] Т. Р. Гичев. Один класс линейных дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами. 1. Свойство и решения. *Сердика,* **18** (1992) 79-89.

[2] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.

[3] В. П. Попов. Основы теории цепей. М., 1985.

[4] Н. Кильчевский. Теория соударения твердых тел. Киев, 1969.

[5] Р. К. Ангелова, Т. Р. Гичев. Анализ процесса коммутации в сложных линейных электрических цепях. *Электротехника* **9** (1990) 58–61.

[6] Р. К. Ангелова, Т. Р. Гичев. Анализ энергии коммутационных потерь в электрических цепях. *Электротехника* **3** (1988) 26–30.

[7] Р. К. Ангелова, Т. Р. Гичев, И. Иларионов. Изследване на превключването в електрическа верига с помощта на компютър. *Физ.-мат. списание*, **30** (1988) 240–244.

УАСГ
бул.Хр. Смирненски 1
София 1000
Болгария

Поступило 07.02.1992